Aritmética para Maestros

+ Ideas, – Cuentas

Pedro Ramos Alonso

2019

Aritmética para Maestros

Pedro Ramos Alonso

Correo electrónico: masideas.menoscuentas@gmail.com

Página web: https://masideas-menoscuentas.com/

@MsIdeasMnosCtas

Fecha de revisión: 30 de septiembre de 2019.

ISBN: 978-0-244-51332-0

A mis alumnos de Matemáticas I de todos estos cursos. Sus dificultades con la asignatura me han ayudado a explorar diferentes caminos en la aritmética básica.

Índice general

Introducción

El origen de este libro son unos apuntes de la asignatura de Matemáticas I, que se imparte en el Grado en Magisterio de Educación Primaria en la Universidad de Alcalá. La asignatura está dedicada al estudio de la aritmética elemental. Revisaremos los procedimientos básicos de la aritmética, porque por supuesto es imprescindible conocer los algoritmos (los clásicos, y otras alternativas) para calcular sumas, restas, multiplicaciones y divisiones de números naturales, así como los procedimientos para operar con fracciones. Pero queremos dejar claro desde el principio que no nos interesa solo el cómo se hacen las cosas, sino el porqué se hacen de esa forma, por qué funcionan los procedimientos que todos conocemos. Estos son algunos ejemplos de las cuestiones que nos ocuparán, y que es posible que sean nuevas para algunos lectores.

1.

$$\begin{array}{r} 6\,4\,5 \\ -\ 1\,2\,8 \\ \hline 5\,1\,7 \end{array}$$

El algoritmo tradicional en España para calcular la resta de la izquierda se suele verbalizar en las aulas de la siguiente forma:

“Del 8 al 15 van 7, y me llevo 1 ... (luego esa 1 se le suma al 2 de las decenas del sustraendo)”

No tenemos 15 unidades, sino 5. ¿Qué estamos haciendo exactamente? ¿Por qué funciona este procedimiento?

¿Existen alternativas mejores, desde el punto de vista didáctico?

2.

$$\begin{array}{r} 6\,4\,7 \\ \times\ \ 2\,8 \\ \hline 5\,1\,7\,6 \\ 1\,2\,9\,4\,\boxed{} \\ \hline 1\,8\,1\,1\,6 \end{array} \quad \leftarrow ?$$

En el caso del algoritmo tradicional de la multiplicación, que se muestra a la izquierda, cuando multiplicamos 2 por 7, el 4 lo ponemos debajo del 7, dejando el hueco que se muestra. Este hueco es una fuente común de errores en los alumnos que están aprendiendo a multiplicar, porque se olvidan de dejarlo. ¿Por qué es necesario dejar ese hueco?

3. Esto no es una pregunta sobre un procedimiento, sino un problema “básico” de fracciones, o que debería ser básico cuando se entienden las ideas fundamentales sobre fracciones. El problema se debe resolver con métodos de primaria, es decir, sin usar procedimientos algebraicos.

Luis y Marta tienen la misma cantidad de dinero. Organizan una fiesta juntos, y Luis gasta la mitad de su dinero en organizarla. Como Marta ha invitado a más amigos, ella gasta 3/4 de su dinero en la organización. ¿Qué fracción del total del dinero que tenían entre los dos han gastado en organizar la fiesta?

4. ¿Qué significa $4 : \frac{2}{3}$?

   Obsérvese que no estamos preguntando por el resultado de la operación, ya sabemos que es 6. Estamos preguntado por cuál es el significado de esa operación. Dicho de otra forma: ¿puede el lector pensar un problema, una pregunta, que se resuelva haciendo esta división?

5. El máximo común divisor de dos números es, como su nombre indica, el mayor divisor común de los dos números. Sabemos que si queremos calcular, por ejemplo, el máximo común divisor de los números 90 y 84, lo que tenemos que hacer es factorizarlos, $90 = 2 \times 3^2 \times 5$, $84 = 2^2 \times 3 \times 7$ y tomar los factores comunes (con el menor exponente). Por tanto, el máximo común divisor de 90 y 84 es $2 \times 3 = 6$. ¿Por qué funciona esta forma de calcular el máximo común divisor?

La importancia del porqué

Cualquiera que haya tenido niños de edad temprana alrededor sabrá que casi todos pasan por una etapa en la que continuamente están preguntando ¿por qué? El ser humano tiene un gusto natural por entender el mundo, y la Biología Evolutiva proporciona una explicación, cuando menos, plausible: cuando entendemos por qué funcionan las cosas, cuando comprendemos su funcionamiento, estamos mejor preparados ante posibles imprevistos, y eso pudo ser en su momento una ventaja evolutiva relevante.

En matemáticas ocurre lo mismo: si sabemos por qué funciona un procedimiento, estaremos más preparados para saber cuándo se puede generalizar, y cuándo no. Estaremos también mejor preparados para aplicarlo, adaptándolo, si es necesario, a un contexto diferente. Un ejemplo: todos sabemos que para multiplicar un número entero por 10 es suficiente con añadir un 0. Un error estándar cuando se empieza a operar con números decimales es generalizar esta idea, y escribir $17{,}3 \times 10 = 17{,}30$. Si un alumno es consciente de por qué multiplicar un número entero por 10 se traduce simplemente en añadir un 0, es mucho más probable que sea consciente de que esa misma idea no se generaliza a la aritmética con números decimales. Una gran parte de los errores en los procedimientos que vemos en nuestras aulas tienen la misma base: generalizar a nuevas situaciones, de manera incorrecta, técnicas que eran válidas previamente. En la mayoría de los casos, la mejor forma de evitarlo es la misma: entender por qué esa técnica funciona en un moomento dado, ya que esto casi siempre deja claro por qué puede no funcionar en una nueva situación.

Richard Skemp es uno de los autores que ha tratado esta problemática de una forma más interesante [1]. Skemp habla de *comprensión instrumental* (instrumental understanding) y de *comprensión relacional* (relational understanding). En una imagen que nos parece muy clarificadora, Skemp compara la compresión en matemáticas con el conocimiento de una ciudad. En el caso de la comprensión instrumental, lo que sabemos de la ciudad es cómo hacer ciertos recorridos, como ir desde el punto A hasta el B, desde el C hasta el D, etc. El inconveniente de este conocimiento es claro: si un día necesitamos ir a un nuevo lugar, o si cortan una calle por obras, tendremos dificultades para adaptar las rutas conocidas a una nueva situación. En el caso de la comprensión relacional, lo que ocurre es que tenemos en la cabeza una imagen completa de la ciudad, y esto nos permite planear rutas a nuevos destinos, o hacer frente a imprevistos, como unas obras en una calle conocida.

Una componente fundamental de la comprensión relacional de las matemáticas es ser conscientes de las conexiones entre diferentes conceptos, y entre diferentes áreas de la disciplina. Uno de los objetivos de esta asignatura es, por supuesto, revisar los procedimientos de la aritmética básica; pero queremos, además, trabajar esa comprensión relacional, entender los porqués de los diferentes procedimientos, y las conexiones entre diferentes conceptos.

Claramente, estos aspectos son especialmente importantes cuando se trata de la formación matemática (aritmética, en este caso) de los futuros maestros de Educación Primaria. Sin pretender entrar en el debate de en qué debería consistir la formación matemática de los maestros – un debate que, desde nuestro punto de vista, dista mucho de estar cerrado de manera satisfactoria – este volumen es una propuesta de lo que creemos que es la formación aritmética necesaria para un futuro maestro. La intención es situarnos a caballo entre un estudio de los contenidos, y el estudio práctico de temas de Didáctica de las Matemáticas, aceptando de entrada que la propuesta puede quedarse algo corta en los aspectos correspondientes al estudio de la didáctica de la aritmética. En este aspecto, la propuesta es deudora de su origen, una asignatura dedicada al estudio de los contenidos.

Otro punto objeto de debate es la amplitud de los conocimientos matemáticos que necesita un futuro maestro de Educación Primaria para ejercer de manera satisfactoria su tarea. Desde nuestro punto de vista, además de dominar en profundidad los contenidos de esta etapa, es preciso que también comprenda el desarrollo de estos contenidos en los primeros cursos de la Educación Secundaria, para dar la continuidad adecuada al desarrollo de los temas. Es lo que en el mundo anglosajón se conoce como *horizon knoweledge*. Por esta razón es por lo que temas como la divisibilidad, o los enteros, están tratados con un nivel de profundidad mayor que el correspondiente al currículo de la Educación Primaria. Para posibles lectores de otros países, puede ser útil aclarar aquí que la etapa de Educación Primaria en España tiene una duración de seis cursos.

Detalles organizativos

En el texto se proponen ejercicios y actividades variadas. Algunas de ellas se resuelven a continuación de ser formuladas, mientras que la solución de otras queda pospuesta a un capítulo final. El objetivo de esta segunda alternativa es animar al lector a que trabaje los ejercicios e intente resolverlos, antes de ver la solución. Existe una gran diferencia entre entender una solución que se nos presenta, y ser capaces de obtener una solución por nuestros propios medios. La única forma de lograr un aprendizaje real en matemáticas es dedicar tiempo de trabajo a la resolución de ejercicios y problemas. Con el único objetivo de distinguir entre estos dos tipos de actividades, y sin otra pretensión clasificatoria, las actividades resueltas en el texto se denominan “ejemplos”, en tanto que las actividades con solución diferida están etiquetadas como “ejercicios”. Además de esto, al final de cada capítulo hay una colección de ejercicios propuestos, cuya respuesta numérica aparece al final del libro. Por supuesto, que el número final sea el correcto no garantiza que el procedimiento esté bien, pero sí nos puede ayudar a adquirir seguridad en el trabajo hecho. En todo caso, animamos a los lectores a que, en caso de duda, traten de poner a prueba sus soluciones como hacen los matemáticos profesionales: intentando convencer a un colega de que sus argumentos son correctos.

En algunas actividades puede ser de ayuda algún material auxiliar. Están disponibles online en el archivo `http://www3.uah.es/pramos/Blog/Pdfs/materiales.pdf`. En la misma dirección, cambiando materiales.pdf por erratas.pdf, estará disponible la, esperamos que breve, lista de erratas que irán apareciendo.

Otros textos sobre este tema

En esta sección quiero hacer una pequeña recopilación de algunos de los textos que he leído estos años, y que me resultaron muy útiles para acercarme al tema de la formación matemática del docente de Educación Primaria.

Este informe del National Council on Teaching Quality [8] fue de gran ayuda para comprender la problemática de la formación matemática de maestros. El informe estudia la situación en EEUU, pero muchos de sus aspectos – la desigual formación matemática de los estudiantes de nuevo ingreso, el rechaco a las matemáticas de muchos de ellos – creo que son trasladables al caso español, y seguramente a otros muchos países. También resulta muy clarificadora la forma en que comparan diversos contenidos matemáticos de primaria, al nivel del alumno, con los correspondientes, al nivel que debería tener el maestro para poder enseñarlos con garantías. Otro punto que contiene el informe es un análisis de libros de texto que me resultó de gran ayuda, y que me permitió acceder a libros que han resultado muy útiles.

Me sigo identificando especialmente con la visión de este libro de Thomas Parker [3], que además me sirvió para descubrir los libros de texto de Singapur de Educación Primaria. Los textos de Musser et al [4] y de Sybilla Beckmann [5] me parecen también excelentes referencias para este tema.

En una categoría diferente, pues no son “manuales de referencia”, merecen atención los libros de Liping Ma [2] y de Ron Aharoni[9]. El primero presenta el contraste entre los conocimientos matemáticos de docentes chinos y docentes estadounidenses. De nuevo, mi impresión es que esta comparación es muy aplicable al caso español. Ron Aharoni es un matemático profesional[1] que se dedicó durante 5 años a impartir docencia (a tiempo completo) a nivel de Educación Primaria. Es una experiencia que resulta inimaginable en el anquilosado sistema español, pero que le resultó muy enriquecedora, y en el libro están destiladas muchas de las ideas que puede

[1] En el sentido estadounidense, es decir, un matemático con una larga experiencia de docencia e investigación a nivel universitario.

tener un matemático cuando se enfrenta, de verdad, con ánimo de ayudar, y de escuchar a los niños, a las matemáticas “elementales”.

Otros matemáticos estadounidenses que han dedicado atención al tema de las matemáticas elementales, y cuya lectura me parece muy recomendable, son Hung-Hsi Wu `https://math.berkeley.edu/~wu/` y James Milgram [6]. En sus textos hacen hincapié en la necesidad de un mayor dominio de los contenidos matemáticos por parte de los docentes. En particular, este mayor dominio requiere para algunos temas el uso de un lenguaje y unas técnicas que, de acuerdo con mi experiencia, se convierten en un obstáculo casi insalvable para muchos de nuestros estudiantes de magisterio.

La tensión contenidos-metodología está siempre presente en el debate de la formación matemática de maestros. La profesora Jo Boaler es una de las voces más interesantes de este segundo campo, con propuestas como prestar atención al componente emocional y la “mentalidad de crecimiento” [7].

En mi opinión, existe un déficit de bibliografía en castellano dedicada a la formación matemática de maestros. Este texto es un (modesto) intento de reducir parcialmente ese déficit. Entre esa bibliografía es obligado señalar los materiales de Juan D. Godino [10], que tienen la ventaja de poder ser usados, gratuitamente, para uso docente. En el libro [11], editado por Luis Rico e Isidro Segovia, se presenta la visión más extendida de la Didáctica de las Matemáticas en España.

Una invitación al debate

Uno de los objetivos de este texto es promover el debate sobre la formación matemática de maestros, y buscar los enfoques más adecuados para cada tema. Con la intención de abrir una vía de comunicación con los posibles lectores, he incluido algunas formas de contacto en la presentación y, en particular, estaré atento en Twitter a la etiqueta “#AritméticaMaestrosMImc”.

Bibliografía

[1] Richard R Skemp. Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics teaching*, 77(1):20–26, 1976.

[2] Liping Ma. *Knowing and teaching elementary mathematics: Teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States.* Routledge, 2010.

[3] Thomas H Parker and Scott Baldridge. *Elementary mathematics for teachers.* Sefton-Ash, 2004.

[4] Gary L Musser, Blake E Peterson, and William F Burger. *Mathematics for Elementary Teachers, Binder Ready Version: A Contemporary Approach.* Wiley, 2013.

[5] Sybilla Beckmann. *Mathematics for elementary teachers with activity manual.* Pearson, 2013.

[6] R James Milgram. *The mathematics pre-service teachers need to know.* Department of Mathematics, Stanford University Stanford, CA, 2005.

[7] Jo Boaler. *Mathematical mindsets: Unleashing students' potential through creative math, inspiring messages and innovative teaching.* John Wiley & Sons, 2015.

[8] Julie Greenberg and Kate Walsh. No common denominator: The preparation of elementary teachers in mathematics by america's education schools. Technical report, National Council on Teacher Quality, 2008.

[9] Ron Aharoni. *Arithmetic for Parents: A Book for Grown-ups about Children's Mathematics.* World Scientific, 2015.

[10] Juan Godino. Textos para la formación matemática y didáctica de maestros. `https://www.ugr.es/~jgodino/fprofesores.htm`.

[11] I Segovia Alex and L Rico Romero. Matemáticas para maestros en educación primaria. *Educatio Siglo XXI*, 30(1):357–360, 2012.

[12] John A Van de Walle, LouAnn H Lovin, Karen S Karp, and Jennifer M Bay-Williams. *Teaching Student-Centered Mathematics: Developmentally Appropriate Instruction for Grades PreK-2 (Volume I)(Teaching Student-Centered Mathematics Series).* Pearson, 2014.

[13] Richard C Atkinson and Richard M Shiffrin. Human memory: A proposed system and its control processes. In *Psychology of learning and motivation*, volume 2, pages 89–195. Elsevier, 1968.

[14] Arántzazu Fraile Rey. *El desarrollo de actitudes valiosas para la resolución de problemas matemáticos en Educación Primaria.* Tesis Doctoral, Universidad de Alcalá, 2018.

[15] Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria. BOE n.º 52, de 01-03-2014.