La descomposición y toda esa porquería.

Stuart Plunkett, Homerton College, Cambridge.

¿Cómo calcula la gente?

Bien, varía bastante. Veamos estas tres historias:
YO: ¿Sabes cuántas son 7 montones de 8?
PEDRO (7 años): No.
YO: ¿Te importa calcularlo?
PEDRO: (Larga pausa) 56.
YO: ¿Cómo lo has hecho?
PEDRO: Bueno.... sabía cuánto eran 10 veces 8, así que quité 8, lo que hacia 72, y luego otra vez y otra. Total 56.
YO: ¿Cuántas son 213 menos 188?
RAY (adulto): 25.
YO: ¿Cómo lo has hecho?
RAY: Bueno, faltan 12 para 200, y 13 que pasan, son 25.
YO: ¿Cuántas son 213 menos 188?
ESTUDIANTE (19 años): (Silencio)
YO: ¿Qué te pasó cuando te pregunté?
ESTUDIANTE: Sentí pánico.
YO: Pero tendrías algo en mente...
ESTUDIANTE: Sí, vi 213 escrito, y debajo 188, y más abajo una línea
Preguntad a la gente cómo calcula, e incluso observaros a vosotros mismos, y enseguida encontraréis una fascinante variedad de métodos dependiendo de la idiosincrasia de la persona.

¿Cómo se enseña el cálculo?

En contraste con la diversidad de métodos de enseñanza que en realidad la gente utiliza, hay muy poca variedad de ellos al aplicarlos en las escuelas. En este momento se puede casi asegurar sin temor a equivocarnos que a casi todos los niños de este país se les enseñan 1os algoritmos escritos estándar para las cuatro reglas, entendiendo por “cuatro reglas” los procesos de la suma, la resta, las multiplicaciones cortas y largas, y la división, las cuales se presentan según el modelo siguiente:

$$\begin{array}{r} 57 \\ +\ 38 \\ \hline 95 \end{array} \qquad \begin{array}{r} {}^{4}\cancel{5}7 \\ -\ 38 \\ \hline 19 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 57 \\ \times\ {}_{5}\,8 \\ \hline 456 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1\ \ 9 \\ 3 \overline{)\,5\ {}^{2}7} \end{array}$$

Hay variaciones menores, desde luego, sobre todo en lo relativo a si se han de multiplicar primero las unidades o las centenas, en una multiplicación larga, o si el cociente ha de ir encima o debajo del dividendo en una división corta, e incluso pueden encontrarse distinciones más importantes entre descomposición y sumas equivalentes. Pero posiblemente eso es todo. A la gran mayoría de niños se les enseñan estos métodos de cálculo trabajando desde el principio con los números completos, incluidos decimales, y para la mayoría, sospecho, estos son los únicos métodos de enseñanza que reciben.

La naturaleza de los algoritmos escritos estándar

¿Por qué será esto así? Las razones subyacen en gran medida en la naturaleza misma de estos algoritmos. Se entiende mejor si estudiamos detenidamente sus características:

1. Son escritos, de forma tal que la operación es permanente y susceptible de corregirse.
2. Están estandarizados, por lo que es posible comprobar que todo el mundo hace lo mismo.
3. Están contraídos, en el sentido de que resumen varias líneas de ecuaciones e incluyen la distributividad y la asociatividad.
4. Son efectivos. Por ejemplo, es menos efectivo sumar las decenas primero, porque se necesitaría hacer la correspondiente enmienda al total después de haber sumado las unidades.
5. Pueden ser automatizados. Se pueden enseñar y practicar sin necesidad de entender el proceso o lo que se está haciendo.
6. Son simbólicos. Uno hace sus operaciones enteramente por medio de símbolos de manipulación, sin referencias al mundo real o a cualquier otro modelo. En la fase final la respuesta aparece normalmente sin aproximaciones previas.
7. Son generales, en el sentido, de que funcionarán con cualquier número, grande o pequeño, entero o decimal, con pocos o muchos dígitos. Tal vez éste sea su mayor atractivo y le viene de explotar su valor posicional.
8. Son analíticos. Requiere que los números se rompan en dígitos de decenas y unidades, y que los dígitos se escriban separadamente.
9. No se interiorizan fácilmente. No corresponde a la forma en la que la gente tiende a pensar sobre los números.
10. Favorece la pasividad cognitiva o suspende la comprensión. No es probable que pueda elegirse el método de cálculo, y mientras se está operando no se piensa demasiado por qué se hace de esa forma.

Posiblemente la más significativa de estas características sea la octava. Al romper los números en centenas, decenas y unidades, y escribirlas en dígitos, desarrollamos sistemas que pueden aplicarse a todos los números, no importa que sean grandes o pequeños, y pueden ser aplicados eficazmente. De todas formas, un sistema analítico tal, aparta los sistemas del área de los números completos -los que no pueden escribirse en dígitos, por ejemplo- con los que la gente está más familiarizada. Incluso si las reglas pueden recordarse, se aprenden en su mayoría sin razones, y sin relación alguna con los conocimientos numéricos previos. Están lejos de ayudar al conocimiento de los números; es más, favorecen la creencia de que las matemáticas son esencialmente arbitrarias.

Como se ha podido comprobar con frecuencia, el entrenamiento en estos métodos puede ser una buena idea si queremos conseguir administrativos u otros, de los que se requiere rapidez y seguridad en el manejo de números grandes en operaciones a mano. Además, enseñar con estos métodos facilita el trabajo, dado que son fáciles de controlar y calificar.
Tal vez pudiera añadirse un punto más: son tradicionales. Tanto para un montón de profesores no especialistas en matemáticas como para el público en general, las cuatro reglas de cálculo son los algoritmos escritos estándar. Concepto y algoritmo se equiparan. Así, al enseñar la división se enseña más un método que una idea. Y el método será lo único que se enseñe, y en esta idea, por fin, se puede perpetuar el propio conocimiento con alguna seguridad.

El uso de los algoritmos, escritos estándar.

Una de las cosas más significativas de estos métodos es que se usan poquísimo. En algunas investigaciones dirigidas a otros fines, D.A. Jones investigó los métodos usados por ochenta alumnos de once años para calcular

67 + 38, 83-26, 17 x 6, y 116 + 42.

Las preguntas se escribieron en esta forma, y los niños tenían libertad para usar métodos escritos o mentales. Más de la mitad de las trescientas operaciones fueron satisfactoriamente resueltas por métodos no estándar, por ejemplo:

83-26; 83, 73, 63, 60, 57.

17 x 6; 12 x 6 = 72, 72 + 30 = 102.

A pesar del hincapié hecho en la enseñanza de los algoritmos estándar, no son necesariamente elegidos para los cálculos de este nivel de dificultad. Esto sugiere, por lo menos, que los métodos estándar no son adecuados para el trabajo mental. Las pruebas realizadas tanto con adultos como en niños sobre cómo resuelven sus sumas dieron similares resultados.
Al mismo tiempo los algoritmos estándar no son entendidos por los niños. Cualquier profesor de matemáticas con niños entre 8 y 16 años reconocerá estos:

$$\begin{array}{r} 35 \\ +\ {}_{2}47 \\ \hline 91 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 45 \\ -\ 37 \\ \hline 12 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 35 \\ \times\ 3 \\ \hline 915 \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} 2 & 216 \\ \cline{2-2} & \ \ 18 \end{array}$$

y probablemente se sumará con rapidez a la triste colección. La situación se agrava si al niño que se ha equivocado sobre el papel se le hace oralmente la pregunta y es capaz, como ocurre con frecuencia, de responderla mentalmente. Nary Harris escribe sobre los dos ámbitos diferentes en los que el niño opera: el ámbito de los números escritos y el ámbito de los números hablados. Ella saca la conclusión de que solo hay entre ellos dos una muy tenue conexión.
Los algoritmos estándar están, también, mal utilizados, como quien utiliza un martillo pilón para partir nueces. ¿Cuántos niños han tenido que asimilar operaciones como éstas?

$$\begin{array}{r} 1\ {}^{1}0\ {}^{1}0{}^{1}2 \\ -\ \ {}^{10}9\,{}^{10}9\,5 \\ \hline 0\ \ 0\,7 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 26 \\ \times\ \ 100 \\ 00 \\ \hline 000 \\ 2600 \\ \hline 2600 \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} 10 & 6^{6}2^{2}7^{7}0 \\ \cline{2-2} & \ \ 6\ 2\ 7 \end{array}$$

Ni siquiera en el caso de los alumnos conformistas o que no piensan por sí mismos, aplican los métodos estándar en la creencia de que sean siempre los más apropiados.

La naturaleza de los algoritmos mentales

Resuelve mentalmente, o aún mejor pregunta a un niño las operaciones siguientes y trata de determinar cómo se resolvieron:

57 + 24
83 - 69
3 x 24
112 + 4

He aquí algunas de las características de los algoritmos mentales. Contrastan con las de la lista anterior, pero no se ha intentado compararlas una a una.

1. Son fluctuantes y frecuentemente difíciles de fijar.
2. Son variables. De sus ochenta niños, Jones registró dieciséis métodos diferentes para resolver 83-26. De ellos, tres eran algoritmos escritos estándar.
3. Son flexibles, y se pueden adaptar de acuerdo con los números a que se refieran. ¿Se te ocurren métodos diferentes para resolver 83-79, 83-51, 83-7?
4. Son métodos activos, en el sentido de que el usuario hace siempre una selección definida, aunque no siempre muy consciente, del método a utilizar, y tiene el control de sus propias operaciones.
5. Son normalmente holísticos, dado que trabajan con números completos más que separando decenas y unidades, por ejemplo

   4x35 = 2x70 = 140

   4x28: 4x30 = 120, -8, 112.
6. Son normalmente constructivos, trabajando desde una parte do la pregunta hacia la respuesta, por ejemplo

   37+28: 37, 47, 57, 67, 65.
7. No están diseñados para memorizarlos. Aunque escritos tiendan a extenderse como en el ejemplo anterior. Pero pueden recordarse si así se desea
8. Necesitan la comprensión del proceso completo. Un niño que realiza una operación mental casi con toda certeza entiende lo que hace. Igualmente su uso desarrolla la comprensión. Pero por otra parte, no pueden usarse como actividades cuyo único propósito sea el desarrollo de la comprensión.
9. Suelen ser icónicos**,** tanto estén relacionados con un icono, sea del tipo sucesión numérica o cuadro numérico, o dependan de una enunciación seriada como en

   32+21: 32, 42, 52, 53

   En ambos casos han de usarse imágenes mentales de signos numéricos.
10. Frecuentemente dan una aproximación cercana a la respuesta correcta. Esto es así normalmente porque se calcula primero un número situado a la izquierda, dentro del contexto de los números enteros, por ejemplo

    145+37: 175, 182

    34x4: 120, 136
11. Son limitados, en el sentido de que no pueden aplicarse a las operaciones de dificultad mayor, tales como 269x23. Sin embargo son útiles para un mayor abanico de problemas del que una observación casual del trabajo numérico en una escuela pudiera llevarnos a pensar.

Es bastante evidente que los métodos mentales son los únicos a fomentar si se desea el uso y desarrollo de la comprensión del número por parte de los niños, y cualquier enseñanza de los mismos habría de ir, obviamente, acompañada de otros medios para conseguir ese fin. Habría de aceptarse que los niños no serían capaces de realizar cálculos antes de tener una idea somera al menos de lo que está pasando. Por lo tanto habría de proveerles de caminos alternativos para enfrentarse a cálculos complejos. Y un profesor de esta clase esperaría un cierto grado de independencia e individualismo en sus alumnos.

Así pues, los profesores, las escuelas o la sociedad han hecho su elección a favor de estos métodos, los cuales pueden ser enseñados, y la elección ha podido hacerse sobre la base de los objetivos previamente determinados sobre numeración en educación. O los algoritmos escritos estándar por la eficacia y el orden y porque es lo que se ha enseñado durante 100 años, o los algoritmos mentales por la independencia y comprensión y porque son los métodos que la gente realmente usa. O ambos: "Ah, los algoritmos mentales están muy bien, pero se deben enseñar los métodos estándar tarde o temprano, ¿no?" ¿Se deben?

Un espectro del cálculo

Para discutir qué debemos enseñar nos ayuda echar una mirada al tipo de cálculos que podemos hacer con números. Es fácil incluir "las cuatro reglas" como destreza básica para todos los ciudadanos sin considerar exactamente a dónde nos lleva eso. La aplicabilidad general de los algoritmos estándar nos hace olvidar la enorme amplitud del espectro (ver diagrama). Por conveniencia, he decidido dividir la tipología en cinco columnas. Están aproximadamente en orden decreciente de uso, y sospecho que la relación es un exponente negativo. (¿Cuándo necesitaste hacer una multiplicación larga por última vez, fuera de tu trabajo profesional?). No es necesario decir que el orden es también de dificultad creciente. Esto es muy conveniente; las operaciones que más usamos son las más fáciles. También nos daría la ocasión de hacer una pausa antes de gastar un montón de energía en los procesos de enseñanza que luego van a usarse muy poco. (Ver Moore y Williams para gráficos de frecuencia de uso de algunas operaciones).

Rojo	Naranja	Amarillo	Verde	Azul
5+9	**135+100**	**139+28**	**592+276**	**3964+7123**
13-8	**85-20**	**83-26**	**592-276**	**5960-4918**
4x7	**5x30**	**17x3**	**931x8**	**931x768**
35:5	**90:3**	**72:4**	**693:7**	**8391:57**

He puesto algunas operaciones típicas en cada columna, pero no he querido hacer distinciones muy precisas. En términos generales las descripciones de las columnas son éstas:
Columna roja: Esta es la única claramente definida y contiene valores numéricos hasta 10+10 y 10x10, y sus inversos. Es altamente deseable tener todos estos hechos prestos para el recuerdo instantáneo.
Columna naranja: Estas son sumas, restas, multiplicaciones y divisiones brutales, con un dígito seguido de ceros y con las cuales cualquier cosa puede suceder. Todas ellas pueden hacerse con un sólo paso de proceso mental, dado por supuesto el conocimiento de los resultados en la banda roja. Es para este tipo de operaciones para las que uno ve que los algoritmos escritos estándar se aplican inadecuadamente.
Columna amarilla: Esta cubre el tipo de operaciones para las cuales los métodos mentales son enteramente adecuados. La persona de la calle, supuesto un contexto práctico como motivación, las haría de memoria. Del mismo modo pueden hacerlas niños normales de 11 años, si se les motiva. Es por las operaciones de esta columna por lo que uno ve la disfunción entre el ámbito de los números escritos y el de los números hablados.
Columna verde: Estas pueden hacerse mentalmente, pero sólo unas pocas personas podrían o necesitarían hacerlas.
Columna azul: En una situación práctica resultaría absurdo usar un proceso mental para estas. Si se tiene una calculadora a mano, resultaría igualmente absurdo usar los métodos escritos.

Propuesta

Creo que las razones para enseñar los algoritmos escritos estándar están pasadas de moda, y que ya es hora de que lo digamos. Creo que hay un lugar para los algoritmos mentales, para el uso de las calculadoras y para los métodos escritos no estándar. Creo que ahora se gasta demasiado tiempo en enseñar y aprender los algoritmos estándar y que los resultados más comunes son la frustración, la infelicidad y el deterioro de las actitudes hacia las matemáticas.

En cambio yo propongo, por consideración y crítica, un modelo alternativo para la enseñanza de la aritmética elemental. Muy a grosso modo, los niños, tienen que atravesar tres fases, progresando de acuerdo con sus habilidades:

Fase1. La adquisición de técnicas mentales para las operaciones de las columnas roja, naranja y amarilla.

Fase 2. El uso de las calculadoras para las operaciones verdes y azules.

Fase 3. El desarrollo de algunos métodos escritos no sistemáticos.

He de hacer notar que me estoy refiriendo sólo a un aspecto de las matemáticas de los niños. Las operaciones son solamente una parte del trabajo con números, y los números solamente una parte de las matemáticas.

Quisiera profundizar un poco más en las tres fases (particularmente en la primera) pero está claro que no puedo dar nada más que una idea somera. No hago referencia a la edad de los niños, puesto que la edad a la que se puede comenzar a entender un aspecto dado del trabajo con números es muy variable.

FASE 1

Imagino que habrá poco que discutir respecto a que las operaciones de las columnas roja y naranja deberían hacerse de memoria. No obstante, es importante recordar que a los niños les lleva cierto tiempo apreciar hechos como 47+10=57 y 13x10=130. Es la medida de la utilidad y el poder de nuestro sistema de valores según el lugar que el número ocupe. Es también un indicador de la naturaleza de los problemas de los niños: si no están seguros en puntos como estos, menos lo habrán de estar en operaciones como 47+16, ó 13x12.

Han de recalcarse dos formas de comprensión en esta fase. Primero la comprensión de los números y del sistema de valores según el lugar que ocupe. Una herramienta que no tiene valor para esto es la línea numérica. Esta versión suele encontrarse en las clases infantiles:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20

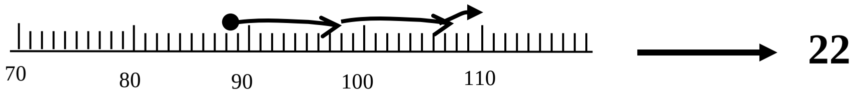
pero para números mayores ha de enfatizarse la estructura del valor según el lugar:

0 ....10 .... 20 ....30 .... 40 50

Para mayores extensiones, cientos, millares, tracciones y números negativos no es tampoco posible su uso. Utilizar estas líneas numéricas puede ayudar a dar a los niños una personal y somera imagen de los números (y de cómo se relacionan entre sí) que creo que normalmente se olvida. Pareciera como si los matemáticos tuvieran permanentemente la imagen de una línea numérica en su cabeza, y quisieran que a los niños les pasara igual.

La otra parte de comprensión es la del significado y naturaleza de las cuatro operaciones: que la multiplicación e*s* una suma repetida; que la división es una resta repetida y el opuesto de la multiplicación; que la resta "quitar" y, quizá lo más importante, "y cuántas". Este último punto parece no tener particularmente importancia. Ambos tipos de restas, las largas y las cortas, tienen más sentido en términos de adición complementaria: ¿cómo se resuelven 15-8 y 311-275?

Supuestas la comprensión y soltura en la resolución de las operaciones de las columnas roja y naranja, y algún tipo de sistema personal de representación de los números, los niños tendrían pocas dificultades para desarrollar métodos tendentes a la resolución de los problemas de la columna amarilla. Los algoritmos mentales normales parecen estar basados en la enumeración seriada, como en 47+34: 47, 57, 67, 77, 81; o en una aproximación sucesiva, como en 17x4: 20x4=80, 76, 72, 68; o en algún icono del tipo de una línea numérica: 110-88:



Es perfectamente posible que estos métodos sean recordados, y hacerlo puede ayudar a los niños a ser conscientes de sus operaciones mentales. Si se permite un sistema libre de registro, los tienen menos posibilidades de desarrollar todas aquellas inhibiciones más comunes sobre la expresión de sus pensamientos matemáticos, según van cogiendo más confianza en sí mismos utilizarán menos los sistemas escritos. El objetivo es un proceso interno que sea comprensible, más que uno externo que no lo sea.

FASE 2.

La comprensión de los números grandes es un preliminar necesario para usarlos en las operaciones de las columnas verde y azul. Si esto se da, junto con la comprensión de los métodos mentales para las columnas anteriores, los niños serán capaces, casi con seguridad, de hacer un uso consciente de las calculadoras para los problemas más difíciles. Su comprensión personal del número haría muy poco probable la pregunta: " ¿Es una suma, señor?", y presionar la tecla equivocada. Serán capaces de utilizar las operaciones de la columna naranja para comprobar por reducción al absurdo las respuestas de la máquina.
Se sentirán complacidos al observar que sus respuestas a problemas más simples están de acuerdo con las de la calculadora. No habrá disfunción entre su ámbito hablado y el ámbito de la calculadora. La calculadora le dará sentido.

FASE 3

Las operaciones con dinero son bastante raras, ya que algunas veces es necesario trabajar con 4 ó 5 números, una exactitud que raras veces tiene sentido en otras áreas. Pero las operaciones con dinero son las más frecuentemente usadas por la gente de la calle, así que es necesario dotar a la gente de formas de sumar o restar números como 54175 y 32180 cuando no tienen a mano una calculadota. Los métodos escritos no estándar para resolverlas pueden ser adaptados por los niños y los profesores a partir de los algoritmos mentales usados para números más manejables. Por ejemplo, la suma puede realizarse fácil y cómodamente desde la izquierda:

$$\begin{array}{r} 54.75 \\ +\ 32.80 \\ \hline 8\cancel{6}^{7}.55 \end{array}$$

La resta como suma complementaria se puede registrar de varias maneras, por ejemplo:

32.80	
42.80	10
52.80	20
54.80	22
54.75	21.95

Una persona que ha tenido que hacer un montón de operaciones de este tipo desarrollará pronto sistemas abreviados que satisfagan sus necesidades. He aquí un método no estándar para una multiplicación larga:

	20	3
10	200	30
8	160	24
		414

Esta nos nuestra cuánto puede ayudar un diagrama. Lo más importante es que es un proceso que el usuario entiende, más que uno más estandarizado o más rápido**.**

Una gran oportunidad

La generalización de las calculadoras nos ha provisto de una gran oportunidad. Nos ha liberado de la necesidad de dotar a cada ciudadano de métodos para resolver operaciones de complejidad indefinida. De esta forma podemos abandonar los algoritmos escritos estándar, de aplicabilidad general e intelectibilidad limitada, en favor de métodos más acordes con las miras y propósitos de los usuarios. Pienso que hasta ahora este punto no ha sido considerado suficientemente. En su estimulante, y por otro lado excelente, artículo, Michael Girling escribe: "Los métodos más refinados para las divisiones largas, por ejemplo.... no necesitan ser enseñados" ¿Por qué enseñar métodos "refinados"? Solo los necesitarían las personas que tienen que hacer un montón de operaciones, y para esas personas la calculadora es mejor ayuda que el lápiz y el papel.

Una dificultad que surge al invocar un programa como este es la confusión general entre "concepto" y "algoritmo". La argumentación parte de la premisa aceptable de que los niños deben aprender a calcular y se llega a la conclusión de que se deben enseñar los algoritmos estándar. Las calculadoras pueden ser vistas entonces como peligros en las escuelas. El énfasis se debe hacer en el otro fin del argumento. Los niños han de ser ayudados a adquirir métodos de cálculo asequibles, y para la mayoría de las operaciones con que podamos toparnos en nuestra vida diaria, éstos han de ser métodos mentales. La enseñanza de técnicas mentales no quiere decir que los niños hagan menos operaciones en la escuela; probablemente harán más. Y lo que es más importante, los niños adquirirán una mejor comprensión del número a partir del uso de sus propios algoritmos mentales, que de la aplicación repetitiva de los algoritmos estándar que no pueden comprender. Con los métodos mentales ocupando el lugar que les corresponde como principal medio para la resolución de operaciones simples, la posición de las calculadoras es clara. Son un instrumento útil para las operaciones complejas, el complemento ideal para la aritmética mental.