MATEMÁTICAS ADICIONALES
4047/01
Octubre/Noviembre 2015
2 horas-Parte 1

Conteste **todas** las preguntas

1. Se define la función f, para todos los valores de x, como

$$f(x) = x^2(1 - x)$$

Determine los valores de x para los que f es una función creciente.

[3]

2. La gráfica de $y = log_a\, x$ pasa por los puntos de coordenadas $(8, 3)$, $(1, b)$ y $(c, -2)$.

   a) Determine el valor de las constantes a, b y c

   [3]

   b) Dibuje la gráfica de $y = log_a\, x$.

   [2]

3. El número de bacterias en un cultivo se duplica cada 3 horas. Sabemos que N_0 es el número de bacterias en un instante incial y que N es el número de bacterias cuando han transcurrido t horas desde entonces. Calcule el valor de la constante k en la relación $N = N_0 \cdot e^{kt}$.

[4]

4. *a*) Sabiendo que ax^2+6x+x es siempre negativo, ¿qué condiciones deben cumplir las constantes a y c?

   [3]

   b) Indique un ejemplo de valores para a y c que satisfagan las condiciones del apartado anterior.

   [2]

5. *a*) Represente gráficamente la parábola $y^2 = 4x$.

   [2]

   La recta $y = x - 1$ interseca a la parábola en los puntos A y B.

   b) Demostrar que el punto medio de AB se encuentra en la recta $x + y = 5$

   [5]

6. Dada $f(x) = 4cos^2\, x - 2sen^2\, x$

   a) exprese $f(x)$ en la forma $acos\; 2x + b$, determinando el valor de cada uno de los enteros a y b.

   [3]

   b) determine los máximos y mínimos de $f(x)$.

   [2]

   c) determine el período y amplitud de $f(x)$.

   [2]

7. *a*) Represente gráficamente $y = |2x - 4|$.

   [2]

   Una recta de pendiente m pasa por el punto $(0, -1)$.

b) En el caso en el que $m = 3$, calcule las coordenadas de los puntos de intersección de la recta y la gráfica de $y = |2x - 4|$.

[3]

c) Determine el conjunto de valores de m para los que la recta corta la gráfica de $y = |2x - 4|$ en dos puntos.

[2]

8. *a*) Demostrar que $4tan\ \theta + 2cot\ \theta = 5sec\ \theta$ puede expresarse como $2sen^2\ \theta - 5sen\ \theta + 2 = 0$.

[3]

b) Resolver la ecuación $4tan\ 2x + 2cot\ 2x = 5sec\ 2x$ para $0^o < x < 360^o$ usando el apartado anterior.

[4]

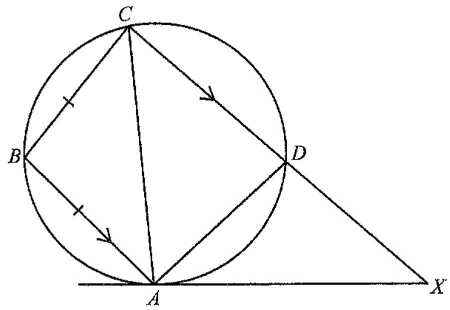
9. En la figura, $ABCD$ es un cuadrilátero cíclico en el que $BA = BC$ y BA es paralelo a CD. La tangente al círculo en A se interseca con CD en X.

a) Demuestre que el ángulo DAX es igual que el ángulo BCA.

[4]

b) Demuestre que el triángulo ADXe es isósceles.

[3]



10. Un tren que circula por una tramo recto pasa por una señal X con velocidad 30 m/s y, 20 segundos después, pasa por otra señal Y con velocidad 10 m/s. Durante el trayecto de X a Y la aceleración, $a\ m/s^2$, del tren viene dada por $a = kt - 2$, donde k es una constante y t segundos es el tiempo transcurrido desde que pasa por la señal X.

a) Demostrar que $k = 0{,}1$

[5]

b) Calcular la distancia entre las señales X e Y.

[4]

11. En la figura se muestra la sección vertical $PQRS$ de un canal abierto hecho de láminas de plástico. Las longitudes de PQ, QR y RS sonde 20 cm, 30 cm y 20 cm respectivamente. El canal se apoya en QR en el suelo horizontal y tanto PQ como RS tienen un ángulo de inclinación de θ radianes respecto al suelo.

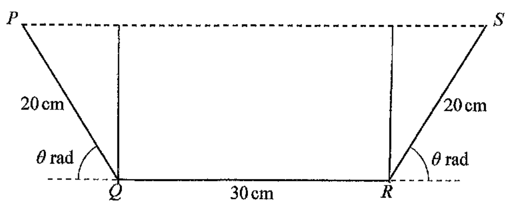
a) Demuestre que el área, $A\ cm^2$, de la sección vertical $PQRS$ viene dada por

$$A = 600sen\ \theta + 200sen\ 2\theta$$

[4]

b) Suponiendo que el ángulo θ es variable, calcule el valor de θ para el que el canal puede contener la mayor cantidad de agua.

[5]

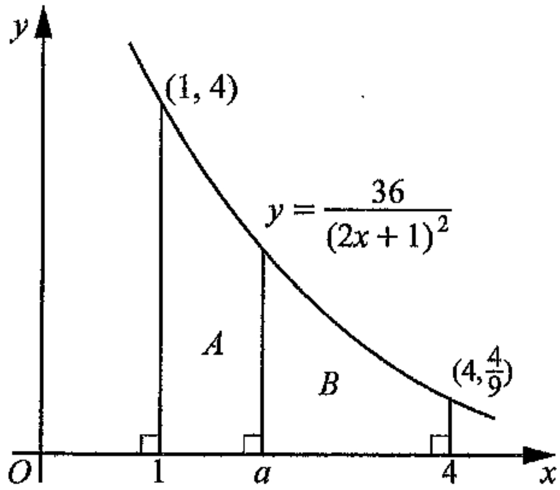


12. La ecuación de una curva es $y = \dfrac{36}{(2x+1)^2}$.

a) Un punto P se mueve sobre la curva de modo que la coordenada x de P aumenta de forma constante a razón de 0.02 unidades por segundo. Calcule la coordenada x de P en el instante em que la coordenada y decrece a razón de 0.36 unidades por segundo.

[5]

b) La figura muestra parte de la curva $y = \dfrac{36}{(2x+1)^2}$ cuando pasa por los puntos de coordenadas $(1, 4)$ y $\left(4, \dfrac{4}{9}\right)$. También se muestran las lineas perpendiculares a los puntos de coordenadas 1, a y 4.



Sabiendo que las áreas de las regiones A y B son iguales, determine el valor de la constante a.

[5]