MATEMÁTICAS ADICIONALES
4047/02
Octubre/Noviembre 2015
2 horas 30 minutos-Parte 2

Conteste **todas** las preguntas

1. La curva $y = f(x)$ es tal que $f'(x) = 2e^x + e^{-2x}$.

   a) Explique por qué la curva $y = f(x)$ no tiene puntos singulares. [2]

   b) Sabiendo que la curva pasa por el punto $(0, 2)$, encuentre la expresión de $f(x)$ [4]

2. *a*) Demostrar que $\dfrac{d}{dx}(ln\ (cos\ x)) = -tan\ x$. [2]

   b) Derivar $xtan\ x$ respecto a x. [2]

   c) Usando los resultados de los apartados anteriores, calcular $\int xsec^2x\ dx$ y de este modo demostrar que

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} xsec^2x\ dx = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}ln\ 2$$

[4]

3. La ecuación de una curva es $y = -x^2 + 4x - 6$. La coordenada x del punto P de la curva es 1. La tangente a la curva en P corta al eje x en A y al eje y en B.

   a) Calcula el área del triángulo AOB, donde O es el origen. [6]

   El punto Q también pertenece a la curva. La normal a la curva en Q es paralela a la tangente a la curva en P.

   b) Calcula las coordenadas de Q. [3]

4. *a*) 1) Escriba y simplifique los 4 primeros términos del desarrollo de $(1 + x)^9$ en orden de potencias crecientes de x. [2]

   2) Sustituyendo x por $z - z^2$, determine el coeficiente de z^3 en el desarrollo de $\left((1 + x - z^2\right)^9$. [3]

   b) 1) Escriba el término general en el desarrollo del binomio $\left(2x + \dfrac{1}{3x^3}\right)^{10}$. [1]

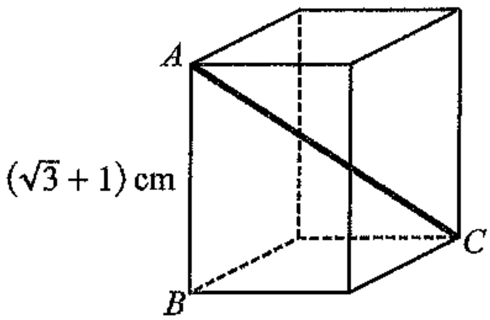
   2) Escriba la potencia de x en ese término general. [1]

   3) Usando los resultados anteriores, o de otro modo, determine el coeficiente de x^2 en el desarrollo de $\left(2x + \dfrac{1}{3x^3}\right)^{10}$. [2]

5. **No se permite el uso de la calculadora en este ejercicio**

   a) Exprese $\dfrac{11\sqrt{3}}{2\sqrt{3}+1}$ en la forma $a + b\sqrt{3}$, donde a y b son números enteros.

   [2]



   La figura muestra un paralelepípedo de base cuadrada. La altura AB del paralelepípedo es $\sqrt{3}+1$ cm. Sabiendo que la longitud de la diagonal AC es $\dfrac{11\sqrt{3}}{2\sqrt{3}+1}$ cm,

   b) calcule una expresión para BC^2 en la forma $c + d\sqrt{3}$, donde c y d son enteros.

   [3]

   c) exprese el volumen del paralelepípedo en la forma $\dfrac{7}{2}\left(3\sqrt{3}+k\right)$ cm^3, donde k es un entero.

   [4]

6. La ecuación de una curva es $y = \dfrac{2x^2}{x-1}$.

   a) Encuentre una expresión para $\dfrac{dy}{dx}$ y obtenga las coordenadas de los puntos singulares de la curva.

   [5]

   b) Encuentre una expresión para $\dfrac{d^2y}{dx}$ y con ella determine de qué tipo son dichos puntos.

   [4]

7. Las partes positivas de los ejes x e y son tangentes a un círculo C.

   a) ¿Qué podemos afirmar respecto a las coordenadas del centro de C?

   [1]

   La recta T es tangente a C en el punto $(9, 8)$ del círculo. Sabiendo que el centro de C se encuentra por debajo y a la izquierda de $(9, 8)$, encuentre

   b) la ecuación de C.

   [5]

   c) la ecuación de T.

   [3]

8. $a)$ Calcule el resto cuando dividimos $2x^3 - 3x^2 - 5$ entre $2x + 1$.

[2]

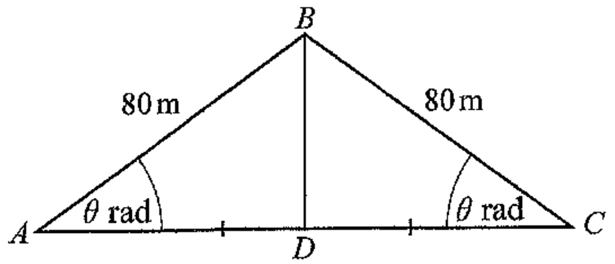
$b)$ Factorize completamente el polinomio cúbico $2x^3 - 3x^2 + 1$.

[3]

$c)$ Exprese $\dfrac{4 - 5x - 8x^2}{2x^3 - 3x^2 + 1}$ como la suma de 3 fracciones parciales.

[4]

9. Un granjero valla una parte de su terrero. Pone una valla alrededor del perímetro del campo rectangular ABC y también de B a D, donde D es el punto medio de AC. Ángulo BAC = Ángulo $BCA = \theta$ radianes y las longitudes de AB y BC son 80 m.



$a)$ Probar que L m, la longitud de la valla necesaria, puede ser expresada en la forma $p + q sen\ \theta + r cos\ \theta$, donde p ,q y r son constantes a determinar.

[3]

$b)$ Exprese L en la forma $p + Rsen\ (\theta + \alpha)$, donde $R > 0$ y α es un ángulo agudo.

[4]

$c)$ Sabiendo que el granjero usa exactamente 310 m de valla, calcule el valor de θ

[3]

10. Las raíces de la ecuación de segundo grado $2x^2 - 6x + 5 = 0$ son α y β.

$a)$ Calcule el valor de $\alpha^2 + \beta^2$.

[3]

$b)$ Demostrar que el valor de $\alpha^3 + \beta^3$ es $\dfrac{9}{2}$.

[2]

$c)$ Encuentre una ecuación de segundo grado cuyas raíces sean $\alpha^2 + \beta$ y $\alpha + \beta^2$.

[5]

11. Un cuboide de volumen V cm^3 tiene una altura de x cm y una base rectangular de área $(px^2 + q)$ cm^2. Los valores correspondientes para x y V se muestran en la siguiente tabla:

x	5	10	15	20
V	175	650	1725	3700

$a)$ Usando las variables adecuadas, dibuje, en papel milimetrado, una línea recta y de este modo estime el valor de cada constante p y q.

[6]

$b)$ Usando los valores obtenidos de p y q, calcule el valor de x para el que el cuboide es un cubo.

[2]

$c)$ Explique como otra línea recta dibujada en su diagrama puede llevar a estimar el valor de x para el que el cuboide es un cubo. Dibuje esta recta y verifique el valor calculado en el apartado anterior.

[3]