Matemáticas I

24 de octubre de 2016

Apellidos: ______________________ Nombre: ______________________

Importante

- No se puede usar calculadora.
- Contesta las cuestiones en el espacio reservado para ello. Las cuentas las debéis hacer en papel en sucio. Aquí debéis escribir un resumen de las cuentas y, sobre todo, **el razonamiento utilizado**.
- No se pueden usar métodos algebraicos (ecuaciones), excepto en la pregunta 5.
- Puntuacion: preguntas 1 a 7: 1 punto. Preguntas 8 a 10: 2 puntos.

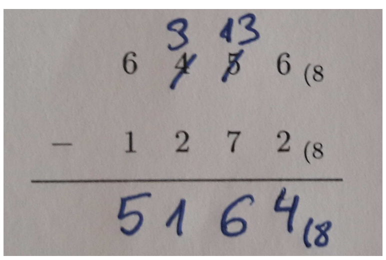
1. Escribe en base 10 los números que en base 5 se escriben $23X41_{(5}$ (el tercer dígito es desconocido).

$23X41_{(5} = 2 \times 5^4 + 3 \times 5^3 + X \times 5^2 + 4 \times 5 + 1 = 1250 + 225 + 20‘ + 1 + X \times 25 = 1496 + X \times 25$

$X = 0 \quad \rightarrow \quad 1646 \qquad X = 1 \quad \rightarrow \quad 1671 \qquad X = 2 \quad \rightarrow \quad 1696$

$X = 3 \quad \rightarrow \quad 1721 \qquad X = 4 \quad \rightarrow \quad 1746$

2. Calcula el resultado de la siguiente resta, explicando con detalle **el significado** de los reagrupamientos (llevadas) necesarios.



En la posición de los grupos de 8 no podemos quitar 7 de los 3 grupos de 8 del minuendo. Para arreglar este problema, cogemos un grupo de 8^2 (de la posición de los grupos de 8, donde había 4, por tanto quedan 3) y lo pasamos a la posición de los grupos de 8. Como un grupo de 8^2 son 8 grupos de 8, ahora tendremos $5 + 8 = 13$ grupos de 8. No son necesarios más reagrupamientos (llevadas) en la operación.

3. Sabiendo que $41267 = 723 \times 57 + 56$, calcula el cociente y el resto que resultan al dividir 412678 entre 57, sin hacer la división. Explica el procedimiento utilizado.

$412678 = 10 \times 41267 + 8$. Multiplicando por 10 la igualdad del enunciado, tenemos

$412670 = 10 \times (723 \times 57 + 56) = 7230 \times 57 + 560$.

Por tanto, sumando 8 a los dos términos de esta igualdad, $412678 = 7230 \times 57 + 568$.

Como el resto debe ser menor de 57, para terminar solo necesitamos hacer esta pequeña división: $568 = 9 \times 57 + 55$, y concluimos que $412678 = 7239 \times 57 + 55$.

Es decir, el cociente es 7239 y el resto es 55.

4. Las figuras de la serie están formadas por cerillas (la primera tiene 3 cerillas).

   a) ¿Cuántas cerillas tiene la quinta figura de la serie?

   b) ¿Y la décima?

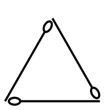


Fig 1

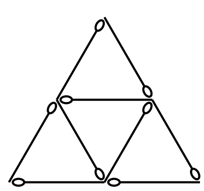


Fig 2

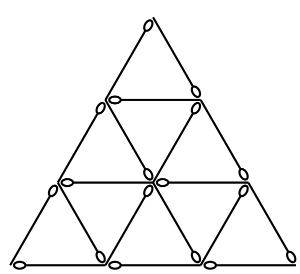


Fig 3

La figura k se obtiene añadiendo k triángulos a la anterior (la figura 2, añadiendo 2 triángulos a la figura 1, etc).

Por tanto, la figura 2 tiene $3+6=3\times(1+2)=9$ cerillas.

La figura 4 tiene $3+6+9+12=3\times(1+2+3+4)=30$ cerillas.

La figura 5 tiene $3+6+9+12+15=3\times(1+2+3+4+5)=45$ cerillas.

La figura 10 tiene $3+6+9+12+15+18+21+24+27+30=3\times(1+2+3+4+5+6+7+8+9+10)$ $=165$ cerillas.

5. Demuestra que la suma de tres múltiplos de 4 consecutivos es siempre múltiplo de 12.

   Un múltiplo de 4 se escribe $4n$ y los siguientes son $4n+4$ y $4n+8$. Por tanto, la suma será

   $4n+(4n+4)+(4n+8)=12n+12=12\times(n+1)$ que es múltiplo de 12

6. Explica cómo se puede calcular el resto de dividir 239 718 843 125 entre 8 sin necesidad de hacer la división. Explica **por qué** funciona tu procedimiento.

   1000 es múltiplo de 8 (porque $125\times 8=1000$). Por tanto, si hacemos

   $239\,718\,843\,125=239\,718\,843\,000+125$, se tiene que $r(239\,718\,843\,125,8)=r(125,8)=5$.

7. Encuentra un número n tal que $\mathrm{mcd}(34,n)=2$ y $\mathrm{mcm}(34,n)=238$.

   Veamos dos formas de contestar a esta pregunta:

   a) Sabemos que $34\times n=\mathrm{mcd}(34,n)\times\mathrm{mcm}(34,n)$. Por tanto, $n=\dfrac{2\times 238}{34}=14$.

   b) Factorizando, $34=2\times 17$, $238=2\times 7\times 17$. Como el máximo común divisor es el factor común, y es 2, y el mínimo común múltiplo el producto de todos los factores (no hay exponentes distintos), la única posibilidad es $n=2\times 7=14$.

8. A las 12 del mediodía sale un coche desde la ciudad A hacia B, y hace el viaje a una velocidad de 120 km/h. Media hora más tarde sale desde B hacia A un camión, que viaja a 80 km/h. Si la distancia entre A y B es de 600 km, ¿a qué hora se encuentran los vehículos? Debes dar el resultado en horas, minutos y segundos.

   Vamos a empezar a contar el tiempo a las 12:30, cuando el coche ha recorrido 60 km y por tanto la distancia entre los vehículos es de 540 km.

   Como cada hora recorren entre los dos $120+80=200$ km, tardarán $540\div 200=2{,}7$ horas en encontrarse (a partir de las 12:30).

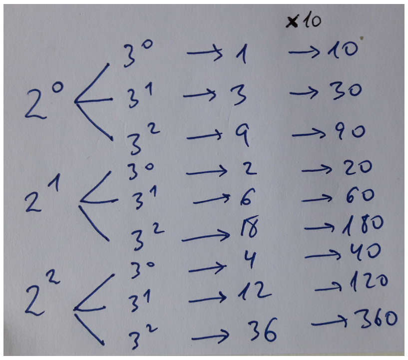
   Como 2,7 h son 2 h y 42 minutos, se encuentran a las 3 h y 12 min.

9. Sabiendo que $126\,000=2^4\times 3^2\times 5^3\times 7$ y que $35\,640=2^3\times 3^4\times 5\times 11$,

   a) ¿cuántos divisores comunes tienen los números 126 000 y 35 640?

   Sabemos que los divisores comunes de dos (o más) números son los divisores de su máximo común divisor.
   A partir de las factorizaciones tenemos que $\mathrm{mcd}(126\,000,35\,640)=2^3\times 3^2\times 5$. Como $2^3\times 3^2\times 5$ tiene $4\times 3\times 2=24$ divisores (la justuficación de esta fórmula la hemos visto muchas veces), ese es el número pedido de divisores comunes de los números 126 000 y 35 640.

b) escribe los divisores comunes que terminen en 0.



Que un número termine en 0 es equivalente a que sea múltiplo de 10, es decir, que aparezca 2×5 en su factorización. Por tanto, debemos combinar los factores 2^2 y 3^2 de todas las formas posibles, como en el árbol.

10. Considera las siguientes series:

(1): `a e i o u x z a e i o u x z a e i o u x z a e i o u x z a e i o u x z`

(2): `b c d f g h j k l m n p q z b c d f g h j k l m n p q z b c d f g h j k l m n p q z`

a) ¿Cuántas coincidencias de la letra `z` hay en las 1 000 primeras posiciones?

En la primera serie la letra z aparece en las posiciones que son múltiplo de 7, y en la segunda en los múltiplos de 14. Por tanto, coincidirán en los múltiplos comunes de 7 y 14, que son los múltiplos de 14.

Como $1000 = 71 \times 14 + 6$, coincidirán 71 veces.

b) Si empezamos a buscar una coincidencia a partir de la posición 10 000, ¿en qué lugar la encontraremos?

Ya sabemos que coinciden en los múltiplos de 14.

Como $10000 = 714 \times 14 + 4$, habrán coincidido en la posición 9996, y por tanto coincidirán de nuevo en la posición $9996 + 14 = 10010$.