Matemáticas I

Doble Grado Humanidades y Magisterio
Grado en Magisterio de Educación Primaria
Universidad de Alcalá.

Juan Gerardo Alcázar
Pedro Ramos

Índice general

Capítulo 1

Los números naturales.

1.1. Números naturales. Sistemas de numeración.

Los **números naturales** son 1, 2, 3, 4, etc. Estos son los primeros números que hemos aprendido todos, e históricamente, los primeros que surgieron; se trata de las cantidades que podemos contar utilizando los dedos de nuestras manos (varias veces, si el número es mayor de 10). El conjunto de todos los números naturales se representa por $\mathbb{N}$,

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}.$$

Como la secuencia de números naturales no se agota, porque a cualquier lista de números naturales siempre podemos añadir uno más, decimos que $\mathbb{N}$ es *infinito.*

Estos números aparecieron por la necesidad de "contar", es decir, de evaluar el tamaño de un conjunto de objetos. Es importante distinguir la diferencia entre el concepto de número y su representación oral o escrita. Todas las culturas que desarrollaron un lenguaje han tenido palabras para los primeros números naturales. Sin embargo, en cuanto los números empiezan a crecer, resulta evidente que no es conveniente utilizar una palabra – o un símbolo – distinta para cada número. Surge así el problema de la representación de los números: los sistemas numéricos. La mejor forma de valorar adecuadamente la importancia de nuestro sistema numérico actual es repasar, al menos de forma rápida, el largo camino recorrido por la humanidad hasta dar con él. Los sistemas numéricos se pueden clasificar en tres grandes familias, que en orden histórico (y de complejidad) son los sistemas aditivos, los aditivo-multiplicativos y los multiplicativos.

1.1.1. Sistemas aditivos.

En los sistemas aditivos, el valor del número se determina sumando los valores de los símbolos que lo componen. El ejemplo más sencillo, y también el método más intuitivo para representar cantidades pequeñas, es el sistema que se utilizaba en Mesopotamia, donde cada número se representaba a partir de marcas (ver Fig. 1.1); este sistema sigue siendo útil, en la actualidad, para realizar recuentos, por ejemplo. El sistema funciona bien para cantidades pequeñas, pero obviamente el número de marcas a utilizar es excesivo incluso para una cantidad como 20.

Una posible mejora de esta idea es utilizar símbolos específicos para determinadas cantidades. Por ejemplo, en el sistema de numeración babilonio, a la hora de representar los 60 primeros números se utilizaba un símbolo especial para el 10 (ver Fig. 1.2); a partir de 60 la cosa cambiaba, como veremos más adelante, porque su sistema era *sexagesimal.*

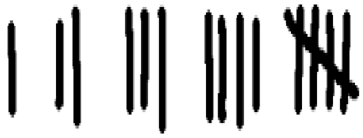


Figura 1.1: Sistema de marcas utilizado en Mesopotamia.

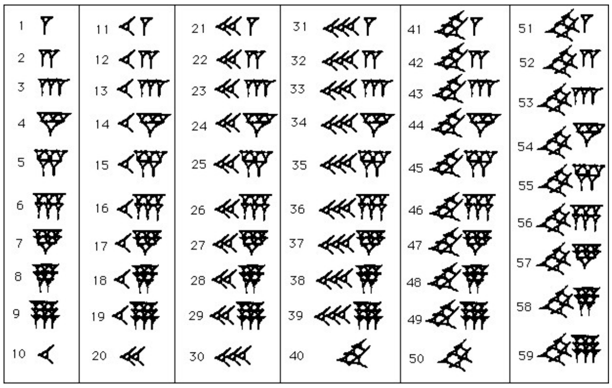


Figura 1.2: Primeros 60 números naturales en Babilonia. La imagen está tomada del blog https://conlamenteabierta.files.wordpress.com/2009/11

Sin embargo los babilonios no utilizaban demasiados símbolos. En el sistema de numeración egipcio, que también era decimal, como el nuestro, aparecen más símbolos (ver Fig. 1.3).

Figura 1.3: Símbolos en el sistema de numeración egipcio; tomado de http://mathcs.slu.edu/history-of-math/.

Otros sistemas de numeración en los que se da la sustitución de cantidades por símbolos son el griego y el romano, bien conocido por todos, que a su vez está basado en el sistema de numeración griego. Todos estos sistemas tienen el mismo problema: funcionan razonablemente bien para cantidades pequeñas, y empiezan a volverse complicados con cantidades más grandes. Además, la aritmética con estos sistemas de numeración es complicada, como cualquier lector puede comprobar sin más que intentar una sencilla multiplicación usando números romanos. Una primera solución aparece con el siguiente tipo de sistemas de numeración.

1.1.2. Sistemas aditivo-multiplicativos.

La idea de estos sistemas es la siguiente: el número se ve como una suma, donde cada sumando es el producto de un número pequeño por otro. Dicho de otro modo, lo fundamental es que *si hay que repetir varias veces un número, ello se indica con otro número.* Sería el equivalente a escribir *doscientos treinta y cuatro* como

$$2 \cdot 100 + 3 \cdot 10 + 4.$$

Se dice que el sistema es *híbrido*, o *aditivo-multiplicativo.* Un buen ejemplo de este sistema es el sistema chino clásico (hoy día en China también utilizan el sistema decimal de notación posicional); la idea puede verse en Fig. 1.4, y Fig. 1.5. Cuando recorremos el número de izquierda a derecha, cada símbolo que encontramos debe multiplicarse por el que está inmediatamente a su derecha; el valor final del número se obtiene al sumar los resultados de todas esas multiplicaciones.

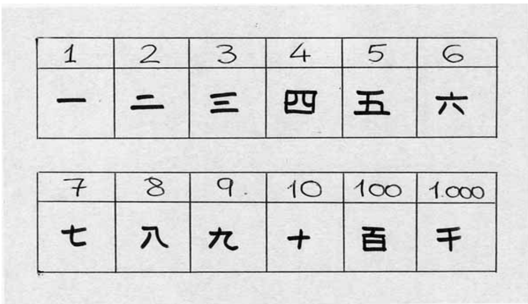


Figura 1.4: Principales símbolos en el sistema chino. Tomada de http://personal.us.es/cmaza/china/numeracion.htm

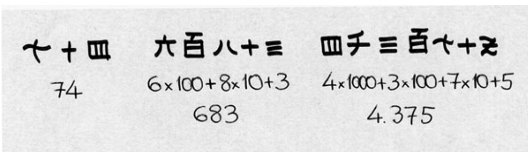


Figura 1.5: Carácter híbrido (aditivo-multiplicativo) del sistema chino. Tomada de http://personal.us.es/cmaza/china/numeracion.htm

Dos observaciones simples permiten simplificar este sistema, para dar lugar a nuestro sistema actual: (1) las cantidades por las que vamos a multiplicar cada uno de los dígitos van a ser potencias de una cierta cantidad, que llamamos *base* del sistema; por ejemplo, si elegimos que esa base sea 10, como es nuestro caso, multiplicaremos los dígitos por 10, 100, 1000, etc. (2) No hace falta escribir la cantidad por la que hay que multiplicar cada dígito, porque ésta depende exclusivamente de la *posición* del dígito: el cuarto dígito (empezando por la derecha) habrá que multiplicarlo por $1000 = 10^3$, el tercero por $100 = 10^2$, el segundo por $10 = 10^1$; si el número consta de 543 dígitos, el que ocupa el lugar 467 debería multiplicarse por 10^{466}!!!

1.1.3. Sistemas multiplicativos.

Según hemos descrito en el párrafo anterior, en este tipo de sistemas cada dígito tiene un valor diferente según la posición que ocupe; además, (ojo que ahora viene algo de notación algebraica) el valor del dígito que ocupa la posición n-ésima se obtiene al multiplicar dicho dígito por b^{n-1}, donde b es la *base* del sistema. El valor del número es la suma de los valores de todos los dígitos.

Nuestro sistema, como el egipcio, el griego, el romano o el chino, es decimal, es decir, $b = 10$. Sin embargo, el sistema multiplicativo más antiguo que se conoce es el babilónico, del que antes hemos hablado brevemente. Dijimos entonces que hasta 60 se utilizaba un sistema aditivo, pero que después la cosa cambiaba. La razón es que el sistema babilónico era *sexagesimal*, es decir, para ellos

$$4232 = 3600 + 600 + 32 = 1 \cdot 60^2 + 10 \cdot 60^1 + 32,$$

aunque en Babilonia no se utilizaban los dígitos 1, 2, etc., sino símbolos cuneiformes como los que aparecen en Fig. 1.2. La teoría más comúnmente aceptada para explicar por qué los babilonios eligieron 60 como base de su sistema de numeración está relacionada con buenas propiedades de divisibilidad de 60 que estudiaremos más adelante. Podemos ver reminiscencias del sistema sexagesimal en nuestras unidades para la medición del tiempo, y en las unidades angulares de medida (grados sexagesimales).

Sin embargo nuestro sistema proviene del sistema hindú, que era decimal. Este sistema fue probablemente desarrollado en torno al siglo I, pero hay acuerdo general en que ya estaba en uso en la India en el 400 d.C. El sistema se basa en 9 dígitos que pueden verse en Fig. 1.6; claramente la grafía de algunos de estos símbolos se parece mucho a la de nuestros números. Probablemente, la elección de un sistema decimal tiene que ver con el uso natural de los dedos de las manos para contar.

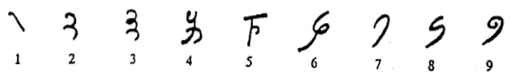
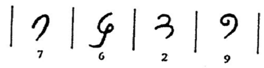


Figura 1.6: Dígitos en el sistema de numeración hindú.

Aunque nuestro sistema proviene del sistema hindú, el sistema llegó a Europa gracias a los árabes. Al-Jwarizmi (de cuyo nombre deriva la palabra "algoritmo") escribió el libro *Acerca de los cálculos con los números de la India* alrededor del año 825. Leonardo de Pisa (1170-1250), más conocido por Fibonacci, aprendió la notación indo-arábiga en Argelia, y la introdujo en Europa en su libro *Liber Abaci* (1202)[1].

El siguiente paso en la evolución de los sistemas de numeración se puede ver en este ejemplo:



Como el orden de las potencias de la base es siempre el mismo, los símbolos para dichas potencias no son realmente necesarios. Estamos ya a un solo paso de nuestro sistema decimal:

[1]En este libro se presenta también la llamada *sucesión de Fibonacci*, en la cuál cada número es la suma de los dos anteriores; por ejemplo, si los dos elementos iniciales son 0 y 1, la sucesión sería $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \cdots$. Curiosamente, esta sucesión está relacionada con la *proporción áurea*, una especie de cánon de proporciones perfectas que se utilizaría en el arte del Renacimiento, y aparece también en la Naturaleza.

¿qué hace falta para poder prescindir de las barras de separación? Si el valor de cada dígito depende de la posición que ocupe, entonces es esencial representar de algún modo que una cierta posición está *vacía*. Esta necesidad no surge en el sistema aditivo o en el aditivo-multiplicativo, pero en nuestro caso es, sencillamente, imprescindible. En nuestro sistema, el "vacío" lo representa el *cero*. Parece ser que los babilonios tenían también un símbolo para representar el vacío, pero nuestro cero proviene, nuevamente, de los hindúes. En sánscrito (la lengua clásica de la India),"vacío" se dice "shunya", que los árabes tradujeron como "sifr"; nuestra palabra "cifra" viene de ahí. Además, aunque probablemente no hayamos reparado en ello, no es tan obvio que el cero sea un número (ya lo veremos más adelante, cuando hablemos de la división). Una pequeña digresión aquí, a cuenta del cero. Resulta natural representar la ausencia de algún modo para que la notación posicional funcione; pero de ahí a entender que cero es un número *como los demás (o casi!)...* Efectivamente, podemos sumar y restar 0 sin problemas; podemos darle sentido a multiplicar por 0, a dividir 0 por un número (ojo, dividir por 0, sin embargo, no tiene sentido, como veremos en su momento). Cero es un número *como los demás (o casi)* porque podemos realizar con él las mismas operaciones que con el resto de números, y simplemente hay que tener cuidado de que no aparezca en ningún denominador. Probablemente esta idea de que el 0 era un número más no era conocida por los babilonios; sin embargo, parece que los hindúes y los árabes sí la tenían.

1.2. Sistema de base b.

Hemos visto que nuestro sistema de numeración es decimal, y utiliza un sistema de notación posicional, de modo que el valor del n-ésimo dígito (empezando desde la derecha) se obtiene multiplicando por 10^{n-1}. Como el sistema es decimal, eso significa que tenemos 10 dígitos a nuestra disposición:

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.$$

En concreto, en nuestro sistema decimal cualquier número N (ojo, el álgebra ataca de nuevo) se escribe como

$$N = a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0,$$

donde $a_0, a_1, \ldots, a_n$ son cifras entre 0 y 9; es decir, $0 \leq a_i \leq 9$ para todo $i = 0, 1, \ldots, n$. El valor de N, como bien sabemos, es entonces

$$N = a_n \cdot 10^n + \cdots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0.$$

A medida que pasamos de a_0 a a_1, de a_1 a a_2, etc. el valor del dígito se multiplica por 10, es decir, 10 es la *base*, que representaremos por la letra b, del sistema.

Aunque el valor $b = 10$ parece una buena elección, ya que tenemos 10 dedos en las manos, podríamos desarrollar un sistema de numeración con cualquier otro valor[2] de b. Antes de pasar al caso general, es útil pensar cómo sería nuestro sistema de numeración si tuviéramos 8 dedos, pues en tal caso, con toda probabilidad usaríamos un sistema con $b = 8$, conocido como sistema octal, y que es importante en Informática. En base 8, el número $243_{(8}$ representa 3 unidades, 4 grupos de 8 y 2 grupos de 8^2, es decir,

$$243_{(8} = 2 \cdot 8^2 + 4 \cdot 8 + 3 = 128 + 32 + 3 = 163.$$

[2]Mayor o igual que dos; si $b = 1$, esencialmente tendríamos el sistema mesopotámico!!

Obsérvese que en base 8 sólo necesitamos los dígitos del 0 al 7, ya que 8 grupos de 8 forman un grupo de 8^2, de manera análoga a como 10 grupos de diez (diez decenas) forman un grupo de 10^2, es decir, una centena.

Ya en general, en un sistema de numeración de base b, un número N se escribe

$$N = a_n a_{n-1} \cdots a_{0(b},$$

donde $0 \leq a_i \leq b-1$, para $i = 0, 1, \ldots, n$. Por lo tanto, si $b = 2$ (sistema *binario*) los dígitos del número (los a_i) sólo tienen dos valores posibles, 0 ó 1. Si $b = 8$ (sistema *octal*) tienen 8 valores posibles, $0, \ldots, 7$. Si $b = 16$ (sistema *hexadecimal*), los dígitos tienen 16 valores posibles, que se representan como

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F,$$

donde $A = 10$, $B = 11$, etc. Una vez fijado el valor de b, representar N *en base* b, es equivalente a escribir N como suma de potencias de b (las unidades también son una potencia de b, ya que $b^0 = 1$).

$$N = a_n \cdot b^n + \cdots + a_2 \cdot b^2 + a_1 \cdot b + a_0.$$

Veamos algunos ejemplos para familiarizarnos con esto[3]. ¿Quién es $10101_{(2}$, escrito en sistema decimal, es decir, de base 10? En base 10, este número es

$$10101_{(2} = 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 = 16 + 4 + 1 = 21.$$

¿Qué número se escribe como $A12_{(16}$? Aplicando lo anterior, tenemos

$$A12_{(16} = 10 \cdot 16^2 + 1 \cdot 16 + 2 = 2560 + 16 + 2 = 2578.$$

Aunque pueda parecer raro utilizar una base distinta de 10, en Informática, en concreto, el sistema binario es fundamental; de hecho, toda la información que almacena un ordenador está en formato binario: todos los textos, la música o las películas que se almacenan en un ordenador no son más que enormes cadenas de ceros y unos. En particular, la aritmética que hace un ordenador es en base 2. La razón es que, en realidad, un ordenador representa *bits* de información: el 0 corresponde a un circuito sin magnetizar (o sin corriente que lo atraviese), y el 1 corresponde a un circuito magnetizado (o con corriente). Por supuesto, esto se hace en circuitos de tamaño inconcebiblemente pequeño, y un ordenador de sobremesa contemporáneo contiene miles de millones de tales circuitos. Los sistemas octal y el hexadecimal también son importantes en Informática; la razón es que, al ser su base una potencia de 2, resulta eficiente hacer los cambios de base correspondientes.

Para poder pensar mejor en el proceso usual de contar y agrupar en decenas, centenas, etc., vamos a pensarlo en base 5, es decir, contaremos los puntos y haremos grupos de 5, que serán el análogo a las decenas. Igual que diez decenas dan lugar a una centena (una centena es un grupo de 10^2), cuando tengamos cinco grupos de cinco los agruparemos en un grupo de 5^2.

Haciendo grupos de 5 (y agrupando 5 grupos de 5 en uno de 5^2) en el conjunto de la izquierda de la Figura 1.7, obtenemos lo que se representa en la parte derecha de la figura, es decir, 2 grupos de 5^2, 3 grupos de 5 y 4 unidades. Por tanto, en base 5 el número de puntos de la figura se escribe $234_{(5}$.

Un problema relacionado, pero distinto, es expresar un número que viene dado en base 10 en otra base. Supongamos que nos piden escribir 26 en base 3. El equivalente de unidades (grupos

[3]Si resulta raro trabajar con una base distinta de 10, eso nos puede dar una pista de cómo puede ser, para un niño, entender el sistema de numeración usual.

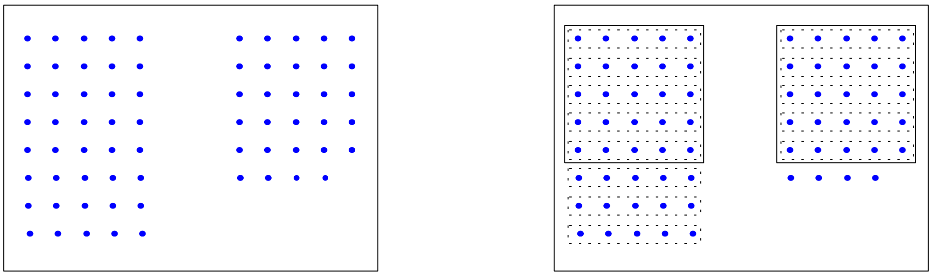


Figura 1.7: Aprendiendo a contar en base 5.

de $1 = 10^0$), decenas (grupos de $10 = 10^1$), centenas (grupos de $100 = 10^2$), millares (grupos de $1000 = 10^3$), etc. lo constituyen, en base tres, los grupos de $1 = 3^0$, de $3 = 3^1$, de $9 = 3^2$, de $27 = 3^3$, etc. Así que nos preguntamos: "¿Cuántos grupos de 27 tenemos?", y resulta que ninguno. Bajamos un peldaño: "¿Cuántos grupos de 9 tenemos?", y esta vez contestamos que tenemos dos grupos de 9, ya que $26 = 2 \cdot 3^2 + 8$. Estas 8 unidades, a su vez, las podemos agrupar en 2 grupos de 3, y nos sobran dos unidades, es decir, $26 = 2 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3 + 2$. Por lo tanto, 26, en base 3, se escribe $222_{(3}$.

Obsérvese que las operaciones involucradas en el párrafo anterior no son mas que divisiones: el número de grupos de 9 elementos que podemos hacer con 26 elementos es 2, porque ése es el cociente de la división $26 : 9$; además, esa división tiene resto 8. Para ver el número de grupos de 3 elementos que podemos hacer a partir de los 8 elementos, de nuevo examinamos la división $8 : 3$, cuyo cociente es 2, y cuyo resto también es 2. Ese último resto, además, nos da el número de grupos de 1 elemento que podemos construir. De hecho, a partir de estas observaciones se podría dar un método rápido (la palabra técnica es "algoritmo") para pasar de base 10 a una base b cualquiera.

1.3. Suma y resta de números naturales

Una vez que ya sabemos escribir números, viene la segunda parte: realizar operaciones con ellos. Nosotros vamos a revisar las operaciones fundamentales, empezando por la suma y su cercano pariente, la resta.

La suma de números naturales tiene ciertas propiedades que conviene conocer, y saber justificar:

(1) Es una operación **interna**: la suma de dos números naturales es otro número natural. Por ejemplo, la resta no es una operación interna en $\mathbb{N}$ (el resultado de 2 menos 5 no es un número natural...)

(2) **Conmutativa**: la propiedad conmutativa, referida a una cierta operación, garantiza que el orden en que se operan **dos** cantidades no afecta al resultado. La suma de números naturales es conmutativa, es decir, $a+b = b+a$ para $a, b \in \mathbb{N}$. La propiedad conmutativa es sencilla de entender, y de justificar, ya que corresponde simplemente a contar los elementos de dos conjuntos, en dos órdenes distintos.

(3) **Asociativa**: la propiedad asociativa, referida a una cierta operación, garantiza que el orden con el que se operan **tres** cantidades, escritas en un cierto orden, no afecta al resultado. La

suma de números naturales es asociativa, es decir, $(a+b)+c = a+(b+c)$ para $a, b, c \in \mathbb{N}$; de hecho, como $(a+b)+c$ y $a+(b+c)$ dan el mismo resultado, podemos prescindir de paréntesis y escribir $a+b+c$. Es más, como además la suma es conmutativa, podemos cambiar $a+b$ por $b+a$, etc. y el resultado sigue sin modificarse. Por lo tanto, para sumar tres números naturales podemos utilizar el orden que queramos. Esto puede generalizarse a una cantidad cualquiera de números naturales. Para justificar la propiedad asociativa podemos recurrir a la misma idea geométrica que en el caso de la propiedad conmutativa.

La resta se define a partir de la suma; nuevamente, en notación algebraica,

$$a - b = c \Leftrightarrow a = b + c. \tag{1.1}$$

Habitualmente llamamos a b *sustraendo*, y a c *diferencia*. A partir de (1.1) podemos ver que, en realidad, los papeles de b y c son intercambiables: si b hace de sustraendo entonces c hace de diferencia, pero si c hace de sustraendo (es decir, si calculamos $a-c$) entonces b hace de diferencia (porque $a-c=b$). En $\mathbb{N}$ la resta no es una operación interna (en el conjunto de los números enteros, $\mathbb{Z}$, sí lo es); dejamos al lector pensar si es conmutativa o asociativa.

La resta permite *ordenar* números naturales:

$$a < b \Leftrightarrow b - a > 0.$$

A partir de este orden tiene sentido utilizar una recta, que llamamos *recta numérica* (ver Fig 2.3), para representar números. En esta recta (infinita), los números se ordenan de izquierda a derecha. Si sólo consideramos los números naturales, la recta numérica está casi vacía. Pero los sucesivos conjuntos numéricos (enteros, racionales, reales) la van llenando hasta que, como veremos, no queda ni un sólo hueco!!

Figura 1.8: la recta numérica.

La suma y la resta de números naturales es uno de los contenidos fundamentales de los primeros cursos de Educación Primaria. Las diversas estrategias para calcular sumas y restas se tratarán en la asignatura de Didáctica de las matemáticas, aquí nos vamos a limitar a revisar los algoritmos tradicionales, usualmente conocidos como *algoritmos en columna*. Los algoritmos en columna permiten realizar sumas y restas de números arbitrariamente grandes de forma eficiente, pero aprender el algoritmo de forma mecánica, sin entender su justificación, puede tener consecuencias negativas en el desarrollo de lo que se conoce como *sentido numérico*. La aritmética en base b es una herramienta idónea para revisar los algoritmos tradicionales de la suma y la resta. Tomemos una suma en base cinco, como por ejemplo $143_{(5} + 244_{(5}$. Si escribimos esta suma en columna, como las habituales sumas en base 10, y procedemos como siempre, comenzaríamos sumando las unidades. Como $3+4=7$, obtenemos 7 unidades, que en base 5 escibimos como 2 unidades y 1 grupo de 5. Por tanto, escribimos 2 en la cifra de las unidades, y "nos llevamos" el grupo de 5 a la posición de los grupos de 5, por lo que escribimos

$$\begin{array}{rccc}
 & 1 & \overset{1}{4} & 3_{(5} \\
+ & 2 & 4 & 4_{(5} \\
\hline
 & & & 2_{(5}
\end{array}$$

Ahora, tenemos un total de 9 grupos de 5, que en base 5 se agrupan en un grupo de 5^2 (5 grupos de 5) y 4 grupos de 5. Por tanto, ponemos un 4 en el la posición de los grupos de 5 y nos llevamos un grupo de 5^2 a la posición de los grupos de 5^2, es decir,

$$\begin{array}{rccc}
 & \overset{1}{1} & \overset{1}{4} & 3_{(5} \\
+ & 2 & 4 & 4_{(5} \\
\hline
 & 4 & 4 & 2_{(5}
\end{array}$$

Para la resta, pensemos en $32_{(5} - 13_{(5}$. El primer número tiene 2 unidades y 3 grupos de 5, mientras que el segundo número tiene 3 unidades y 1 grupo de 5. Al intentar restar las unidades nos encontramos con un problema, porque 2 menos 3 no es un número natural. Lo que hacemos entonces es solicitar amablemente al número $32_{(5}$ que ceda un grupo de 5 a las unidades, de modo que vemos $32_{(5}$ como 2 grupos de cinco y $5+2=7$ unidades. Y ahora ya podemos restar: 7 unidades menos 3 unidades nos da 4 y 2 grupos de cinco menos 1 grupo de cinco nos da 1, ; el resultado es $14_{(5}$. En columna, podríamos escribirlo de la siguiente forma:

$$\begin{array}{rcc}
 & \overset{2}{\cancel{3}} & \overset{7}{\cancel{2}}_{(5} \\
- & 1 & 3_{(5} \\
\hline
 & 1 & 4_{(5}
\end{array}$$

En la resta en base 10 podemos hacer exactamente lo mismo. Aunque este algoritmo no es el más extendido en las aulas de nuestro país, está ganando terreno en los últimos años, especialmente entre el profesorado más preocupado de que las matemáticas “se entiendan”. Si queremos restar $43-17$ en base 10, entonces:

$$\begin{array}{rcc}
 & \overset{3}{\cancel{4}} & \overset{13}{\cancel{3}} \\
- & 1 & 7 \\
\hline
 & 2 & 6
\end{array}$$

Lo que hemos hecho arriba es ligeramente distinto de la versión más común en las aulas españolas[4] que es la siguiente: cambiamos el “3” de las unidades por un 13, y decimos que de 7

[4] A nivel internacional, el algoritmo mayoritario es claramente, esta primera versión

a 13 “van” 6. Decimos después que “nos llevamos” 1, y ese 1 se lo damos al dígito de las decenas del sustraendo, que pasa a ser 2; después decimos que de 2 a 3 “va” 1, y hemos terminado la resta. Esto es lo que, probablemente, aprendimos de pequeños.

$$\begin{array}{rcc} & 4 & 3 \\ - & \overset{2}{\cancel{1}} & 7 \\ \hline & 2 & 6 \end{array}$$

Por supuesto, el resultado es el mismo, y el algoritmo también se puede justificar. Lo que estamos haciendo, en realidad, es usar la *propiedad de compensación* de la resta: si al minuendo y el sustraendo se le suma o se le resta la misma cantidad, la diferencia no varía. Podemos, entonces, sumar 10 a ambos números, pero como 10 unidades en el minuendo, y una decena en el sustraendo. Las ventajas e inconvenientes de estas dos alternativas para la resta serán tratadas en la asignatura de Didáctica de las matemáticas.

1.4. Multiplicación en $\mathbb{N}$.

La multiplicación de números naturales no es, en realidad, más que una suma abreviada. Sin embargo, antes de empezar su estudio necesitamos tomar una decisión sobre cómo interpretar la expresión $a \times b$. Lo usual en España es leer 5×3 como “5 por 3”, que proviene de “5 multiplicado por 3”; 5 es el multiplicando y 3 el multiplicador, es decir, $5 \times 3 = 5 + 5 + 5$. Creemos que usar esta interpretación en primaria tiene algunos inconvenientes: la palabra “por” (o la expresión “multiplicado por”) no tiene significado en el lenguaje usual, por lo que no nos podemos apoyar en la intuición del alumno cuando la introducimos; seguramente por ello, surgen problemas para traducir a multiplicación algunas expresiones del lenguaje usual. Piense el lector cómo traduciría a leguaje matemático la expresión “el doble de 6”. Muy posiblemente haya pensado en escribir el doble de 6 como 2×6. Sin embargo, para ser coherente con la interpretación del signo $\times$ como “por” habría que escribir 6×2 (ya que $6 \times 2 = 6 + 6$). Por supuesto, todos sabemos que “da lo mismo”, ya que $2 \times 6 = 6 \times 2$; sin embargo, que el resultado sea el mismo no quiere decir que la interpretación sea la misma, y que las dos expresiones sean vistas como equivalentes por un alumno que se está iniciando en el estudio de la multiplicación. Nuestra propuesta sería evitar el término “por” y sustituirlo por “veces”. No es una idea original; de hecho, entre los idiomas occidentales más extendidos, solo Italia nos acompaña en el uso del “por”: en inglés se usa “times”, en francés “fois” y en alemán “mal”, exactamente los equivalentes en estos idiomas del castellano “veces”. Si interpretamos 5×3 como “5 veces 3”, lo que estamos diciendo es que $5 \times 3 = 3 + 3 + 3 + 3 + 3$ y, por tanto, estamos “cambiando el orden” de la interpretación usual en España. Esto tendrá consecuencias más adelante, por ejemplo en las tablas de multiplicar. Sin embargo, creemos que este es el enfoque más adecuado, y es el que adoptaremos en este tema.

Definición 1. *Sean* $\mathbf{a}$ *y* $\mathbf{b}$ *números naturales. La expresión* $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$*, equivale a sumar* $\mathbf{b}$ *consigo mismo* $\mathbf{a}$ *veces; de forma concisa,* $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ *significa “*$\mathbf{a}$ *veces* $\mathbf{b}$*”:*

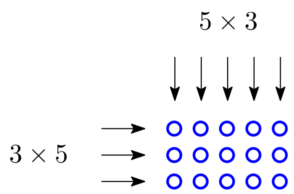
$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{b} + \overbrace{\cdots}^{\mathbf{a}} + \mathbf{b}.$$

Estudiemos ahora las propiedades de la multiplicación, como antes hicimos con la suma:

(1) Es una operación **interna**: la multiplicación de dos números naturales es otro número natural. La división, sin embargo, no.

(2) **Conmutativa**: aunque esta propiedad está muy anclada en nuestra mente ("*el orden de los factores no altera el producto*"), en realidad no es obvia. La razón es que los papeles que juegan $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ son diferentes: $\mathbf{b}$ es el número que se repite, y $\mathbf{a}$ la cantidad de veces que se repite $\mathbf{b}$; luego si intercambiamos los papeles, no resulta obvio que el resultado se mantenga igual.

Un ejemplo concreto: para un niño que se está iniciando en la multiplicación, no resulta obvio que si en una mesa hay 5 bolsas con 3 caramelos en una bolsa, y en otra mesa 3 bolsas con 5 caramelos en cada bolsa, en realidad en las dos mesas hay la misma cantidad de caramelos. La mejor forma de ver que 3 veces 5 es igual a 5 veces 3 es disponer los objetos en forma de tabla, como en la figura: de esta forma queda claro que 3×5 corresponde a contar los objetos por filas, en tanto que 5×3 corresponde a contar *los mismos objetos* por columnas:



(3) **Asociativa**: para cualesquiera números naturales, $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, se tiene

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}.$$

Puesto que se verifica la propiedad asociativa, cuando queremos multiplicar tres números naturales $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ podemos escribir simplemente $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \times \mathbf{c}$. Mientras que para justificar la propiedad conmutativa recurrimos a contar en una cuadrícula, en este caso podemos recurrir a contar cubos en una disposición tridimensional como la de la Fig. 1.9, donde se muestra que $2 \times (3 \times 5) = (2 \times 3) \times 5$. De hecho, si tomamos como unidad el lado de los cubos de la Fig. 1.9, diremos que el volumen de esa figura es $2 \times 3 \times 5 = 30$ unidades cúbicas.

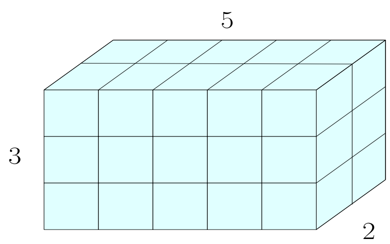


Figura 1.9: Propiedad asociativa de la multiplicación de números naturales.

Hay además una cuarta propiedad importante que involucra a la multiplicación y a la suma al mismo tiempo:

(4) **Distributiva**: la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma, dice que

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c},$$

o también,

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c},$$

para tres números naturales cualesquiera **a**, **b**, **c**. De nuevo se puede justificar geométricamente: en Fig. 1.10, se muestra por qué $(2 + 5) \times 4 = 2 \times 4 + 5 \times 4$.

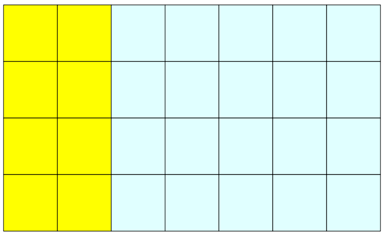


Figura 1.10: Propiedad distributiva.

La propiedad distributiva es útil por varias razones, pero enumeraremos tres. La primera de ellas es su aplicabilidad en el cálculo mental: si queremos multiplicar mentalmente 12 por 25, es más sencillo verlo así:

$$12 \times 25 = (10 + 2) \times 25 = 10 \times 25 + 2 \times 25 = 250 + 50 = 300.$$

Obsérvese que con la interpretación que proponemos de la multiplicación la propiedad distributiva es muy intuitiva: las igualdades anteriores solo están diciendo que "12 veces 25" es lo mismo que "10 veces 25 mas 2 veces 25".

La segunda razón es que nos permite justificar la regla para multiplicar por la unidad seguida de ceros. Por ejemplo, es bien conocido que 100 por 25 es igual a 2500. Para justificarlo, se puede razonar del siguiente modo (aquí y en lo que sigue, a veces sustuituiremos la notación $\times$ por $\cdot$)

$$100 \times 25 = 100 \times (2 \times 10 + 5) = 100 \times 2 \times 10 + 100 \times 5 = 2 \times 1000 + 5 \times 100 = 2500.$$

Es decir, al multiplicar por 100 las unidades se convierten en centenas, las decenas en millares, etc. y esto equivale a desplazar cada cifra dos lugares hacia la izquierda, cosa que se consigue simplemente añadiendo dos ceros.

En tercer lugar, la propiedad distributiva permite justificar el algoritmo usual para la multiplicación de números naturales. Veámoslo en el caso de 42×23; si aplicamos la propiedad distributiva:

$$42 \times 23 = 40 \times 23 + 2 \times 23$$

Si ahora comparamos esto con el algoritmo usual, veremos que la primera fila corresponde al producto 2×23, la segunda fila al producto 40×23 (obsérvese que $40 \times 23 = 4 \times 23 \times 10$) y la posición que movemos la segunda fila hacia la izquierda, y que tantos problemas de aprendizaje provoca, corresponde a ahorrarnos la escritura del 0 al final de 40×23.

$$
\begin{array}{rrr}
 & 2 & 3 \\
\times & 4 & 2 \\
\hline
 & 4 & 6 \\
9 & 2 & \\
\hline
9 & 6 & 6
\end{array}
$$

1.5. División.

Esencialmente, la división está asociada con la idea de reparto. Sin embargo, la división puede tener en realidad dos interpretaciones diferentes, como se muestra en estos ejemplos:

(1) *Queremos repartir 20 caramelos en 4 bolsas diferentes. ¿Cuántos caramelos debemos poner en cada bolsa?* Gráficamente, corresponde a la situación de la Fig. 1.11. Se trata de un problema de reparto típico, y es probablemente la manera más natural de introducir la división. Estamos ante la *división partitiva*, que se utiliza cuando conocemos la cantidad original y el número de partes en que ésta quiere dividirse, y nos preguntamos por el tamaño que tendrá cada parte.

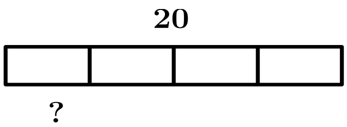


Figura 1.11: División partitiva.

(2) *Queremos repartir 20 caramelos en bolsas con 5 caramelos cada una. ¿Cuántas bolsas necesitaremos?* En este caso no estamos ante un problema de reparto, sino de agrupación, y no es obvio que la operación a realizar sea la misma que en el caso (1). Este tipo de división es conocida como *división cuotativa*, y aparece cuando conocemos la cantidad original y el tamaño o medida de cada parte, y queremos averiguar el número de partes (ver Fig. 1.12).

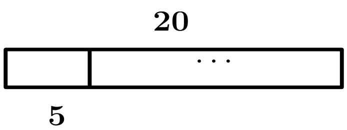


Figura 1.12: División cuotativa.

Un modo de ver que ambos conceptos, división partitiva y división cuotativa, corresponden en realidad a la misma operación, es observar que la división no es más que la operación inversa de la multiplicación; en este sentido,

$$\mathbf{a} = \mathbf{b} \times \mathbf{c} \Leftrightarrow \mathbf{a} \div \mathbf{b} = \mathbf{c} \Leftrightarrow \mathbf{a} \div \mathbf{c} = \mathbf{b}. \tag{1.2}$$

Por lo tanto, $20 \div 4 = 5$, ya que $20 = 4 \times 5$; pero también $20 \div 5 = 4$, porque $20 = 5 \times 4$. Viéndola de este modo, es fácil ver que, efectivamente, la división partitiva y la división cuotativa corresponden a una misma operación. Además, este modo de presentar la división permite analizar el caso un tanto especial del 0. Pensemos en primer lugar en el valor de $0 \div \mathbf{b}$, con $\mathbf{b} \neq 0$. A partir de (1.2), podemos ver que $0 \div \mathbf{b} = 0$, ya que $0 = \mathbf{b} \times 0$. El caso en que $\mathbf{b} = 0$ es diferente: $0 \div 0 = \mathbf{c}$ cuando $0 = 0 \cdot \mathbf{c}$; pero todo número natural satisface esta última relación, porque $0 \cdot \mathbf{c} = 0$ para todo $\mathbf{c}$. Por lo tanto, $0 \div 0$ no puede definirse, ya que no podemos asignar un único valor al resultado de la operación $0 \div 0$. Finalmente, pensemos en $\mathbf{a} \div 0$, con $\mathbf{a} \neq 0$. Si $\mathbf{a} \div 0 = \mathbf{c}$, entonces $\mathbf{a} = 0 \cdot \mathbf{c}$, en cuyo caso $\mathbf{a} = 0$, que es justamente el valor que habíamos dicho que $\mathbf{a}$ no podía tener: acabamos de *demostrar* (es decir, de probar irrefutablemente) que $\mathbf{a} \div 0$, con $\mathbf{a} \neq 0$, no tiene sentido (no puede definirse), porque la posibilidad de que exista un número natural $\mathbf{c}$ tal que $\mathbf{a} \div 0 = \mathbf{c}$, lleva a una *contradicción* (que $\mathbf{a}$ sea y no sea 0, al mismo tiempo). En resumen, no podemos definir la división por 0. Aquí el 0 sí se distingue de los demás números.

Dos observaciones adicionales sobre la división partitiva y la división cuotativa.

- En la división partitiva el divisor es siempre un número natural. Sin embargo, en el caso de la división cuotativa esta condición sobre el divisor no es necesaria; por ejemplo: *Un grupo de amigos compra 6 pizzas, y se las reparten por igual. Si cada amigo come $2/3$ de pizza, ¿cuántos amigos hay en el grupo?*. No hemos entrado aún en el país de los números racionales, pero este ejemplo muestra que la división cuotativa puede generalizarse a otros conjuntos numéricos.

- La división cuotativa está relacionada con el problema de la medida. Esencialmente, medir supone determinar cuántas veces una cierta unidad dada (por ejemplo, un metro) cabe en una cierta magnitud (por ejemplo, una longitud dada).

En realidad, y puesto que estamos explorando los números naturales, cuando hemos escrito antes $\mathbf{a} \div \mathbf{b} = \mathbf{c}$ hemos asumido implícitamente que podemos repartir perfectamente $\mathbf{a}$ en grupos de $\mathbf{b}$ elementos, sin que nos "sobre" ninguno. Obviamente, ello no siempre es posible: podemos repartir 20 caramelos en grupos de 5 sin que sobre ninguno, pero con 19 caramelos ya no sería posible. Con 19 caramelos podemos hacer 3 grupos de 5, y nos sobrarían 4 caramelos; podemos escribir por tanto:

$$19 = 3 \times 5 + 4.$$

En este caso diríamos que 19 es el *dividendo* de la división (la cantidad a repartir o dividir), 5 es el *divisor* (el número de grupos que queremos hacer, en el caso de la división partitiva, o el tamaño de los grupos que deseamos hacer, en el caso de la disivión cuotativa), 3 es el *cociente* de la división (el tamaño de cada grupo, en el caso de la división partitiva, o el número de grupos, en la división cuotativa), y 4 es el *resto* de la división (lo que queda tras hacer el reparto en grupos). En general, si representamos al dividendo por D, al divisor por d, al cociente por q, y al resto por r, se tiene:

$$D = q \times d + r.$$

Además, $0 \leq r \leq d - 1$, y de nuevo la división cuotativa nos ayuda a entenderlo: si pensamos en D como el tamaño del conjunto original, d como el tamaño de los grupos que deseamos hacer, y q como el número de grupos que obtenemos, si $r \geq d$, entonces podríamos seguir haciendo grupos!! La interpretación de esta igualdad en la división partitiva también es sencilla: si repartimos D caramelos entre d niños, el resto r debe ser menor que d ya que, en caso contrario, podríamos seguir repartiendo caramelos.

Si el resto de la división $a \div b$ es 0, decimos que la división es *exacta*.

Una vez revisada la operación de la división, vamos a analizar el algoritmo que se utiliza para su cálculo. La idea de cualquier algoritmo de división es aproximar el dividendo por un múltiplo del divisor. Por ejemplo, si queremos calcular $74 \div 3$, podemos observar que $24 \times 3 = 72$ y que $25 \times 3 = 75 > 74$. Por tanto, el cociente es 24 y el resto 3, es decir, $74 = 24 \times 3 + 2$.

Resulta llamativo que no tengamos una notación estándar para el resultado de una división. En el mundo anglosajón, se escribe $74 \div 3 = 24 \text{ R } 2$. Sin embargo, esta notación tiene un inconveniente: también se tiene, por ejemplo, $122 \div 5 = 24 \text{ R } 2$. Siguiendo el principio de la lógica elemental que asegura que si dos cosas son iguales a una tercera, también son iguales entre sí, oncluiríamos que $74 \div 3 = 122 \div 5$. Esta igualdad es falsa, al menos si la interpretamos en el campo de los números racionales.

El algoritmo tradicional de la división se puede interpretar tanto en la versión partitiva como en la cuotativa, pero optaremos por la partitiva. Supongamos que queremos repartir 74 elementos en 3 grupos. En primer lugar, repartimos 7 decenas en 3 grupos, de donde obtenemos 2 decenas en el cociente, y nos sobra 1 decena. Al unir esta decena que no hemos podido repartir, a las 4 unidades que aún no hemos intentado repartir, obtenemos 14 unidades. Tras repartir estas unidades en tres grupos, cada grupo recibirá 4 unidades, lo cuál constituirá la cifra de las unidades del cociente, y nos sobrarán, inevitablemente, 2. Por lo tanto, el cociente de la división es 24, y el resto, 2 unidades. Este algoritmo se escribe en nuestros colegios de una de estas dos formas:

$$
\begin{array}{r|l}
7\,4 & 3 \\ \cline{2-2}
-\underline{6} & 2\,4 \\
1\,4 & \\
-\underline{1\,2} & \\
2 &
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r|l}
7\,4 & 3 \\ \cline{2-2}
1\,4 & 2\,4 \\
2 &
\end{array}
$$

La versión de la izquierda se suele conocer como *algoritmo extendido*, y llamaremos a la versión de la derecha *algoritmo comprimido*. La discusión didáctica sobre ventajas e inconvenientes de estas dos opciones será objeto de estudio en la asignatura de Didáctica de las matemáticas. Aquí, nos limitaremos a observar que la opción más común a nivel internacional es el algoritmo extendido, si bien existen variantes para la disposición del dividendo, divisor, cociente, etc. En la Fig. 1.13 se muestra la escritura usada en EEUU (izquierda) y Gran Bretaña (derecha). Es muy problable que exista una conexión entre la forma que tenemos de hacer las llevadas en la resta y la escritura comprimida del algoritmo de la división, ya que resulta muy complicado evitar la escritura de las restas parciales si las llevadas de la resta se hacen en el minuendo.

$$
\begin{array}{r}
24 \\ \cline{2-2}
3\,\big)\,74 \\
\underline{60} \\
14 \\
\underline{12} \\
2
\end{array}
$$

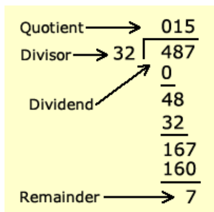


Figura 1.13: Algoritmo de la división en los sistemas inglés (izquierda) y americano (derecha).

Las cosas se complican un poco a medida que las cantidades del dividendo y el divisor se van incrementando. Por ejemplo, pensemos en la división $640 \div 23$. En este caso queremos repartir 6 centenas y 4 decenas en 23 grupos. Repartir 6 centenas en 23 grupos no parece fácil. Unimos entonces las 6 centenas a las 4 decenas y pensamos entonces en repartir 64 decenas en 23 grupos. A cada grupo le tocarán 2 decenas, y sobrarán $64 - 23 \cdot 2 = 64 - 46 = 18$ decenas. En particular, la cifra de las decenas del cociente, es 2. Repartir 18 decenas en 23 grupos de nuevo no parece fácil, pero esas 18 decenas son 180 unidades. Al repartir 180 unidades en 23 grupos, tendremos 7 unidades en cada grupo, y sobrarán $180 - 7 \cdot 23 = 180 - 161 = 19$ unidades (observemos que $19 < 23$). Por lo tanto, la cifra de las unidades del cociente es 7, y el resto de la división, 19.

$$\begin{array}{r|l} 6\,4\,0 & 2\,3 \\ \cline{2-2} -\,4\,6 & 2\,7 \\ \cline{1-1} 1\,8\,0 & \\ -\,1\,6\,1 & \\ \cline{1-1} 1\,9 & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r|l} 6\,4\,0 & 2\,3 \\ \cline{2-2} 1\,8\,0 & 2\,7 \\ 1\,9 & \end{array}$$

Para terminar, veamos una propiedad sobre la división con resto sobre la que merece la pena detenerse unos minutos. Una de las propiedades de la división que suele aparecer convenientemente recuadrada en algunos textos es esa de que "si el dividendo y el divisor se multiplican, o dividen, por el mismo número, entonces el cociente no varía". Esto es cierto, y ahora veremos por qué, aclarando además que el resto sí que cambia. Comparemos estas dos divisiones:

$$270 = 13 \times 20 + 10 \qquad\qquad 27 = 13 \times 2 + 1$$

Al dividir 270 y 20 por diez, el cociente, 13, se mantiene, pero el resto queda también dividido por 10. En general, se tiene que

$$D = q \times d + r \quad \rightarrow \quad kD = q \times kd + kr$$

1.6. Un breve intermedio algebraico.

El bien conocido Teorema de Pitágoras dice que *el cuadrado de la hipotenusa*[5] *de un triángulo rectángulo es igual a la suma de los cuadrados de los dos catetos*[6].

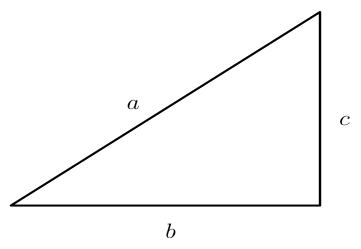


Figura 1.14: Triángulo rectángulo.

Si representamos el triángulo rectángulo como en la Fig. 1.14, entonces el Teorema de Pitágoras puede escribirse de un modo mucho más compacto en la forma

$$a^2 = b^2 + c^2. \tag{1.3}$$

[5]El lado opuesto al ángulo recto.
[6]Los lados que forman ángulo recto

En la expresión (1.3) hemos hecho algo chocante, a lo que probablemente, sin embargo, nos hemos acostumbrado: hemos mezclado letras (a, b, c), números (los cuadrados) y símbolos matemáticos (+, =) en una misma expresión. Lo que sucede es que esas letras a, b, c representan números cuyo valor no se especifica (a veces porque no se conoce), y por tanto tiene sentido combinarlas con esos números y símblos. Cuando en una expresión mezclamos números, letras y símbolos matemáticos, decimos que estamos ante una *expresión algebraica*. En realidad llevamos utilizando el álgebra (pero sin abusar) desde el comienzo de la Subsección 1.1.3, cuando apareció, no sin antes avisar al lector, para evitar desmayos, la expresión b^{n-1}.

Porque somos conscientes de que a menudo las expresiones algebraicas provocan dificultades, hemos decidido hacer un pequeño intermedio algebraico en el desarrollo del tema. Estas dificultades son una lástima, porque el *álgebra*, o si se prefiere el *lenguaje algebraico*, es un código pensado para simplificar las cosas, no para complicarlas. De hecho, aunque de forma rudimentaria, los babilonios ya lo usaban, así como los griegos y los árabes. En la Edad Media se hablaba, de hecho, de "la cosa", para referirse a lo que ahora llamaríamos "incógnita". Empezó a despegar a partir del siglo XVI, cuando se empiezan a introducir la mayor parte de los símbolos modernos (igualdad, menor que, mayor que, raíz cuadrada, potencias, etc.); de hecho, en el Renacimiento hubo quien consiguió vivir a base de ganar competiciones públicas de resolución de ecuaciones (los miembros del público podían hacer apuestas, no necesariamente pequeñas).

El lenguaje algebraico permite al menos tres cosas fundamentales:

(1) Enunciar de forma concisa propiedades generales: compárese la longitud del enunciado del Teorema de Pitágoras con la concisa fórmula (1.3), o inténtese traducir al lenguaje usual la igualdad (1.2).

(2) Razonar sobre cantidades desconocidas, estableciendo relaciones entre ellas: *Juan se ha presentado a un concurso en el que le hicieron 40 preguntas. Le daban 150 euros de premio por cada respuesta acertada, y le restaban 60 euros por cada fallo. Si no podía dejar preguntas en blanco y se llevo 4530 euros de premio, ¿cuántas preguntas acertó?* Si analizamos con cuidado el enunciado de este ejercicio, y representamos por x el número de preguntas acertadas, veremos que x satisface la igualdad

$$150 \cdot x - 60 \cdot (40 - x) = 4530.$$

(3) Permite manipular expresiones como la anterior (ecuaciones) y encontrar las soluciones: encontrar directamente el valor de x a partir de la expresión anterior no es sencillo, pero tras seguir ciertas pautas (que probablemente recordarás), se deduce cuál es el valor de x; esto es lo que se llama *resolver una ecuación.*

Además, las expresiones algebraicas pueden operarse entre sí, y a menudo eso da lugar a descubrimientos. Por ejemplo, si queremos representar tres números consecutivos, entonces, llamando n al menor de ellos, podemos escribir

$$n, n + 1, n + 2.$$

La suma de esos tres números consecutivos sería

$$n + (n + 1) + (n + 2),$$

que es igual a

$$3n + 3 = 3 \cdot (n + 1).$$

Resulta que hemos descubierto algo! La igualdad anterior nos dice que cuando sumamos tres números consecutivos *cualesquiera* (porque no hemos precisado el valor de n en ningún momento), obtenemos otro número que es el producto de 3, por otra cosa: es decir, traducido al lenguaje usual, *la suma de tres números consecutivos es un múltiplo de 3.*

A las expresiones algebraicas hay que acostumbrarse poco a poco. Con tiempo y paciencia, se las puede llegar a querer!!

1.7. Divisibilidad en $\mathbb{N}$.

1.7.1. Múltiplos y divisores.

Si tenemos 24 alumnos en una clase, entonces podemos poderlos a trabajar en parejas (es decir, grupos de 2), en grupos de 3, 4, 6 u 8 miembros, y podemos incluso dividir la clase en dos grupos de 12 miembros cada uno. Sin embargo, no podemos dividir a los alumnos en grupos de 5, porque necesariamente uno de los grupos tendría que tener 4 miembros. Decimos que 2, 3, 4, 6, 8 y 12 son divisores de 24, ya que 24 se puede dividir por cualquiera de ellos de manera exacta; de hecho, 24 tiene dos divisores más, un tanto obvios: 1 y 24. También decimos que 24 es divisible por 1, 2, 3, 4, 6, 12 y 24. Decimos también que 24 no es divisible por, por ejemplo, 5.

Con mayor generalidad, decimos que un número natural c *divide* a otro número natural a, y lo representamos $c|a$, si existe $b \in \mathbb{N}$ tal que $a = b \cdot c$; en ese caso, se dice que c es un *divisor* de a. De otra manera, $c|a$ si la división $a \div c$ es exacta. Si c no divide a a, escribimos $c \nmid a$. Por ejemplo, $2|36$ porque $36 = 2 \cdot 18$; sin embargo, $5 \nmid 19$ porque $19 = 3 \cdot 5 + 4$. Observemos que 1 divide a cualquier otro número natural. Además, cualquier número natural divide a 0. Para cualquier número natural a, 1 y a son divisores de a; al resto de divisores se les llama *divisores propios*.

Decimos que a es *múltiplo* de c si existe $b \in \mathbb{N}$ tal que $a = b \cdot c$. Por ejemplo, cuando hablamos del doble, el triple, el cuádruple, etc. de un número, nos referimos al número que resulta al multiplicar el número original por 2, 3, 4, etc: en todos esos casos obtenemos múltiplos de la cantidad inicial. Así que 21 es un múltiplo de 7, ya que $21 = 3 \cdot 7$, y 300 es un múltiplo de 50, porque $300 = 6 \cdot 50$. Sin embargo, 21 no es múltiplo de 2, ya que no hay ningún otro número natural que multiplicado por 2, dé 21. Al comparar las definiciones de múltiplo y divisor, se observa que

$$c|a \Leftrightarrow a \text{ es múltiplo de } c.$$

El símbolo "$\Leftrightarrow$"se lee, en Matemáticas, "si y sólo si", y significa que la implicación funciona en las dos direcciones, tanto hacia la derecha, como hacia la izquierda. Efectivamente, hacia la derecha, si $c|a$ entonces existe b tal que $a = b \cdot c$, y eso significa que a es un múltiplo de c. Hacia la izquierda, si a es múltiplo de c quiere decir que existe b tal que $a = b \cdot c$, luego $a \div c = b$, con lo que $c|a$.

Es útil observar que cuando $c \mid a$, y por tanto existe b cumpliendo $a = b \cdot c$, entonces b también es un divisor de a. Eso nos permite agilizar un poco la búsqueda de divisores, porque en realidad éstos vienen por pares (b, c) cuyo producto es a. Por ejemplo, encontremos todos los divisores propios de 120; claramente 2 es un divisor de 120, porque $120 \div 2 = 60$, con lo que $120 = 2 \cdot 60$. Pero esto también nos dice que 60 es un divisor de 120, de hecho el divisor propio más grande de 120 (ya que si hubiera otro más grande que él debería haber también otro divisor propio menor que 2, lo cuál no es posible). También 3 es un divisor de 120, y como $120 = 3 \cdot 40$, tenemos que 40 es otro divisor de 120. Del mismo modo, 5 es un divisor de 120 y 24 también (porque $120 = 5 \cdot 24$), y también son divisores 6 y 20, 8 y 15, 10 y 12 *y ninguno más*: puesto que 11 no divide a 120, no necesitamos continuar buscando, ya que a partir de 11 todos los divisores propios han sido encontrados ya.

1.7.2. Números primos.

Si tenemos 23 alumnos en una clase, es imposible hacer grupos con ellos que tengan el mismo tamaño, porque 23 no tiene divisores propios. Decimos que 23 es un número *primo*. En general, se dice que un número $p > 1$ es *primo* cuando no tiene más divisores que 1 y p, es decir, cuando carece de divisores propios. Si un número no es primo, decimos que es *compuesto*.

Saber si un número es primo o no (por métodos elementales, hay métodos muy sofisticados que no caben aquí, aunque puedes curiosear en

`https://primes.utm.edu/largest.html`

si te interesa el tema) implica comprobar si tiene algún divisor propio. Veamos, utilizando un poco de álgebra, que para ello basta con comprobar si hay algún divisor de n que sea menor que $\sqrt{n}$: como los divisores, según hemos dicho antes, vienen por pares, si n tiene algún divisor propio entonces tiene, de hecho, dos, que vamos a llamar p, q, y que cumplen $n = p \cdot q$. Si $p > \sqrt{n}$ y $q > \sqrt{n}$, entonces el producto $p \cdot q$ sería mayor que $(\sqrt{n})^2$, es decir, que n!! Esto no es posible, porque el producto $p \cdot q$ es, precisamente, igual a n. Por lo tanto, o bien p o bien q debe ser menor o igual que $\sqrt{n}$. Esto da lugar al siguiente resultado: *Todo número compuesto n tiene algún divisor propio menor o igual que $\sqrt{n}$.* Una formulación equivalente de este mismo resultado sería: *Un número es primo cuando no tiene ningún divisor propio menor o igual que $\sqrt{n}$.*

Así que para comprobar, por ejemplo, si 97 es primo, como $\sqrt{97} \approx 9{,}8$ basta con comprobar si 97 tiene algún divisor menor o igual que 10; es fácil ver que no, con lo cuál podemos estar seguros de que 97 es primo. Otra forma de ver el resultado es que cualquier pareja (p, q) de divisores de n con la propiedad de que $p \cdot q = n$, donde $p \leq q$, cumple que $p \leq \sqrt{n}$, mientras que $q \geq \sqrt{n}$.

Hay además un método muy antiguo, llamado *criba de Eratóstenes*, para encontrar todos los números primos menores que n. El método funciona de la siguiente manera:

1. Se forma una tabla con todos los números naturales entre 2 y n.

2. Marca 2 como número primo, y tacha todos los múltiplos de 2 menores o iguales que n.

3. Busca el primer número que no está tachado, y márcalo como número primo. Después, tacha los múltiplos de ese número que sean menores o iguales que n.

4. Repite sucesivamente el tercer paso, hasta que llegues a un número cuyo cuadrado sea mayor que n; a partir de ese momento, todos los números que quedan sin tachar, son primos.

El último paso requiere una explicación. Sabemos que el menor divisor propio de un número es menor o igual que su raíz cuadrada. Si alcanzamos un número cuyo cuadrado es mayor que n, entonces hemos rebasado $\sqrt{n}$. Ahora consideremos cualquier número N que esté entre $\sqrt{n}$, y n. Como $N \leq n$, entonces $\sqrt{N} \leq \sqrt{n}$. Si N fuera compuesto entonces tendría algún divisor propio menor o igual que $\sqrt{N}$, es decir, sería múltiplo de algún número menor o igual que $\sqrt{N}$. Puesto que hemos recorrido todos los números hasta $\sqrt{n}$, en particular hemos recorrido todos los números desde 1 hasta $\sqrt{N}$, y después hemos tachado sus múltiplos. Entonces, si N no ha sido tachado es porque no es múltiplo de ninguno de estos números; de otra manera, ninguno de esos números divide a N, y por lo tanto N es primo. Hemos intentado ilustrar esta idea en Fig. 1.15.

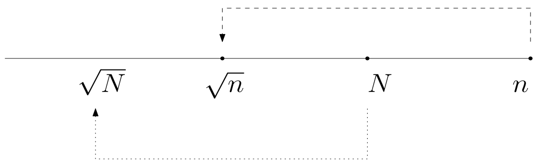


Figura 1.15: Paso 4 de la criba de Eratóstenes.

Veamos cómo funciona la criba de Eratóstenes en un ejemplo concreto; para ello, tomamos los números del 1 al 15, y formamos una lista con ellos:

2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

Ahora marcamos el 2 (en rojo), y tachamos todos los múltiplos de 2 (salvo él mismo) menores de 15:

2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	9	~~10~~	11	~~12~~	13	~~14~~	15

Como $2^2 = 4 < 15$, continuamos. Ahora marcamos el 3 (en azul), y tachamos todos los múltiplos de 3 (salvo él mismo), que no hayan sido tachados antes, menores de 15:

2	**3**	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~	11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~

Como $3^2 = 9 < 15$, seguimos. El siguiente número sin tachar es 5, que por tanto es primo; pero como además $5^2 = 25 > 15$, todos los números que quedan sin tachar son primos.

2	**3**	~~4~~	**5**	~~6~~	**7**	~~8~~	~~9~~	~~10~~	**11**	~~12~~	**13**	~~14~~	~~15~~

Los números primos han suscitado mucha curiosidad a lo largo de los siglos. No se conoce ninguna expresión que permita generar la lista de todos los números primos, y algunos problemas de enunciado muy sencillo que involucran a los números primos, permanecen sin resolver. Uno de ellos, especialmente famoso, es la Conjetura de Goldbach, que afirma que todo número par mayor que 2 es la suma de dos números primos: la conjetura se ha comprobado hasta números altísimos, pero no se ha *demostrado*, porque podría haber algún número par aún mayor que no la cumpliera. Enigmas aparte, para nosotros los números primos son importantes porque constituyen los *átomos* que permiten construir todos los números naturales. Esto tiene que ver con el siguiente resultado, que se conoce como Teorema Fundamental de la Aritmética.

Teorema 1 (Teorema Fundamental de la Aritmética)**.** *Todo número natural se puede descomponer, de manera única, como producto de factores primos.*

Es fácil ver que todo número natural n se puede escribir como producto de factores primos: si n es primo, ya hemos terminado; si no, n tiene dos divisores propios a, b tales que $n = a \cdot b$, y ahora basta proseguir el razonamiento con a y b por separado. Probar que la descomposición es única es más difícil, y no lo vamos a ver. Para descomponer un número en factores primos el algoritmo más conocido es el siguiente: primero probamos con 2, y continuamos con 2 hasta que obtengamos un número que no sea par; después probamos con 3, y procedemos del mismo modo; después con 5, 7, 11, 13 etc., siempre buscando divisores primos:

$$\begin{array}{r|l} 5544 & 2 \\ 2772 & 2 \\ 1386 & 2 \\ 693 & 3 \\ 231 & 3 \\ 77 & 7 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array}$$

En el ejemplo de arriba, $5544 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 11$. No obstante, es posible (y más divertido) encontrar atajos. Por ejemplo, para descomponer 60 en factores primos podemos utilizar que $60 = 6 \cdot 10$; como $6 = 2 \cdot 3$ y $10 = 2 \cdot 5$, tenemos que $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$. Es interesante observar que descomponer un número en factores primos es *computacionalmente* costoso: es decir, a medida que consideramos números más y más grandes, incluso con ordenadores muy potentes podríamos tardar tiempo en realizar el cálculo. En concreto, si tomamos dos números primos grandes[7] (en septiembre de 2015, el mayor número primo conocido es $2^{57{,}885{,}161} - 1$, un número con 17.425.170 dígitos), los multiplicamos para obtener un número natural n y pedimos luego a un ordenador que descomponga en factores primos el número n, los cálculos podrían llevar *años*. Esto, sin embargo, puede ser una ventaja: si para *descifrar* un cierto mensaje encriptado fuera necesario descomponer en factores primos un número de ese orden, cualquier espía necesitaría años para descifrar el mensaje, lo cuál hace que el sistema de cifrado sea seguro. Este es, de hecho, el fundamento del criptosistema RSA, creado en 1977 y utilizado ampliamente (al punto de haber convertido en millonarios a sus creadores, matemáticos por cierto).

La descomposición en factores primos nos proporciona mucha información sobre un número. Por ejemplo, sus divisores; en el caso de 60, los divisores son todos los números que podamos formar multiplicando entre sí factores de la forma a^p, donde a es un divisor primo del número, y p un número entre 0, y la potencia que tiene a en la descomposición en factores primos. Por ejemplo, como $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$, los divisores de 60 son:

$$1, 2, 2^2, 3, 5, 2 \cdot 3, 2^2 \cdot 3, 2 \cdot 5, 2^2 \cdot 5, 3 \cdot 5, 2 \cdot 3 \cdot 5, 2^2 \cdot 3 \cdot 5.$$

Resulta muy fácil a partir de esto identificar por ejemplo los divisores pares (los que contienen el factor 2), o los múltiplos de 3 (los que contienen el factor 3).

Si tenemos la descomposición en factores primos de un número, podemos encontrar una fórmula para el número de divisores de dicho número. Veámoslo primero con un ejemplo. Sabemos que $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$, y por lo tanto cualquier divisor de 60 es de la forma $2^\alpha \cdot 3^\beta \cdot 5^\gamma$, donde $\alpha = 0, 1, 2$ (recordemos que cualquier número elevado a 0 es 1), $\beta = 0, 1$, y $\gamma = 0, 1$. Por lo tanto, los divisores de 60 corresponden a las hojas del siguiente árbol:

Para contar el número de hojas del árbol, observemos que el árbol se abre inicialmente en tres ramas; después, cada una de ellas se subdivide en dos, cada una de las cuáles, a su vez, se subdivide en dos. Por lo tanto, el número total de hojas es $3 \times 2 \times 2 = 12$, que es el número total de divisores de 60. Observemos que en el producto $3 \times 2 \times 2$, 3 corresponde a la potencia

[7] Por ejemplo, de al menos 500 dígitos

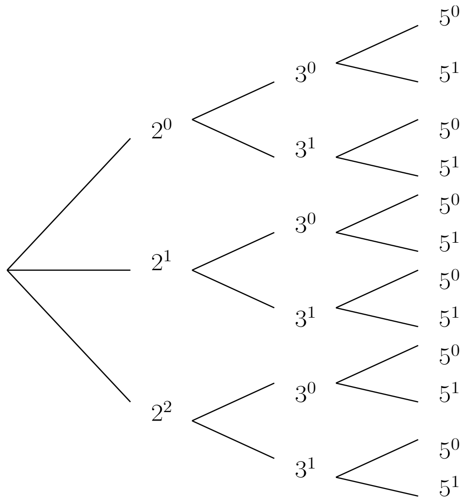


Figura 1.16: Contando divisores.

de 2 en la descomposición en factores primos de 60, aumentada en una unidad; el siguiente 2 corresponde a la potencia del 3, aumentada en una unidad; y el último 2 corresponde a la potencia del 5, aumentada en una unidad. Si consideramos ahora el caso más general de un número cuya descomposición en factores primos es

$$n = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdots p_n^{a_n},$$

los divisores de este número formarían un árbol, siguiendo el ejemplo de 60, que tendría

$$(a_1 + 1)(a_2 + 1) \cdots (a_n + 1)$$

hojas. Es decir, la cantidad de arriba es el número de divisores de n. Por cierto, observa que hubiera sido muy incómodo hacer todo este razonamiento si no dispusiéramos de lenguaje algebraico!

Para terminar este apartado, nos preguntamos cuántos números primos hay. La respuesta es que hay infinitos números primos, y es conocida desde la época de Euclides, un célebre matemático griego (300 a.C.) Para demostrarlo, vamos a razonar *por reducción al absurdo*: esto significa que vamos a suponer que un hecho es cierto, y vamos a ver que eso nos permite llegar a una conclusión que no tiene sentido; esto muestra que el hecho que supusimos cierto al principio debe ser erróneo. En concreto, supongamos que hay una cantidad finita, es decir, limitada, de números primos. En ese caso, podremos ordenarlos en una lista

$$\{p_1, p_2, \ldots, p_n\},$$

donde suponemos que $p_1 < p_2 < \cdots < p_n$. Consideremos entonces el número $N = p_1 \cdot p_2 \cdots p_n + 1$, que resulta al multiplicar todos los números de la lista anterior, y sumar 1. Claramente, este nuevo número N es mayor que todos los elementos de la lista, y por lo tanto no pertenece a ella. Además, ninguno de los p_i es un divisor de N, porque al dividir N por cualquiera de los p_i, se obtiene resto 1. Por lo tanto, N no tiene divisores primos, luego tiene que ser primo. Es decir, hemos encontrado un número primo, N, que no estaba en la lista $\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$; y esto resulta absurdo porque habíamos supuesto que esta lista encerraba todos los números primos.

Consecuencia: hay infinitos números primos. Un modo alternativo de verlo es que si tenemos n números primos diferentes, siempre puedo crear uno nuevo (multiplicándolos todos, y sumando uno); por tanto, no importa cuántos primos tenga ya, siempre puedo continuar creando nuevos primos.

El razonamiento anterior es, nuevamente, una *demostración*: es un argumento que permite establecer, de una vez y para siempre, la verdad de una afirmación.

1.7.3. Máximo común divisor.

Comencemos con un problema: queremos cubrir el suelo de una nave de 18 metros de largo por 12 metros de ancho con paneles de forma cuadrada. Por alguna razón nos interesa que los paneles sean lo más grandes posible. ¿Cuál es la longitud mayor que pueden tener los paneles? Si dibujamos el problema (véase la Figura 1.17), podemos observar que una posibilidad es que los paneles tengan 3 metros de lado; esa longitud funciona porque $18 = 3 \cdot 6$, y $12 = 3 \cdot 4$, luego no necesitamos cortar ningún panel. Otra posibilidad es que los paneles tengan 6 metros de lado, porque $18 = 6 \cdot 3$, y $12 = 6 \cdot 2$. De hecho, no hay ninguna otra posibilidad para cubrir el suelo con paneles de forma cuadrada, y puesto que lo que queremos es que el lado sea el mayor posible, la respuesta a la pregunta es: 9 metros. ¿Qué tienen en común las dos posibilidades que aparecen en Fig. 1.17? Las longitudes de los cuadrados correspondientes, 3 y 6, son divisores comunes de 18 y 12; y de ambos, 6 es el mayor. Por lo tanto, 6 es el mayor divisor común de 12 y 18, o, como se dice más habitualmente, el *máximo común divisor* de 12 y 18, abreviadamente $\mathrm{mcd}(12, 18)$.

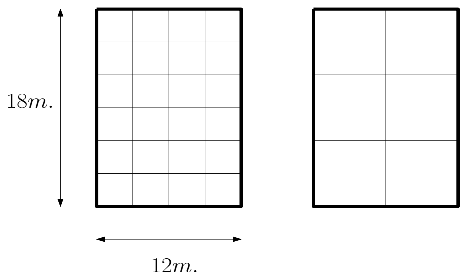


Figura 1.17: Cubriendo un terreno con paneles de forma cuadrada.

El *máximo común divisor* de dos números a y b, $\mathrm{mcd}(a, b)$, es el mayor número natural que es divisor al mismo tiempo de a y de b. A la hora de introducir este concepto, conviene entrenarse primero en su cálculo a partir de esta definición, antes de introducir ningún algoritmo. Por ejemplo, calculemos, a partir de esta definición, los siguientes mcds:

- $\mathrm{mcd}(12, 18)$: los divisores de 12 son $1, 2, 3, 4, 6, 12$; por otra parte, los divisores de 18, son $1, 2, 3, 6, 9, 18$; por lo tanto, el mayor número que aparece en ambas listas, es 6. Este es un método "a fuerza bruta"(es decir, es seguro pero demasiado largo; se puede hacer mejor).
- $\mathrm{mcd}(40, 15)$: en lugar de listar todos los divisores de uno y de otro, podemos tomar el menor de los dos números, 15 en este caso, e ir probando sus divisores en orden decreciente. El mayor divisor de 15 no divide a 40; en cambio, el siguiente es 5, que sí divide a 40. Por lo tanto, $\mathrm{mcd}(40, 15) = 5$.
- $\mathrm{mcd}(38478, 1)$: puesto que 1 sólo tiene un divisor (él mismo), no hay muchas opciones: $\mathrm{mcd}(38478, 1) = 1$.

- mcd$(38478, 0)$: como 38478 es un divisor de 0, se tiene que mcd$(38478, 0) = 38478$.

Como en otras ocasiones, el algoritmo tradicional debe introducise sólo después de que el concepto ha sido suficientemente practicado con ejercicios de este tipo. Veremos dos algoritmos, uno de ellos basado en la descomposición en factores primos, y otro, menos conocido, con ciertas ventajas que enumeraremos más adelante.

I. *A partir de la descomposición en factores primos.* Veámoslo con un ejemplo. Sabiendo que

$$17640 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7^2, \; 12474 = 2 \cdot 3^4 \cdot 7 \cdot 11,$$

¿cómo podemos calcular mcd$(17640, 12474)$?

Utilizando lo que ya sabemos sobre descomposición en factores primos, los divisores de 17640 son de la forma $2^i \cdot 3^j \cdot 5^k \cdot 7^\ell$, donde $i = 0, 1, 2, 3$, $j = 0, 1$, $k = 0, 1$, $\ell = 0, 1, 2$. A su vez, los divisores de 12474 son de la forma $2^i \cdot 3^j \cdot 7^k \cdot 11^\ell$, donde $i = 0, 1$, $j = 0, 1, 2, 3, 4$, $k = 0, 1$, $\ell = 0, 1$. Por lo tanto, para que un número sea divisor, a la vez, de 17640 y 12474, debe ser de la forma $2^i \cdot 3^j \cdot 7^k$, con $i = 0, 1$, $j = 0, 1, 2$, $k = 0, 1$. El mayor número de esta forma que podemos conseguir, aparece cuando $i = 1$, $j = 2$, $k = 1$, es decir, mcd$(17640, 12474) = 2 \cdot 3^2 \cdot 7 = 126$.

Si nos fijamos bien, lo que hemos hecho arriba es tomar *los divisores primos comunes de los dos números, elevados al menor exponente*, que es la regla que tal vez recordarás del colegio. Además, de lo anterior se desprende un segundo resultado: *los divisores comunes de dos números son los divisores de su máximo común divisor.*

II. *Algoritmo de Euclides.* El algoritmo anterior funciona perfectamente para números pequeños, es decir, para cálculos "a mano". Sin embargo puede funcionar mal para números grandes, que pueden ser difíciles de factorizar. Como vimos anteriormente, encontrar los factores primos puede ser una operación computacionalmente costosa (de hecho, el criptosistema RSA se basa en esto). Una alternativa computacionalmente mucho más eficiente, y a menudo ignorada en los libros de texto, es el muy antiguo algoritmo de Euclides, descrito por el matemático griego Euclides en su obra *Elementos* (en torno al 300 a.C.) El algoritmo se basa en el siguiente resultado:

Teorema 2. *Si $a = b \cdot q + r$, entonces los divisores comunes de a y b, son los mismos que los de b y r.*

Para demostar este resultado, necesitamos ver dos cosas: (1) que todo divisor común de a y b, es también un divisor común de b y r; fíjate que para ver esto, basta ver que un divisor común de a y b divide también a r; (2) que todo divisor común de b y r es también un divisor común de a y b, es decir, que todo divisor común de b y r también divide a a.

Veamos entonces (1): si c es un divisor común de a y b, entonces podemos escribir $a = a' \cdot c$, $b = b' \cdot c$. Como $a = b \cdot q + r$, entonces $r = a - b \cdot q$, y sustituyendo $a = a' \cdot c$, $b = b' \cdot c$, se tiene que $r = a' \cdot c - b' \cdot c \cdot q = c \cdot (a' - b' \cdot q)$; por lo tanto, c divide a r.

Veamos ahora (2): si d es un divisor común de b y r, entonces $b = b' \cdot d$, $r = r' \cdot d$. Como $a = b \cdot q + r$, entonces $a = b' \cdot d \cdot q + r' \cdot d = (b' \cdot q + r') \cdot d$; por lo tanto, d divide a a.

Podemos aprovechar el resultado anterior para calcular mcd(a, b). Para ello, seguiremos los siguientes pasos:

1. Suponemos que el mayor de los dos números cuyo máximo común divisor queremos calcular, es a. Dividimos a entre b, y obtenemos un cociente q, y un resto r que cumple $0 \leq r < b$.
2. Por el teorema anterior, $\mathrm{mcd}(a, b) = \mathrm{mcd}(b, r)$.
3. Repetimos el paso (1), es decir, dividimos b entre r, etc. En algún momento llegaremos a lo siguiente:
$$\mathrm{mcd}(a, b) = \mathrm{mcd}(b, r) = \cdots = \mathrm{mcd}(\star, 0),$$
donde $\star$ representa un número no nulo. Entonces el máximo común divisor buscado, es $\star$.

Los pasos (1) y (2) del algoritmo corresponden al teorema anterior. Sin embargo, es interesante ver por qué podemos asegurar que en algún momento vamos a llegar a algo del tipo $\mathrm{mcd}(\star, 0)$. La razón es que el resto r de la división que efectuamos en el paso (1), es el divisor de la división que efectuamos en el paso (2); del mismo modo, el resto r' de la división que efectuamos en el paso (2), es el divisor de la siguiente división, etc. Como cada resto es estrictamente menor que su divisor, tenemos que los restos $r, r', \cdots$ de las sucesivas divisones son estrictamente menores, cada vez. Como todos ellos son positivos, en algún momento tendremos que llegar a 0.

Por ejemplo, veamos cómo aplicar el Algoritmo de Euclides para calcular $\mathrm{mcd}(78, 42)$:

- Dividiendo 78 entre 42, se tiene $78 = 42 \cdot 1 + 36$; por tanto, $\gcd(78, 42) = \gcd(42, 36)$.
- Dividiendo 42 entre 36, se tiene $42 = 36 \cdot 1 + 6$; por tanto, $\gcd(42, 36) = \gcd(36, 6)$.
- Dividiendo 36 entre 6, se tiene $36 = 6 \cdot 6 + 0$; por tanto, $\gcd(36, 6) = \gcd(6, 0) = 6$.

Por tanto, $\mathrm{mcd}(78, 42) = 6$.

Si en lugar de dos números a y b tenemos varios números $a_1, a_2, \ldots, a_k$, la definición del máximo común divisor de todos ellos, es la misma: se trata del número más grande que divide a todos ellos. Para calcularlo podemos utilizar la descomposición en factores primos, y de nuevo la regla que vimos antes sigue siendo válida, o adaptar el Algoritmo de Euclides. No nos detendremos más en esto. No obstante, antes de pasar a la siguiente subsección, una última pregunta: ¿por qué se habla del máximo común divisor, pero no se habla del mínimo común divisor? (dejamos que el lector encuentre la respuesta).

1.7.4. Mínimo común múltiplo.

Comencemos, como en el caso del máximo común divisor, con un ejercicio: *dos faros emiten una señal especial cada 16 y 12 minutos, respectivamente. Sabiendo que emiten la señal a la vez a las 0 horas, cuándo coincidirán de nuevo, a partir de ese momento, por primera vez?* El primer faro emite su señal cada 16 minutos; por lo tanto, veremos esa señal al cabo de 16, 32, 48, 64, 80, etc. minutos; observemos que 16, 32, 48, etc. son los múltiplos de 16. Por otra parte, el segundo faro emite su señal cada 12 minutos, luego la veremos al cabo de 12, 24, 36, 48, 60, 72, etc. minutos, que son los múltiplos de 12. Por lo tanto, veremos simultáneamente ambas señales, por primera vez, a los 48 minutos, ya que 48 es el primer número que aparece en ambas listas. Puesto que 48 es el menor número que es múltiplo a la vez de 16 y 12, decimos que 48 es el *mínimo común múltiplo* de 16 y 12, y lo escribimos así: $\mathrm{mcm}(16, 12) = 48$. Observa también que cualquier otro múltiplo común de 16 y 12 será múltiplo de 48.

En general, dados dos números a y b, el mínimo común múltiplo de ambos, $\mathrm{mcm}(a, b)$, es el menor número que es múltiplo a la vez de a y de b. La definición se generaliza sin problemas al caso en que tenemos más de dos números. En el caso de 12 y 16, hemos podido calcular su mínimo común múltiplo comparando las listas de múltiplos de 12 y 16. Si tratamos con números más grandes esta estrategia es poco eficaz. Una estrategia mejor, como ya hicimos con el máximo común divisor, es utilizar la descomposición en factores primos. Para explorar esta cuestión tomamos los números 3591 y 14994, cuyas descomposiciones en factores primos son:

$$3591 = 3^3 \cdot 7 \cdot 19, \ 14994 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7^2 \cdot 17.$$

Si multiplicamos ambos números, obtenemos

$$2 \cdot 3^5 \cdot 7^3 \cdot 17 \cdot 19,$$

que es ciertamente múltiplo, a la vez, de 3591 y 14994, es decir, un múltiplo común de ambos. Sin embargo, no es el múltiplo común más pequeño que podemos obtener. Pensemos cuál es el mayor factor que podemos quitar de ese número para que la cantidad que quede siga siendo múltiplo de 3591 y 14994 a la vez. Resulta que ese factor es $3^2 \cdot 7$: efectivamente, para que un número sea múltiplo de 3591 debe contener 3^3, 7 y 19, y para que sea múltiplo de 14994 debe contener 2, 3^2, 7^2 y 17. Además, si el número contiene, por ejemplo, el factor 3^3, en particular contiene el factor 3^2, porque $3^3 = 3 \cdot 3^2 = 3^1 \cdot 3^2$. Por tanto, el menor número que es múltiplo a la vez de 3591 y 14994 es

$$2 \cdot 3^3 \cdot 7^2 \cdot 17 \cdot 19 = 122094.$$

De lo anterior, podemos extraer dos conclusiones. En primer lugar, si miramos con detenimiento los factores de la descomposición en factores primos anterior, hemos recuperado la regla que probablemente recordamos del colegio: *para calcular el mínimo común múltiplo de dos (o más) números, se toman los divisores comunes y los no comunes, elevados al mayor exponente.* Pero además, es posible reconocer que $3^2 \cdot 7 = \mathrm{mcd}(3591, 14994)$, de manera que

$$\mathrm{mcm}(3591, 14994) = \frac{3591 \cdot 14994}{\mathrm{mcd}(3591, 14994)}.$$

En general, cuando sólo tenemos dos números a y b se tiene que

$$\mathrm{mcm}(a, b) = \frac{a \cdot b}{\mathrm{mcd}(a, b)}.$$

En otras palabras, el producto de dos números es igual al de su mínimo común múltiplo y su máximo común divisor. De hecho, esta expresión es útil (por ejemplo, a la hora de programar esta tarea en un ordenador) para calcular el mínimo común múltiplo de dos números, ya que evita la descomposición en factores primos. Sin embargo, para más de dos números no es cierto que su producto sea igual al producto de su mínimo común múltiplo y su máximo común divisor.

Finalmente, en el caso de 3591 y 14994, observa que la descomposición en factores primos de cualquier múltiplo común de ambos números debe contener los factores 2, 3^3, 7^2, 17, 19, todos ellos ya presentes en el mínimo común múltiplo de ambos. Por lo tanto, cualquier múltiplo común de ambos es un múltiplo de su mínimo común múltiplo. Esto es cierto para cualquier par de números a, b, y también para más de dos números.

1.7.5. Reglas de divisibilidad.

Para finalizar este tema, vamos a justificar las reglas de divisibilidad por varios números. Recordemos que un número es *divisible* por otro, cuando la división del primero entre el segundo es exacta, es decir, da un resto nulo. Por ejemplo, 12 es divisible entre 3, pero no entre 5. Ciertamente, para averiguar si un número es divisible por otro podemos aplicar esta definición, realizar por tanto la división, y comprobar el valor del resto. Pero vamos a ver que en algunos casos se puede hacer de un modo sencillo, sin necesidad de hacer la división. Lo que vamos a hacer, de hecho, es calcular el resto de las divisiones, sin hacerlas, y para ello vamos a utilizar dos cosas: la expresión decimal del número, y una propiedad de los restos que veremos enseguida.

En los casos del 5, el 4 y el 8, vamos a usar simplemente propiedades inmediatas de los múltiplos de estos números. Como sabemos que los números que terminan en 0 o en 5 son múltiplos de 5, el resto de dividir un número entre 5 se puede obtener a partir de la cifra de las unidades: en efecto, como $3978 = 3975 + 3$, el resto de dividir 3978 entre 5 es 3. La misma idea sirve cuando dividimos entre 10 y, por supuesto, cuando dividimos entre 2.

Aunque no tenemos una caracterización tan sencilla de los múltiplos de 4, podemos recurrir a la observación de que 100 es múltiplo de 4 y, por tanto, cualquier múltiplo de 100 es múltiplo de 4. Por tanto, si queremos determinar el resto de 8653978 al dividir entre 4, escribimos $8653978 = 8653900 + 78$. Como al dividir 8653900 entre 4 el resto es 0, el resto de dividir 8653978 entre 4 es el igual al resto de didividr 78 entre 4, es decir, 2. La regla se podría enunciar de la siguiente forma: *"el resto de un número n al dividir por 4 es el mismo que el resto que se obtiene al dividir por 4 el número formado por las unidades y decenas de n"*.

Para obtener el resto al dividir por 8 la idea es muy parecida: aunque 100 no es múltiplo de 8, 1000 sí lo es (y, por tanto, todos los múltiplos de 1000 son múltiplos de 8). Pasa usar esta idea, descomponemos $8653978 = 8653000 + 978$ y el resto de dividir 8653978 entre 8 es el mismo que el de didividr 978 entre 8, es decir, 2 (esto último es una división mucho más corta que la original). Esta regla se podría enunciar: *"el resto de un número n al dividir por 8 es el mismo que el resto que se obtiene al dividir por 8 el número formado por las unidades, decenas y centenas de n"*.

Para calcular los restos al dividir por 3 y por 9 necesitamos una idea distinta, porque no hay múltiplos de estos números tan sencillos.

Regla de divisibilidad por 3. Consideremos de nuevo un ejemplo concreto,

$$4567 = 4 \cdot 1000 + 5 \cdot 100 + 6 \cdot 10 + 7 = 4 \cdot (999 + 1) + 5 \cdot (99 + 1) + 6 \cdot (9 + 1) + 7.$$

De nuevo, para repartir 4567, digamos, caramelos, en 3 grupos, empleamos el recurso de verlos organizados en 4 bolsas de 1000, 5 de 100, 6 de 10 y 7 caramelos "sueltos". Como $1000 = 999+1$, de cada bolsa de 1000 podremos repartir 999 en tres grupos sin ningún problema, y nos sobrará 1 caramelo; como tenemos 4 bolsas de ese tipo, nos sobran, de momento, 4 caramelos. Igualmente, de cada bolsa de 100 podremos repartir sin problemas 99 caramelos en tres grupos iguales, y nos sobra 1 caramelo; como hay 5 bolsas de ese tipo, nos sobran 5 caramelos más. De cada bolsa de 10 nos sobra un caramelo también, luego tras repartir en tres grupos los caramelos que vienen en bolsas de 10 nos sobran 6 caramelos. Y hay que añadir los 7 caramelos que venían "sueltos". Luego en total, nos falta por repartir $4 + 5 + 6 + 7 = 22$ caramelos. Por tanto, el resto que se obtiene al dividir 4567 entre 3 es el mismo que el que se obtiene al dividir 22 entre 3, es decir, 1. Lo que hemos hecho se podría escribir para el caso general sin más que recurrir al correspondiente lenguaje algebraico, que nos ahorraremos en este caso. Hemos visto, por tanto, que *el resto de un número al dividir por 3 se puede obtener sin más que dividir por 3 el número* *que se obtiene al sumar las cifras del original.* Observa que esto generaliza lo que seguramente recuerdes de la enseñanza media: *un número es divisible por 3 cuando la suma de sus cifras es múltipo de 3.*

Regla de divisibilidad por 9. La estrategia es la misma que antes: como $10 = 9+1$, $100 = 99+1$, $1000 = 999 + 1$, etc. de cada grupo de 10, 100, 1000 siempre vamos a dejar un elemento por repartir. El número de elementos que quedará por tanto por repartir, al final del proceso, coincide con la suma de las cifras del número. Por tanto, *el resto de un número al dividir por 9 se puede obtener sin más que dividir por 9 el número que se obtiene al sumar las cifras del original.*

Capítulo 2

Fracciones y proporciones.

2.1. El concepto de fracción.

El concepto tradicional con el que se introducen las fracciones es el de “parte de un todo”. En la Fig. 2.1, a la izquierda, hemos representado 2/3 de un círculo; el “3” (denominador) representa el número de partes *iguales* en las que hemos dividido a un objeto, y el “2” (numerador) representa el número de esas partes que hemos tomado. A la derecha de la Fig. 2.1 hemos representado 3/5 de un rectángulo.

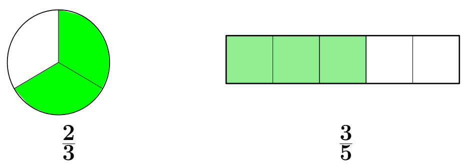


Figura 2.1: Fracciones, parte de un todo.

Otra interpretación de las fracciones es considerarlas como soluciones a un problema de reparto: si tenemos dos chocolatinas y las queremos repartir (por igual) entre tres niños, ¿cuánto chocolate debemos dar a cada niño? Para un niño que se está iniciando en el estudio de las fracciones la respuesta no es evidente. Al darnos cuenta de que podemos dividir cada chocolatina en tres partes iguales llegaremos a la conclusión de que cada niño debe recibir 2/3 de chocolatina, como se muestra en la figura 2.2. Aunque las nociones de “partes de un todo”, o de “soluciones a problemas de reparto”son intuitivas y sencillas, y deben utilizarse en los primeros contactos de los niños con las fracciones, tienen dos carencias. En primer lugar, necesitan un objeto al que referirse: tiene sentido hablar de 2/3 ó 3/5 *de* algo (una tarta, una herencia, una chocolatina, etc.) pero 2/3, 3/5, etc., por sí mismos, no parecen tener sentido. En segundo lugar, no permiten dotar convincentemente de sentido a una fracción como 7/5, en la que el numerador es mayor que el denominador[1].

Un enfoque alternativo, o complementario, que soluciona las dificultades anteriores es el de presentar las fracciones como *cantidades*, es decir, como puntos de la recta numérica, que no necesariamente corresponden a números enteros; en otras palabras, corresponden a un nuevo tipo de *número*, más general. Según este enfoque (véase Fig. 2.3.a), para representar 3/4 acudimos a

[1] Estas fracciones se llaman *impropias*

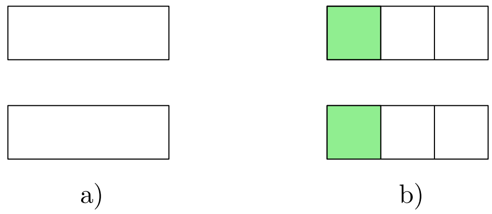


Figura 2.2: Fracciones, solución a un problema de reparto.

la recta numérica, tomamos la unidad, y la dividimos en cuatro partes iguales; cada una de esas cuatro partes representa $1/4$, luego $3/4$ corresponde a llevar tres veces, desde el 0, el segmento correspondiente a $1/4$. De esta manera, una fracción como $7/4$ no plantea ningún problema: para encontrar el punto de la recta numérica que le corresponde, llevamos 7 veces, desde el 0, el segmento correspondiente a $1/4$; el punto que resulta representa un número entre 1 y 2.

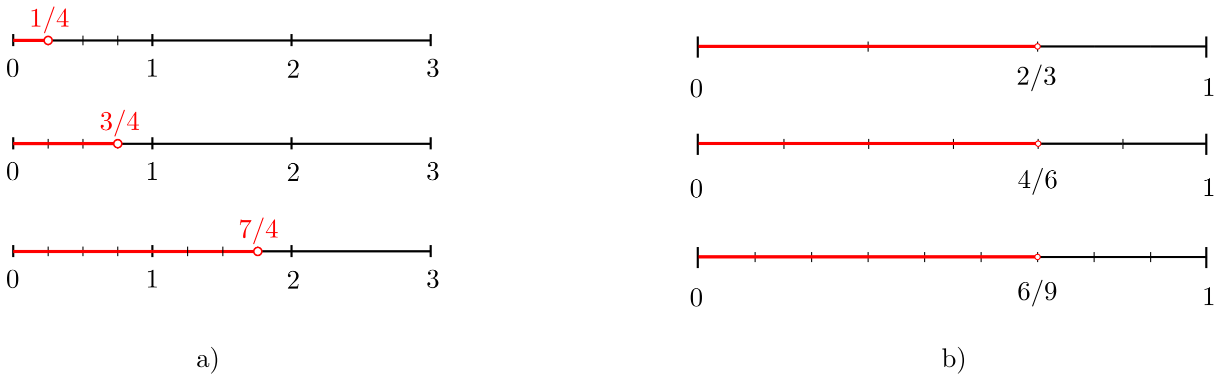


Figura 2.3: Las fracciones como puntos de la recta numérica.

Con mayor formalidad, definimos una **fracción** como un cociente de números enteros a/b, con $b \neq 0$, donde a recibe el nombre de *numerador*, y b recibe el nombre de *denominador*. Recurriendo a la recta numérica, a/b se corresponde con el punto que resulta del siguiente proceso: (1) dividimos la unidad en b partes iguales; (2) llevamos a de esas partes desde el 0. Si $a < b$, entonces la fracción puede, ciertamente, interpretarse como una parte de un todo.

Si en la fracción $2/3$ multiplicamos numerador y denominador por 2 obtenemos la fracción $4/6$, y si los multilicamos por 3 obtenemos $6/9$. Al representar estas fracciones en la recta numérica (Fig. 2.3.b) nos damos cuenta de que estas fracciones representan el mismo punto, es decir, la misma *cantidad*. Esto ocurre siempre que multiplicamos o dividimos numerador y denominador por el mismo número, y entender el por qué es esencial para la correcta comprensión de las fracciones. Hemos llegado al concepto de *fracciones equivalentes*, que es uno de los conceptos más importantes del tema, y que será básico para la aritmética: dos fracciones son equivalentes cuando representan la misma cantidad. ¿Cómo comprobar si dos fracciones son o no equivalentes? Haciendo lo que siempre se hace para comparar dos cantidades, expresar las dos en las mismas unidades. Como es el denominador el término que fija la unidad, lo que debemos hacer es expresar las dos con el mismo denominador: si queremos comparar las fracciones a/b y c/d, podemos usar como denominador bd, considerar $\dfrac{a}{b} = \dfrac{ad}{bd}$ y $\dfrac{c}{d} = \dfrac{bc}{bd}$, y comparar las fracciones

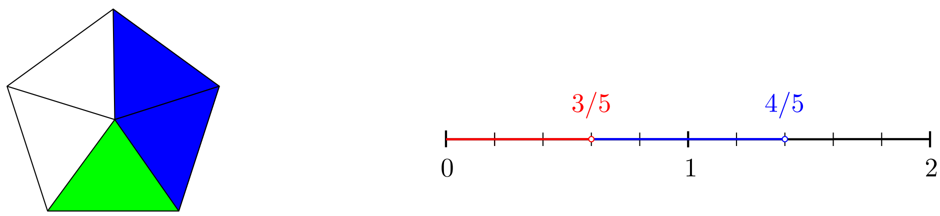
$\dfrac{ad}{bd}$ y $\dfrac{bc}{bd}$. Obsérvese que hemos llegado a la conocida "receta": las fracciones a/b y c/d son equivalentes si $ad = bc$.

Todo elemento de la recta numérica que corresponda a una fracción (de hecho, a un conjunto de fracciones equivalentes) es un **número racional**. El conjunto de todos los números racionales se representa por $\mathbb{Q}$. En particular, los números enteros corresponden a fracciones en las que el numerador es un múltiplo del denominador; por lo tanto, $\mathbb{Q}$ *amplía* el conjunto de los números enteros.

2.2. Operaciones con fracciones.

2.2.1. Suma de fracciones.

Según lo que hemos visto en la sección anterior, dos fracciones corresponden a dos puntos de la recta numérica, y por tanto a dos segmentos. Puesto que tiene sentido sumar segmentos[2], sumar fracciones tiene también sentido. Empezamos por el caso en que el denominador de ambas fracciones es el mismo. En este caso, la operación, como se muestra en Fig. 2.4.a, resulta natural: si interpretamos las fracciones como partes de un todo, puesto que el denominador es el mismo en ambos casos, sólo tenemos que sumar la cantidad de partes que estamos tomando, entre las dos fracciones: si pintamos 2/5 del pentágono de azul, y 1/5 de rojo, hemos coloreado 3/5 del pentágono.



$$\frac{2}{5} + \frac{1}{5} = \frac{3}{5} \qquad\qquad \frac{3}{5} + \frac{4}{5} = \frac{7}{5}$$

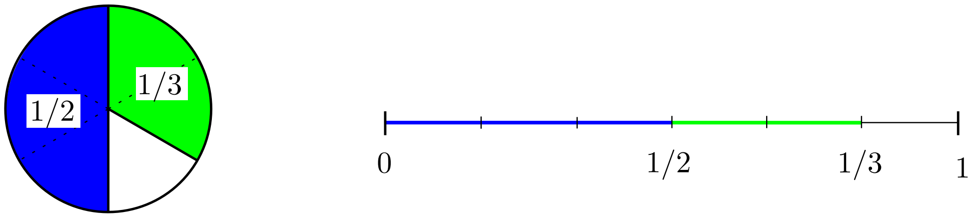
a) b)

Figura 2.4: Suma de fracciones con igual denominador.

En el caso de una suma como $3/5 + 4/5$, la interpretación anterior es problemática. Sin embargo, en este caso podemos recurrir a la recta numérica: al concatenar 3 segmentos de longitud 1/5 con 4 segmentos de longitud 1/5, obtenemos 7 segmentos de longitud 1/5 (Fig. 2.4.b).

¿Y qué ocurre cuando los denominadores son distintos? Como las unidades (los denominadores) son distintas, no se puede hacer la suma directamente. Pero una vez entendido el concepto de fracción equivalente es evidente cómo solucionar este problema: escribamos las dos fracciones con el mismo denominador, es decir, usando la misma unidad de referencia. Así, si queremos calcular $\frac{1}{2} + \frac{2}{3}$ podemos expresar las dos fracciones con denominador 6 (véase Fig. 2.5).

[2]Basta con hacer coincidir el extremo izquierdo de uno con el extremo derecho del otro, y considerar el segmento formado por la unión de ambos.



$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{3}{6}+\frac{2}{6}=\frac{5}{6}$$

Figura 2.5: Suma de fracciones con distinto denominador.

2.2.2. Multiplicación de fracciones.

El enfoque más extendido para definir la multiplicación de fracciones es limitarse al algoritmo, que es seguramente el más sencillo de la aritmética de fracciones. Por ello, este punto se suele tratar de forma rápida, y los problemas aparecen cuando hay que darle sentido a la multiplicación de fracciones, en el entorno de la resolución de problemas.

Una buena opción para dar sentido a la multiplicación de fracciones es partir de expresiones como “el doble de”, que en términos de multiplicación de enteros se escribe 2×6. Siguiendo esta idea, es natural interpretar $\frac{1}{2} \times (\cdot)$ como “un medio de ...” o “la mitad de ...”, es decir, $\frac{1}{2} \times 6 = \frac{6}{2} = 3$. Sin queremos calcular “un medio de 7”, las fracciones equivalentes vienen en nuestra ayuda: $\frac{1}{2} \times 7 = \frac{1}{2} \times \frac{14}{2} = \frac{7}{2}$. Esta interpretación se extiende de forma inmediata a la multiplicación por fracciones con denominador 1, y estamos además introduciendo una idea que es fundamental en la aritmética más avanzada y el álgebra: multiplicar por $\frac{1}{n}$ es equivalente a dividir por n.

Esta idea se extiende de forma natural a la multiplicación de dos fracciones. Por ejemplo, $\frac{1}{2} \times \frac{6}{5} = \frac{3}{5}$ (que es igual a $\frac{6}{10}$). Si ya sabemos multiplicar por fracciones con denominador 1, la extensión a fracciones en general es inmediata, solo con entender que 2/5 es “el doble de 1/5. Así, por ejemplo,

$$\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}=\frac{2}{5}\times\frac{3\times 5}{4\times 5}=2\times\frac{3}{20}=\frac{6}{20}$$

Hemos obtenido, por supuesto, un procedimiento de sobras conocido: “para multiplicar dos fracciones, se multiplican los numeradores y se multiplican los denomiadores”. Pero hemos intentado transmitir la idea de que calcular “$\frac{2}{3} \times$algo” significa tomar “los 2/3 de ese algo”. La figura 2.6.a resume el proceso: para calcular 2/5 de 3/4, coloreamos primero 3/4 del total. A continuación, dividimos esa región en 5 iguales, y nos quedamos con 2 de ellas (rayadas en la figura). Es decir, “2/5 de 3/4 es 6/20”, que es el producto de las fracciones.

La figura 2.6.b muestra que la multiplicación de fracciones generaliza la multiplicación de números naturales en el modelo de áreas: de la misma forma que en un rectángulo de 3×5 cuadrados hay un total de 15 cuadrados, si un rectángulo tiene base 3/4 y altura 2/3 su área será $\frac{3}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{6}{12}$.

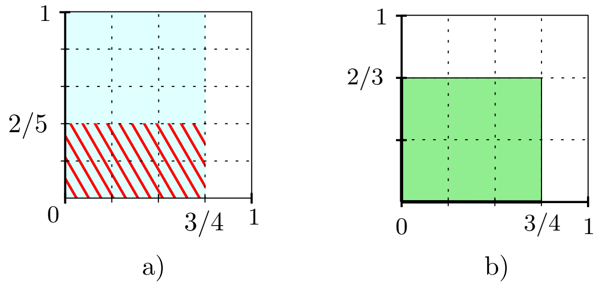


Figura 2.6: El producto $\frac{2}{5} \times \frac{3}{4}$.

2.2.3. División de fracciones.

En la división de fracciones hay que prestar la atención adecuada tanto al significado de la operación como al procedimiento (el algoritmo) para hacer la división. Cuando el divisor es una fracción, el significado de la división es siempre el de división cuotativa, ya que no tiene sentido "hacer un reparto entre 2/3". Por tanto, la interpretación de la división $\frac{8}{5} \div \frac{2}{3}$ será "¿cuántas veces cabe 2/3 en 8/5?". Las fracciones con denominador 1 son de nuevo un buen recurso para entender mejor esto. La división $3 \div \frac{1}{5}$ se interpreta como "¿cuántos quintos hay en 3 unidades?", o "¿cuántas botellas de 1/5 de litro podemos llenar con 3 litros de agua?". Dicho así, debería ser evidente (la Fig. 2.7 es una ayuda adicional) que $3 \div \frac{1}{5} = 3 \times 5 = 15$. Nos hemos encontrado con otro principio importante: dividir por $1/n$ es equivalente a multiplicar por n. Este hecho nos servirá para introducir uno de los procedimientos para la división de fracciones. Veremos dos algoritmos, cada uno con sus ventajas e inconvenientes:

1. Reducción a común denominador: si queremos ver cuántas veces cabe 2/3 en 8/5, podemos escribir
$$\frac{8}{5} \div \frac{2}{3} = \frac{24}{15} \div \frac{10}{15} = \frac{24}{10}$$
¿Cuántas veces cabe 10/15 en 24/15? Pues las mismas que 10 en 24, ya que 15, el denominador, es la unidad de medida y es común a ambos. En general,
$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} \div \frac{bc}{bd} = \frac{ad}{bc}$$
(Por supuesto, hemos llegado a la conocida receta de "multiplicar en cruz").

2. Enfoque algebraico: generalizando a partir de las ideas de que dividir por n es equivalente a multiplicar por $1/n$ (como en $6 \div 2 = 6 \times 1/2$) y de que dividir por $1/n$ es equivalente a multiplicar por n, como hemos dicho hace unas líneas, dividir por p/q es equivalente a multiplicar por q/p (la *fracción inversa* de p/q. Este es el origen del procedimiento "internacional" del "invierte y multiplica" para dividir fracciones:
$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$
De nuevo, el resultado es el de nuestra multiplicación en cruz. Ni el "invierte y multiplica" ni el "multiplica en cruz" son algoritmos que permitan entender el sentido de la operación a un alumno de primaria. Sin embargo, creemos que, desde el punto de vista puramente procedimental, el "invierte y multiplica" tiene la ventaja de que evita el error más común en nuestras aulas, que es la confusión entre numerador y denominador del resultado.

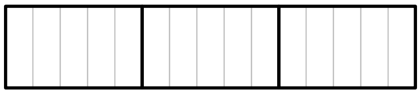


Figura 2.7: La división $3 \div \frac{1}{5}$.

2.3. Orden en $\mathbb{Q}$.

Intuitivamente, decimos que un conjunto está *ordenado* cuando en el conjunto tenemos una noción de qué es ser *mayor* o *menor*. Dados dos números racionales, y al igual que ya hicimos con los números naturales, podemos ver si el primero es o no menor que el segundo restando ambos, y comprobando si el resultado es positivo, o no. Otro modo de hacerlo es reducir a común denominador, y comprobar cuál de los dos numeradores es mayor. Por ejemplo, para comparar 1/4 y 3/8, podemos comprobar que

$$\frac{3}{8} - \frac{1}{4} = \frac{3}{8} - \frac{2}{8} = \frac{1}{8},$$

que es una cantidad positiva; por lo tanto, $1/4 < 3/8$. Otro modo de verlo es observar que $1/4 = 2/8$; como 2/8 y 3/8 tienen el mismo denominador, basta comparar los numeradores para ver que 3/8 es mayor.

La relación $<$ (*ser menor que*), sobre $\mathbb{Q}$, tiene dos propiedades llamadas *de monotonía*, que esencialmente nos dicen cómo se comporta esa relación frente a sumas y productos; en lo que sigue, a, b, c representan números racionales[3]:

(1) *Si $a < b$, entonces $a+c < b+c$ para todo número racional c.* Esto significa, por ejemplo, que si $\frac{1}{4} < \frac{3}{8}$, cuando sumamos o restamos una misma fracción a ambos lados de la desigualdad, esta continúa siendo cierta. Por ejemplo, si sumamos $\frac{1}{4}$ a ambos lados de la desigualdad $\frac{1}{4} < \frac{3}{8}$, obtenemos $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ a la izquierda, y $\frac{3}{8} + \frac{1}{4} = \frac{5}{8}$ a la derecha. Como $\frac{1}{2} = \frac{4}{8} < \frac{5}{8}$, efectivamente la desigualdad se mantiene.

(2) *Si $a < b$, y $c > 0$, entonces $a \cdot c < b \cdot c$.* Esto significa que al multiplicar una desigualdad de números racionales por un número racional *positivo*, la desigualdad también se mantiene. Que el número sea positivo es esencial. Por ejemplo, volviendo a $\frac{1}{4} < \frac{3}{8}$, multiplicando por 8 tendríamos $8 \cdot \frac{1}{4} = 2$, a la izquierda, y $8 \cdot \frac{3}{8} = 3$, a la derecha; como $2 < 3$, la desigualdad se ha mantenido. Sin embargo, si multiplicamos por -8, que es negativo, tendríamos -2 a la izquierda y -3 a la derecha, y $-2 > -3$ (es "mejor"deber 2, que deber 3). Es decir, al multiplicar por un número negativo, la desigualdad ha cambiado de sentido!!!

Podemos aprovechar las dos propiedades anteriores para resolver la siguiente *inecuación*:

$$\frac{3}{8} - 2x < \frac{1}{4}.$$

La inecuación anterior se pregunta cómo debe ser un número racional x para que al sustraer de 3/8 el doble de dicho número, el resultado sea inferior a 1/4. Aprovechando la propiedad (1),

[3] Es decir, en vez de a podríamos escribir, por ejemplo, p/q, y en vez de b, r/s, porque se trata de fracciones; pero escribimos a, b, etc. porque es más corto!!

podemos sumar $2x$ a ambos lados, con lo que tenemos

$$\frac{3}{8} < \frac{1}{4} + 2x.$$

Restando ahora $\frac{1}{4}$ a ambos lados, de nuevo por la propiedad (1), tendremos

$$\frac{3}{8} - \frac{1}{4} < 2x,$$

con lo que

$$\frac{1}{8} < 2x.$$

Finalmente, si, aprovechando la propiedad (2), multiplicamos la desigualdad anterior por $\frac{1}{2}$ (que es positivo!!), tenemos

$$\frac{1}{16} < x.$$

Por lo tanto, los números racionales que verifican la propiedad pedida son los mayores de $\frac{1}{16}$. Observa que el efecto de (1) es el popular "lo que está sumando pasa restando, y viceversa", mientras que el efecto de (2) es el no menos popular "lo que está multiplicando pasa dividiendo, y viceversa".

Sin embargo, aunque $\mathbb{Q}$ está ordenado, aparecen fenónemos que no aparecían en $\mathbb{N}$. Por ejemplo, en $\mathbb{N}$ no sólo tenemos un orden, sino que además cada elemento sabe quién le sigue, y quién le precede: a 18 le sigue 19, y le precede 17. Sin embargo, eso no sucede en $\mathbb{Q}$. Podríamos pensar que a una fracción como $\frac{1}{2}$ le "sigue" $\frac{2}{2}$. Sin embargo, entre $\frac{1}{2}$ y $\frac{2}{2}$ (observa que $\frac{2}{2} = 1$) tenemos, por ejemplo, $\frac{3}{4}$. Pero $\frac{3}{4}$ tampoco sigue a $\frac{1}{2}$, porque entre $\frac{1}{2}$ y $\frac{3}{4}$ podemos encontrar fácilmente otra fracción: tomando la media de $\frac{1}{2}$ y $\frac{3}{4}$, es decir, sumándolas y dividiendo el resultado entre 2, obtenemos $\frac{5}{8}$ (ver Fig. 2.8). De hecho, repitiendo esto indefinidamente, podemos encontrar... infinitas fracciones entre $\frac{1}{2}$ y $\frac{2}{2}$!!! Con mayor generalidad, entre dos números racionales cualesquiera siempre podemos encontrar *infinitos* números racionales!! Expresamos esto diciendo que $\mathbb{Q}$ es **denso**, lo cuál significa que entre dos puntos distintos de la recta numérica, tenemos infinitos números racionales.

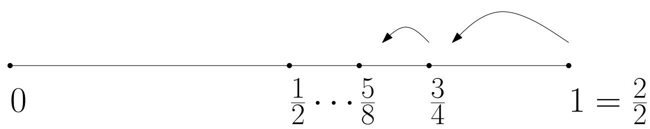


Figura 2.8: Encontrando fracciones entre $\frac{1}{2}$ y $\frac{2}{2}$.

2.4. Números irracionales.

Puesto que $\mathbb{Q}$ es denso, gracias a las fracciones (es decir, los números racionales), hemos conseguido llenar mucho más la recta numérica, que antes estaba bastante vacía. Uno podría preguntarse si hemos conseguido llenarla por completo. La respuesta es que *no*: hay puntos en la recta numérica que *no* pueden representarse como una fracción. Estos puntos corresponden a números que se llaman *irracionales*. Y aunque pueden parecer raros, hay muchos, y algunos ya los conocemos: por ejemplo, π es así; y también $\sqrt{2}$, y de hecho cualquier raíz que no sea entera. Demostrar la irracionalidad de un número, en general, puede ser muy complicado, pero en el caso de, por ejemplo, $\sqrt{2}$, es asumible. Así que demostrémoslo.

Teorema 3. *$\sqrt{2}$ es irracional.*

Para demostrarlo vamos a proceder, como ya hicimos en alguna ocasión anterior, por *reducción al absurdo*. Es decir, vamos a partir de una cierta suposición inicial, vamos a ir deduciendo conclusiones lógicas a partir de dicha suposición, y en un cierto momento de la cadena de deducciones, vamos a llegar a una contradicción: si nuestra suposición inicial nos condujo a una contradicción, entonces nuestra suposición inicial debe ser falsa.

1. Supongamos que $\sqrt{2}$ es racional. Entonces, podemos escribir $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, teniendo además la precaución de simplificar la fracción, para que $\frac{p}{q}$ sea irreducible.

2. Despejando p y elevando al cuadrado, obtenemos que $p^2 = 2q^2$, de donde se deduce que p^2 es un número par.

3. El hecho de que p^2 sea par implica que p también es par (el lector debería pararse un minuto para asegurarse de que esto es cierto).

4. Como p es par, podemos escribir $p = 2k$, y sustituyendo esto en la expresión $p^2 = 2q^2$ obtenemos $4k^2 = 2q^2$, de donde se deduce que $q^2 = 2k^2$.

5. Pero como $q^2 = 2k^2$, q^2 es un número par y por tanto (igual que antes) q también es par.

6. Hemos deducido que p y q son pares, lo que es imposible, ya que p/q era una fracción irreducible.

Cuando unimos el conjunto de los números racionales con el conjunto de los números irracionales, tenemos el conjunto de los **números reales**, $\mathbb{R}$, que es el conjunto formado por todos los puntos de la recta numérica.

2.5. Números decimales.

Los números decimales cumplen la función de representar cantidades no enteras. Puesto que esta es también, desde un punto de vista práctico, una de las funciones de las fracciones, resulta natural pensar que debe existir una relación entre ambos. En efecto, los números decimales se definen a partir de las fracciones; por ejemplo, el número 234,537 corresponde a la siguiente cantidad:

$$234{,}537 = 234 + \frac{5}{10} + \frac{3}{100} + \frac{7}{1000}.$$

Los dígitos de la *parte decimal* del número, que es la que aparece después de la coma, reciben, por orden de izquierda a derecha, los nombres de *décimas* (en nuestro caso, 5), *centésimas* (3 en nuestro caso), *milésimas* (7 en nuestro caso), *diezmilésimas*, *cienmilésimas*, *millonésimas*, etc. El valor real del dígito correspondiente a las décimas se obtiene dividiendo por 10, el del dígito de las centésimas dividiendo por 100, el de de las milésimas por 1000, etc. Del mismo modo que 10 unidades hacen una decena, 10 decenas una centena, etc., 10 milésimas hacen una centésima, 10 centésimas hacen una décima, 10 décimas una unidad, etc.

Una consecuencia inmediata de esta definición es que los números decimales con una cantidad finita de decimales provienen de una fracción cuyo denominador es una potencia de 10 (es decir, una *fracción decimal*); en el número del ejemplo,

$$234{,}537 = 234 + \frac{5}{10} + \frac{3}{100} + \frac{7}{1000} = \frac{234000 + 500 + 30 + 7}{1000} = \frac{234537}{1000}.$$

Observamos que en el numerador de la fracción anterior tenemos el número sin la coma, y en el denominador tenemos un 1 seguido de tres ceros, que es la cantidad de cifras decimales que posee el número. Este hecho es esencial para justificar apropiadamente las operaciones con números decimales.

Además, si recordamos cómo tratar potencias de exponente negativo, podemos ver que esta nueva representación es una continuación natural de la que hemos utilizado hasta ahora. En concreto, recordemos que 10^{-n}, donde $n \in \mathbb{N}$, se define como

$$10^{-n} = \frac{1}{10^n}. \tag{2.1}$$

Esta definición proviene de la bien conocida propiedad sobre el cociente de potencias de la misma base:

$$\frac{10^m}{10^n} = 10^{m-n}. \tag{2.2}$$

Si hacemos $m = n$, en la fracción anterior tenemos, a la izquierda, el mismo número en el numerador y el denominador, luego ese cociente es igual a 1; a la izquierda, en cambio, tenemos $10^{n-n} = 10^0$. Esta es la razón de que $10^0 = 1$. Si ahora imponemos $m = 0$ en (2.2), se tiene (2.1). De este modo, $\frac{1}{10} = 10^{-1}$, $\frac{1}{100} = 10^{-2}$, $\frac{1}{1000} = 10^{-3}$, etc. Por lo tanto, para un número como 234,537 tenemos

$$234{,}537 = 2 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0 + 5 \cdot 10^{-1} + 3 \cdot 10^{-2} + 7 \cdot 10^{-3}.$$

Con mayor generalidad, una expresión del tipo $a_n \cdots a_1 a_0, a_{-1} a_{-2} \cdots a_{-m}$, responde a

$$a_n \cdot 10^n + \cdots a_1 \cdot 10^1 + a_0 \cdot 10^0 + a_{-1} \cdot 10^{-1} + a_{-2} \cdot 10^{-2} + \cdots + a_{-m} \cdot 10^{-m}.$$

Esta definición de los números decimales nos permite justificar las operaciones que realizamos con este tipo de números:

(1) **Suma y resta.** Del mismo modo que en el caso de los números naturales sumamos unidades con unidades, decenas con decenas, etc., ahora, además, debemos sumar décimas con décimas, centésimas con centésimas, etc. Puesto que 10 centésimas hacen 1 décima, 10 décimas hacen 1 unidad, etc., las llevadas funcionan igual con números decimales.

(2) **Multiplicación.** Una multiplicación con números decimales es, en realidad, un producto de fracciones. Por ejemplo,

$$2{,}3 \times 4{,}2 = \frac{23}{10} \times \frac{42}{10} = \frac{23 \times 42}{100} = \frac{966}{100} = 9{,}66.$$

En el numerador de la fracción $\frac{966}{100}$ tenemos el resultado de multiplicar las dos cantidades decimales, ignorando las comas. En el denominador tenemos 100, y observamos que el número de ceros corresponde a sumar el número de decimales de las cantidades que estamos multiplicando. En consecuencia, el número de decimales del resultado es la suma del número de decimales de las cantidades que multiplicamos. En la práctica suele tenerse en cuenta esta última regla, sin pasar a fracción:

$$\begin{array}{r} 2{,}3 \\ \times\, 4{,}2 \\ \hline 4\ 6 \\ 9\ 2\ \ \\ \hline 9{,}6\ 6 \end{array}$$

(3) **División.** Una división de números decimales es, de hecho, una división de fracciones. Por ejemplo,

$$2{,}25 \div 1{,}5 = \frac{225}{100} : \frac{15}{10} = \frac{225 \cdot \cancel{10}}{15 \cdot 10\cancel{0}} = \frac{225}{150}.$$

Al dividir 225 entre 150, obtenemos cociente 1, y resto 75. Por lo tanto $225 = 1 \cdot 150 + 75$, con lo que

$$\frac{225}{150} = \frac{1 \cdot 150 + 75}{150} = \frac{1 \cdot 150}{150} + \frac{75}{150} = 1 + \frac{75}{150}.$$

Además, simplificando entre 15, se tiene $\frac{75}{150} = \frac{5}{10}$, luego

$$\frac{225}{150} = 1 + \frac{5}{10} = 1{,}5.$$

Resulta más habitual proceder del siguiente modo: en primer lugar, multiplicamos tanto 2,25 como 1,5 por 1 seguido de tantos ceros como sea necesario para quitar los decimales de ambas cantidades. En concreto, puesto que 2,25 tiene dos decimales y 1,5 sólo tiene uno, multiplicamos por 100, obteniendo de este modo 225 y 150, que es lo que nos sugiere la fracción $\frac{225}{150}$. Después realizamos la división entera $250 \div 150$, pero al obtener como resto 75, *extraemos decimales*. En realidad, *extraer decimales* consiste simplemente en realizar la división entera $75 \div 150$ a continuación de la división entera $250 \div 150$, pero teniendo en cuenta que en el resultado tendremos 0 unidades: puesto que no es posible repartir 75 unidades entre 150, a cambio repartimos 750 décimas entre 150. Más concretamente, procedemos de la siguiente manera:

$$\begin{array}{r|l} 2\ 2\ 5\ \ \ & 1\ 5\ 0 \\ \cline{2-2} 7\ 5\ 0 & 1{,}5 \\ 0 & \end{array}$$

Al *extraer decimales*, a veces obtendremos una cantidad finita de decimales, como en el ejemplo anterior, y a veces obtendremos una cantidad infinita, como en el caso de 1/3:

$$\begin{array}{l|l} 1 & 3 \\ \cline{2-2} 1\ 0 & 0{,}3\ 3\ 3 \\ \ \ 1\ 0 & \\ \ \ \ \ 1\ 0 & \\ \ \ \ \ \ \ 1 & \end{array}$$

2.6. Expresión decimal de una fracción.

Dada una fracción $\frac{a}{b}$, el número decimal que se obtiene al dividir $a \div b$ recibe el nombre de **expresión decimal** de la fracción. Estas expresiones decimales sólo pueden ser de dos tipos: las expresiones *decimales exactas*, que tienen una cantidad finita de decimales (por ejemplo, $2, 25$), o las expresiones *decimales periódicas*, en las que hay un bloque de decimales que se repite indefinidamente. Ejemplos del segundo tipo son

$$0{,}333\ldots = 0,\overline{3} \qquad 3{,}241241... = 3,\overline{241},$$

y también

$$2{,}0454545\ldots = 2{,}0\overline{45} \qquad 13{,}4563278278278\ldots = 13{,}4563\overline{278}.$$

El bloque de decimales que se repite recibe el nombre de *periodo.* En el caso de $0,\overline{3}$ y $3,\overline{241}$, el periodo aparece inmediatamente después de la coma; a estos números se les llama *periódicos puros.* En el caso de $2,0\overline{45}$ y $13,4563\overline{278}$ hay un bloque intermedio entre la coma y el periodo; a estos números se les llama *periódicos mixtos*, y el bloque que no se repite, situado entre la coma y el periodo, se llama *anteperiodo.*

No es obvio que al dividir dos números enteros se obtenga necesariamente o bien una expresión decimal exacta, o bien un número periódico. Sin embargo, efectivamente es así.

Teorema 4. *La expresión decimal de una fracción es o bien exacta, o bien periódica.*

Antes de justificar este resultado, conviene observar que no todas las expresiones decimales son exactas o periódicas. Por ejemplo, la expresión decimal

$$2,31331333133331\ldots$$

no es ni exacta (porque tiene infinitas cifras decimales) ni periódica (porque no hay ningún bloque que se repita indefinidamente: después de cada 1 aparece un número siempre creciente de treses). El teorema anterior implica que una expresión decimal de este tipo **no** proviene de ninguna fracción. Veamos entonces por qué el teorema anterior es cierto. La clave está en recordar que en la división entera, el resto es un número positivo estrictamente menor que el divisor; eso implica que durante el proceso de división, sólo hay una cantidad finita de valores que puede tomar el resto cuando estamos extrayendo decimales. Pensemos por ejemplo en la expresión decimal correspondiente a la fracción $\frac{791}{333}$. Al dividir, hay 333 valores posibles que puede tomar el resto. Además, si en algún momento el resto toma el valor 0, la división termina, y la expresión decimal obtenida es exacta (porque tiene una cantidad finita de decimales). Y si en algún momento se repite un valor que ya apareció antes, a partir de ese momento se van a repetir todos los valores entre esas dos repeticiones, y la expresión decimal es periódica. Por ejemplo, en el caso de $\frac{791}{333}$:

$$\begin{array}{l|l}
7\,9\,1 & \underline{3\,3\,3} \\
1\,2\,5\,0 & 2{,}3\,7\,5 \\
\quad 2\,5\,1\,0 & \\
\qquad 1\,7\,9\,0 & \\
\qquad\quad 1\,2\,5 &
\end{array}$$

Observamos entonces que en el cuarto paso aparece de nuevo 125, que ya apareció al principio. A partir de este momento va a repetirse toda la secuencia, luego $\frac{791}{333} = 2,\overline{375}$. En cualquier otro ejemplo que consideremos vamos a tener una situación similar, porque como el resto sólo puede tomar una cantidad finita de valores, en algún momento o bien será cero, o bien repetirá un valor que ya tomó antes. Obsérvese que hemos encontrado una cota para la longitud del periodo de la expresión de una fracción: el tamaño de periodo y anteperiodo de una fracción decimal es menor que el denominador de la fracción.

Recíprocamente, cualquier expresión decimal exacta o periódica proviene de una fracción irreducible, que llamamos su *fracción generatriz*. Veremos ahora cómo obtener la fracción generatriz de las expresiones decimales exactas y periódicas, pero antes de ello observemos que esta observación, junto con el Teorema 4, implican que los números irracionales, es decir, los números que no provienen de fracciones, necesariamente tienen expresiones decimales infinitas no periódicas; en particular, el desarrollo decimal de números como $\sqrt{2}$ ó π, es así.

- **Fracción generatriz de una expresión decimal exacta.** Un decimal exacto se puede convertir en fracción sin más que multiplicar y dividir por la potecia de diez aecuada Por ejemplo,
$$1{,}25 = \frac{1{,}25 \times 100}{100} = \frac{125}{100}.$$
- **Fracción generatriz de una expresión decimal periódica pura.** Veamos la técnica a emplear con un ejemplo concreto, $2,\overline{375}$. Procedemos del siguiente modo:
  (1) Llamamos N a la fracción que buscamos; el valor de esa fracción es igual a $2,\overline{375}$, luego podemos escribir
  $$N = 2{,}375375\ldots \tag{2.3}$$
  (2) Queremos obtener otro número con la misma parte decimal, para que al restar las igualdades se cancelen las partes decimales. Obsérvese que esto se puede hacer sólo cuando la expresión decimal esperiódica. Como el periodo de $2,\overline{375}$ consta de 3 cifras, vamos a multiplicar la igualdad (2.3) por 1000. En general, multiplicamos la igualdad por 1 seguido de tantos ceros como cifras haya en el periodo. Tras multiplicar, obtenemos
  $$1000N = 2375{,}375375\ldots \tag{2.4}$$
  Obsérvese que en el término de la derecha de las igualdades (2.3) y (2.4) aparecen dos números decimales cuyos decimales son *los mismos*.
  (3) Restamos las expresiones (2.4) y (2.3): como $2375{,}375375\ldots$ y $2{,}375375\ldots$ tienen los mismos decimales, su diferencia es un número entero, $2375 - 2 = 2373$:
  $$\begin{array}{rcl} 1000\text{ N} & = & 2375{,}\cancel{375375}\ldots \\ \text{N} & = & 2{,}\cancel{375375}\ldots \\ \hline 999\text{N} & = & 2373, \end{array}$$
  de donde obtenemos $999N = 2373$, luego $N = \frac{2373}{999} = \frac{791}{333}$.
- **Fracción generatriz de una expresión decimal periódica mixta.** Veamos la técnica a emplear con un ejemplo concreto, $2,3\overline{75}$. Procedemos del siguiente modo:
  (1) Llamamos N a la fracción que buscamos; el valor de esa fracción es igual a $2,3\overline{75}$, luego podemos escribir
  $$N = 2{,}37575\ldots \tag{2.5}$$
  (2) Lo que haremos será transformar este decimal en uno periódico puro, para poder aplicar la técnica anterior. Esto se consigue en este caso multiplicando por 10 (y, en general, multiplicando por 10^k, donde k será el número de cifras del anteperiodo). Tras la multiplicación obtenemos
  $$10N = 23{,}7575\ldots \tag{2.6}$$

(3) Como el número decimal a la derecha de la igualdad (2.6) tiene un periodo de dos cifras, y como hicimos en el caso anterior, multiplicamos la igualdad (2.6) por 1 seguido de dos ceros, es decir, por 100. De ese modo, obtenemos

$$1000N = 2375{,}7575\ldots \tag{2.7}$$

Ahora, como ya sucedía en el caso anterior, tenemos a la derecha de las igualdades (2.6) y (2.7) dos números periódicos puros con los mismos decimales.

(4) Restamos las expresiones (2.6) y (2.7): como $2375{,}7575\ldots$ y $23{,}7575\ldots$ tienen los mismos decimales, su diferencia es un número entero, $2375 - 23 = 2352$:

$$\begin{array}{rcl} 1000\text{ N} & = & 2375\cancel{,7575}\ldots \\ 10\text{ N} & = & 23\cancel{,7575}\ldots \\ \hline 990\text{ N} & = & 2352, \end{array}$$

de donde obtenemos $990N = 2352$, luego $N = \frac{2352}{990} = \frac{352}{165} = \frac{32}{15}$.

Observemos que restar las igualdades (2.6) y (2.5) no habría funcionado, porque los números decimales a la derecha de ambas igualdades no tienen los mismos decimales.

2.7. Razones y proporciones.

Una **razón** es una relación entre dos magnitudes. Por ejemplo, si decimos que en un cierto examen la razón entre aprobados y suspensos es de 4 a 3, estamos diciendo varias cosas: para empezar, que cuando dividimos el número de aprobados entre el número de suspensos, y simplificamos, obtenemos la fracción $\frac{4}{3}$; que hay más aprobados que suspensos (aunque no muchísimos más); que por cada 3 suspensos, hay 4 aprobados; y por lo tanto, que si sólo tuviéramos 7 estudiantes, 3 de ellos habrían suspendido y 4 habrían aprobado, y en consecuencia la *fracción* de estudiantes suspensos es $\frac{3}{7}$, y la de estudiantes aprobados, $\frac{4}{7}$. Un ejemplo de razón, muy presente en la vida cotidiana, aparece al especificar el formato de una pantalla. Cuando se escribe que una pantalla tiene formato 16 : 9 ó 4 : 3, lo que se está especificando es la razón entre la base y la altura de la pantalla (la notación ":" para la razón es la más extendida a nivel internacional, pero ha desaparecido de nuestro sistema educativo).

Algunas observaciones:

- las magnitudes que intervienen en la razón pueden tener distinta naturaleza; por ejemplo, podemos hablar de un vehículo con un consumo de 6 litros cada 100 km, lo que implica que la razón entre el número de litros consumidos y el número de kilómetros recorridos, es $\frac{6}{100}$.
- la razón entre dos magnitudes no necesariamente es un número racional. Por ejemplo, si L es la longitud de una circunferencia y d su diámetro, la razón $\frac{L}{d}$ no es más que el número $= \pi$ (que es un número irracional).

Un ejemplo importante de razón, en la vida real, es la *escala* de los planos o mapas. Cuando decimos que la escala de un mapa es de 1 : 20000, queremos decir que 1 cm del mapa equivale a 20000 cm de la realidad, es decir, que el cociente de la longitud de un tramo en el mapa, y la longitud del mismo tramo en la realidad, es $\frac{1}{20000}$.

Una **proporción** es una igualdad entre dos razones. Por ejemplo: *en un cierto examen, la razón entre aprobados y suspensos es de 4 a 3. Si suspendieron 81 alumnos, ¿cuántos aprobaron?* Si representamos el número de aprobados por a, se tiene que

$$\frac{4}{3} = \frac{a}{81},$$

de donde $a = \frac{4 \cdot 81}{3} = 108$. Si y representa la variable "número de aprobados", y x la variable "número de suspensos", en este ejemplo se tiene que

$$\frac{y}{x} = \frac{4}{3},$$

es decir, el cociente entre y y x es constante, e igual a $\frac{4}{3}$; de hecho, a partir de esta relación tenemos que $y = \frac{4}{3}x$, de donde puede obtenerse el valor de una de las variables, conocido el valor de la otra.

Definición 2. *Decimos que dos variables x e y son* **directamente proporcionales***, si su cociente es constante.*

Para ilustrar la definición anterior, vamos a considerar la relación entre el *lado* de un cuadrado, ℓ, y el *perímetro* de un cuadrado, P. Recordemos que el perímetro de un polígono es la suma de las longitudes de los lados, y por lo tanto $P = 4\ell$. A partir de esta relación, se tiene que

$$\frac{P}{\ell} = 4,$$

es decir, el cociente entre P y ℓ siempre tiene el mismo valor, 4, independientemente del valor de ℓ. Por lo tanto, P y ℓ son variables directamente proporcionales. Sin embargo, consideremos ahora la relación entre el *área* de un cuadrado, A, y el lado del cuadrado, ℓ, que es $A = \ell^2$. Podemos ver que en este caso el cociente entre A y ℓ no es constante, sino que

$$\frac{A}{\ell} = \ell,$$

es decir, depende del valor del lado del cuadrado. Por lo tanto, A y ℓ no son directamente proporcionales.

Por si acaso alguien tiene dificultades con este tipo de razonamientos algebraicos, veamos otro modo de diferenciar variables directamente proporcionales de otras que no lo son. Para ello, calculamos, para distintos valores del lado del cuadrado, los valores del perímetro, del área, y de los cocientes entre perímetro y lado, y entre área y lado.

ℓ	P	A	P/ℓ	A/ℓ
1	4	1	4	1
2	8	4	4	2
3	12	9	4	3
4	16	16	4	4
5	20	25	4	5

Vemos que la cuarta columna, la de P/ℓ, exhibe siempre el mismo valor, 4, independientemente del valor que toma ℓ; es decir, P y ℓ son directamente proporcionales. Sin embargo, en la quinta columna, la de A/ℓ, aparecen distintos valores, según va cambiando ℓ; por tanto, A y ℓ no son directamente proporcionales.

Son ejemplos de variables directamente proporcionales: el espacio recorrido por un móvil y el tiempo invertido, cuando la velocidad es constante (movimiento *uniforme*); el perímetro y la longitud del lado de un cuadrado; la masa de un cierto elemento o material, y el volumen que ocupa (el cociente de ambos es la *densidad* del elemento). No son directamente proporcionales, sin embargo, el área y el lado de un cuadrado, o el espacio recorrido y el tiempo invertido en el caso en que la velocidad no es constante (por ejemplo, el movimiento bajo la acción de la gravedad).

Si x e y son variables directamente proporcionales, entonces $y = k \cdot x$, donde k es el valor, constante, del cociente $\frac{y}{x}$. Si representamos gráficamente la función $y = kx$ en un diagrama cartesiano, la gráfica que obtenemos corresponde a una recta que pasa por el origen (véase Fig. 2.9).

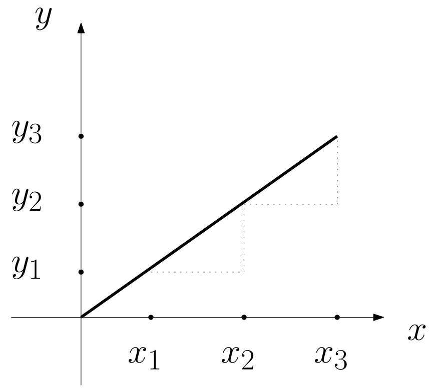


Figura 2.9: Relación entre variables directamente proporcionales

En la Fig. 2.9 observamos dos propiedades importantes de las variables directamente proporcionales:

(1) Al aumentar (o disminuir) una de las variables, aumenta (o disminuye) la otra. Es importante comprender, no obstante, que esta propiedad *no* caracteriza la proporcionalidad directa: por ejemplo, al aumentar el lado de un cuadrado también aumenta el área de éste, pero como vimos antes, el área y el lado del cuadrado no son directamente proporcionales.

(2) Independientemente del valor de la variable x, cuando ésta cambia multiplicando por un factor k, la variable y sufre el mismo cambio, y también queda multiplicada por k.

2.7.1. Magnitudes inversamente proporcionales

En un viaje a velocidad constante, si la velocidad aumenta el tiempo de viaje disminuye. Ahora bien, ¿cuál es la relación entre estos cambios? Llamando e al espacio recorrido, sabemos que $e = v \cdot t$ y, por tanto, los cambios en velocidad y tiempo son tales que el producto de las dos magnitudes se mantiene constante. Esto ocurre en otras muchas situaciones, y motiva la siguiente definición.

Definición 3. *Decimos que dos variables x e y son* **inversamente proporcionales** *si su producto es constante.*

Si x e y son inversamente proporcionales, entonces $x \cdot y = k$, con k constante, y por lo tanto $y = k/x$. Si representamos gráficamente la función $y = k/x$, asumiendo que k es positiva, se tiene la curva de la Fig. 2.10, llamada *hipérbola equilátera.*

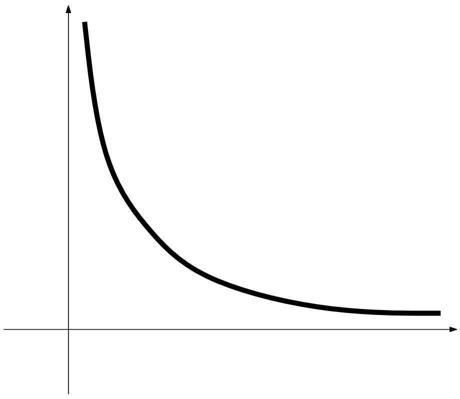


Figura 2.10: Relación entre variables inversamente proporcionales

A partir de la gráfica de la Fig. 2.10, observamos que al aumentar una de las variables, disminuye la otra, y viceversa. Conviene observar, no obstante, que esta propiedad no caracteriza a las variables inversamente proporcionales. En economía, lo usual es que cuando el precio de un producto disminuye, su demanda aumente. Sin embargo, cómo cambia la demanda ante una reducción del 10 % en el precio de un producto depende de muchos factores, y estas dos magnitudes no son inversamente proporcionales.

2.8. Porcentajes.

Un porcentaje es, simplemente, una razón cuyo denominador es 100. Representa la parte de un conjunto de personas, animales u objetos que satisface una cierta condición. Puesto que se refiere a una parte de un total, corresponde, también, a una fracción. Por ejemplo, cuando decimos que el 60 % de los alumnos de la Universidad tienen los ojos oscuros, estamos diciendo que 60 de cada 100 alumnos cumplen esa condición, y también que la fracción de alumnos con ojos oscuros es

$$\frac{60}{100} = \frac{3}{5}.$$

Para calcular el porcentaje de una cierta cantidad, es suficiente recordar la interpretación de la multiplicación de fracciones. Así, el 60 % de 28685, será simplemente

$$\frac{60}{100} \times 28685 = \frac{60 \times 28685}{100}.$$

Obsérvese que esta expresión es igual tanto a $0{,}6 \times 28685$ como a $60 \times 286{,}85$ (saber interpretarla de ambas formas puede ser útil en diferentes situaciones).

En el problema inverso, para calcular qué porcentaje de una cierta cantidad representa una cantidad dada podemos, también, recurrir a las fracciones. Supongamos que hemos pagado 20 euros por una camisa que originalmente costaba 25 euros. Para calcular el descuento, en porcentaje, que nos han aplicado, observamos que nos han rebajado 5 euros del precio original, 25 euros. Por lo tanto, lo único que tenemos que hacer es escribir $\frac{5}{25}$ como una fracción de denominador 100, es decir, encontrar x en la expresión

$$\frac{5}{25} = \frac{x}{100}.$$

Una aplicación de los porcentajes que merece especial atención es el caso de los *aumentos* y *disminuciones* porcentuales. Comenzamos con el siguiente ejercicio, sobre disminuciones porcentuales: *Un vestido de 85 euros está rebajado un* $30\,\%$*. ¿Cuál es su nuevo precio?*

La forma más sencilla de responder a esta pregunta es darse cuenta de que, si nos rebajan un $30\,\%$, lo que estamos pagando es el $70\,\%$ del precio original. Si además ya tenemos claro que calcular el $70\,\%$ de algo es equivalente a multiplicar por 0,7, el nuevo precio del vestido es sencillamente $0{,}7 \times 85 = 59{,}5$ euros.

Entender esta forma de calcular porcentajes simplifica preguntas como la siguiente: si un vestido estaba rebajado el $40\,\%$ y he pagado por el 30 euros, ¿cuál era su precio antes de la rebaja? La respuesta **no** es aumentar el $40\,\%$ a 30, como fácilmente se puede comprobar: si aumentamos 30 en un $40\,\%$, obtenemos 42 euros. Sin embargo, una rebaja del $40\,\%$ de 42 nos daría un precio rebajado de $0{,}6 \times 42 = 25{,}2$ euros. Una buena forma de resolver este problema (eso sí, recurriendo a un poco de álgebra) es llamar P al precio sin rebajar, y hallar P a partir de la condición de que el $60\,\%$ de P debe ser 30. En lenguaje algebraico,

$$0{,}6 \times P = 30 \quad \rightarrow \quad P = 50 \text{ euros}$$

Veamos ahora un ejemplo de aumentos porcentuales: *Juan gana 1250 euros mensuales y le suben el 2% el próximo enero. ¿Cuál será su nuevo sueldo?*

El nuevo sueldo será

$$1250 + \frac{2}{100} \times 1250 = 1250 + 0{,}02 \times 1250 = (1 + 0{,}02) \times 1250 = 1{,}02 \times 1250$$

De nuevo, ver de esta forma los aumentos porcentuales será útil para contestar a preguntas como esta: *Luisa va a ascender en día 1 de enero, y le van a subir el sueldo un* $15\,\%$*. Si después de la subida su sueldo será de* 1955 *euros, ¿cuánto gana ahora?* De nuevo, la respuesta **no** se obtiene rebajando el nuevo sueldo en un $15\,\%$. El lector que no vea esto claro debería convencerse haciendo las cuentas análogas a las anteriores. Llamando S al sueldo actual, lo que sabemos es que al aumentar S en un $15\,\%$ obtenemos 1955. Recurriendo de nuevo a un poco de álgebra,

$$S \times 1{,}15 = 1955 \quad \rightarrow \quad S = 1700 \text{ euros}$$

La utilidad de este enfoque se puede entender mejor planteándose la siguiente situación: *al ascender de categoría, el sueldo de un empleado de una empresa se vio incrementado un* $15\,\%$*. Sin embargo, algunos meses más tarde, dificultades en la empresa hicieron que todos los sueldos se rebajaran un* $5\,\%$*. Consideremos estas preguntas:*

1. *Si el sueldo inicial era de 1500 euros, ¿cuál era el sueldo tras la subida y la bajada?*

2. *Si el sueldo después de los dos cambios era de 1800 euros, ¿cuál era el sueldo inicial?*

3. *Si los cambios hubieran sido al revés, primero una bajada del* $5\,\%$ *y después una subida del* $15\,\%$*, cambiarían en algo las respuestas a los apartados anteriores?*

La mejor forma de comprobar que se han entendido estas últimas páginas es que el lector conteste por sí mismo.

Estas son las respuestas:

1. 1638,75 euros
2. 1647,59 euros
3. No