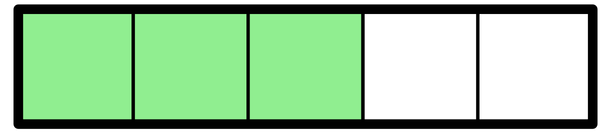
Tema 2: Fracciones y proporciones

- ⋆ Fracciones
- ⋆ Números racionales
- ⋆ Números decimales
- ⋆ Razones y proporciones
- ⋆ Porcentajes

Las fracciones: un objeto, varias interpretaciones

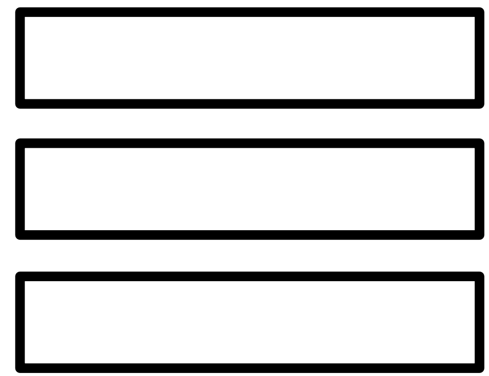
(1) Parte de un todo



Hemos coloreado los $3/5$ de ...

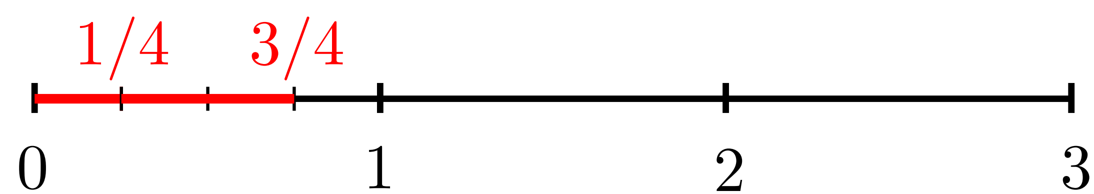
(2) Un reparto (división)

Queremos repartir 3 chocolatinas entre 5 niños. ¿A cuánto toca cada uno?



(3) Una cantidad (un punto de la recta numérica, un número)

$$¿\ \frac{3}{4}\ ?$$

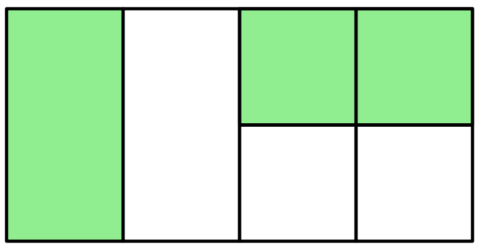


El denominador fija la unidad

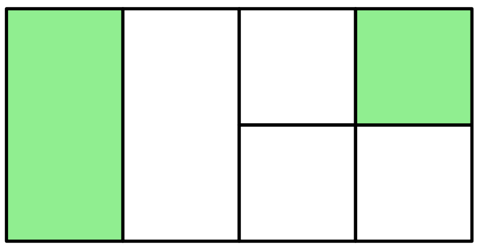
El numerador, cuántas unidades tomo

Algunos ejemplos

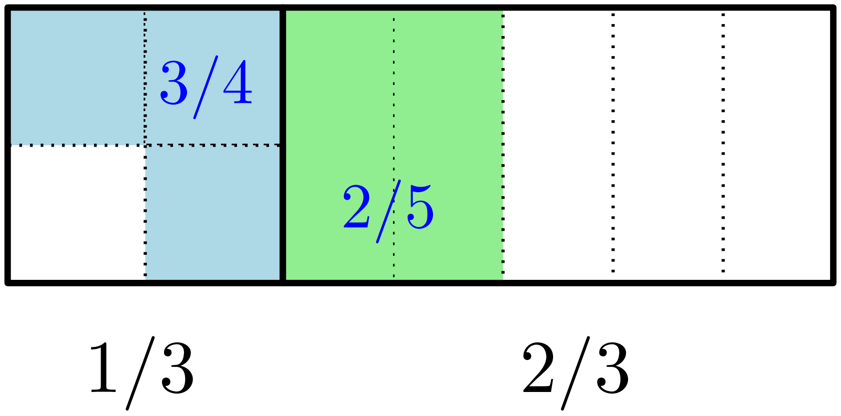
* ¿Qué fracción del área total está coloreada en cada una de las figuras?



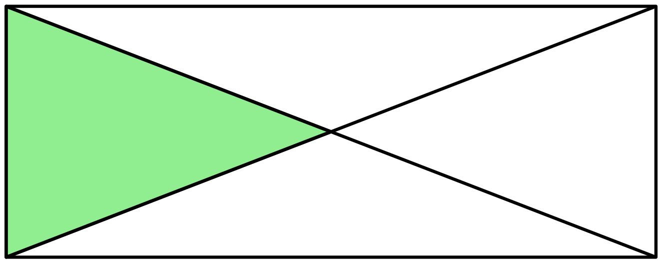
(a)



(b)



(c)



(d)

Algunos ejemplos

* He comido $1/3$ de los bombones de una caja y me quedan 12 bombones. ¿Cuántos bombones tenía la caja?

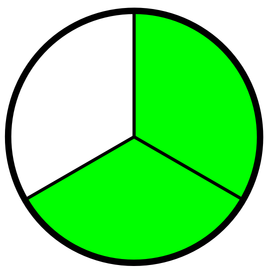
* Juan leyó $2/5$ de las páginas de un libro el lunes, el martes estaba ocupado y sólo pudo leer la tercera parte que el lunes, y el miércoles, que tenía más tiempo, acabo el libro leyendo 140 páginas. ¿Cuántas páginas tenía el libro?

Definición de fracción

* Una fracción es una expresión de la forma $\dfrac{a}{b}$, donde a y b son números enteros y $b \neq 0$.

numerador

denominador

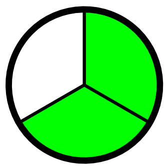


$\dfrac{2}{3}$

Parte de un todo

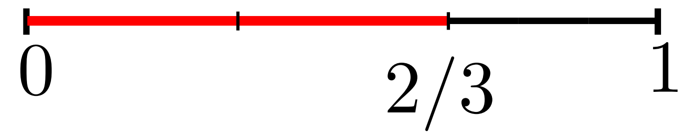
Cantidad

Punto de la recta numérica



2/3

Parte de un todo



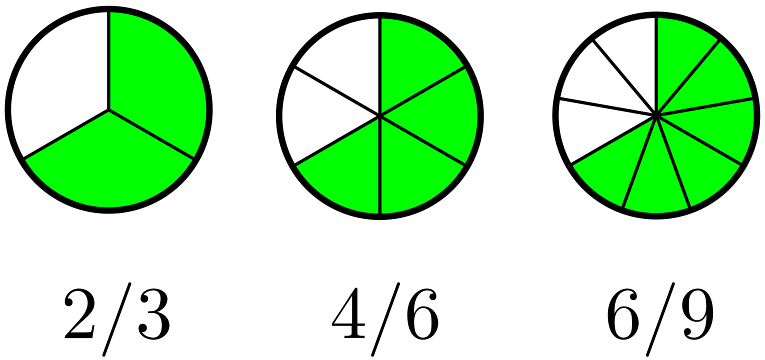
Punto de la recta numérica

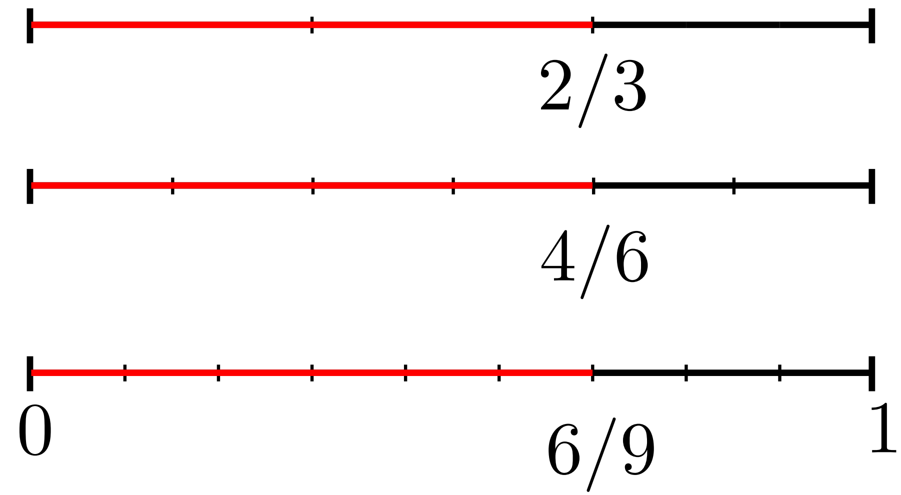
* Las dos interpretaciones son necesarias, y cada una tiene sus ventajas y sus inconvenientes.

  Cómo combinarlas es un tema importante de didáctica de las matemáticas.

∗ Las fracciones $2/3$, $4/6$, $6/9, \ldots$ representan la misma cantidad.

Diremos que son fracciones equivalentes.





∗ Def: Diremos que un número es racional si se puede expresar como cociente de dos números enteros, es decir, si se puede expresar en forma de fracción.

El conjunto de números racionales se denota por $\mathbb{Q}$.

Las fracciones en la recta numérica

* La gran ventaja de interpretar las fracciones en la recta numérica es que deja claro, desde el primer momento, que las fracciones son una ampliación de los conjuntos de números ya conocidos.

* Haciendo ejercicios como

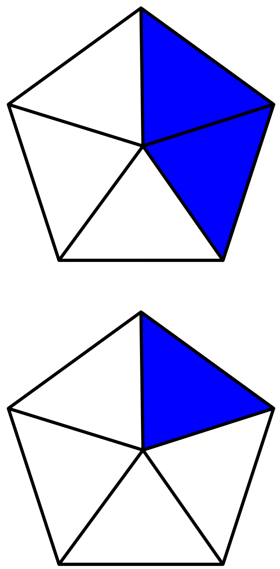
  Representa en la recta 1, 2, $6/7$ y $13/5$

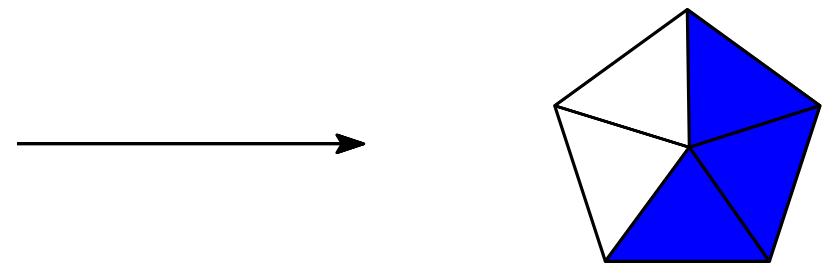
  se puede desarrollar más facilmente la intuición sobre las fracciones.

* Las fracciones impropias dejan de ser un problema.

Suma de fracciones

* Igual denominador: Un posible problema del enfoque más extendido.

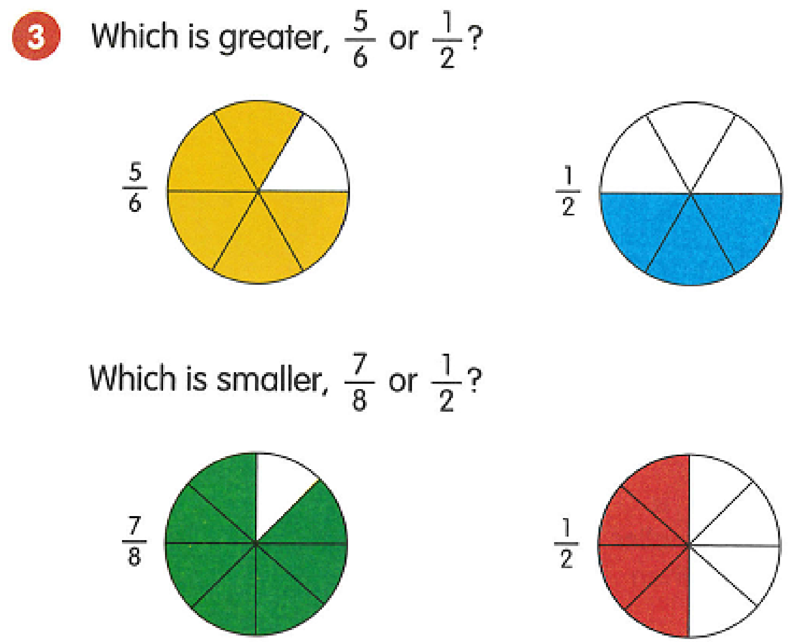




$$\frac{2}{5} + \frac{1}{5} = \frac{3}{5}$$

Fracciones equivalentes - Comparación de fracciones

* Si queremos que los alumnos comprendan, y no que memoricen, hay que huir de "recetas" y empezar con ejemplos como estos.



* Solo después ..
  1. igual denominador.
  2. igual numerador
  3. en general

* Ejercicio. Compara las fracciones:

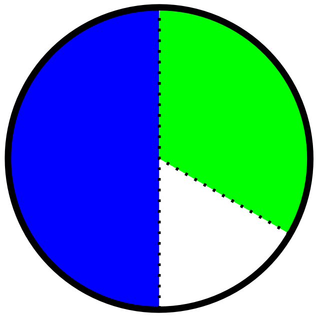
(a) $\frac{6}{7}$ y $\frac{7}{8}$ (b) $\frac{826}{825}$ y $\frac{1223}{1222}$

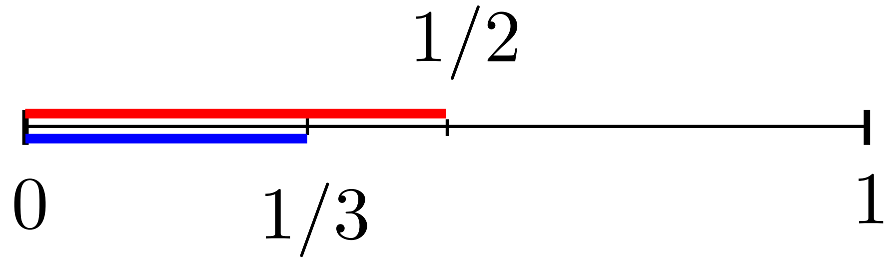
Suma de fracciones, distinto denominador

* Si los conceptos previos se han entendido, podemos plantear directamente el problema:

$$\text{¿Cuánto es } \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\text{?}$$

* Para un niño que trabaja este "problema" (con el modelo correspondiente) es mucho más fácil entender la imposibilidad de sumar fracciones que tienen distinto denominador.

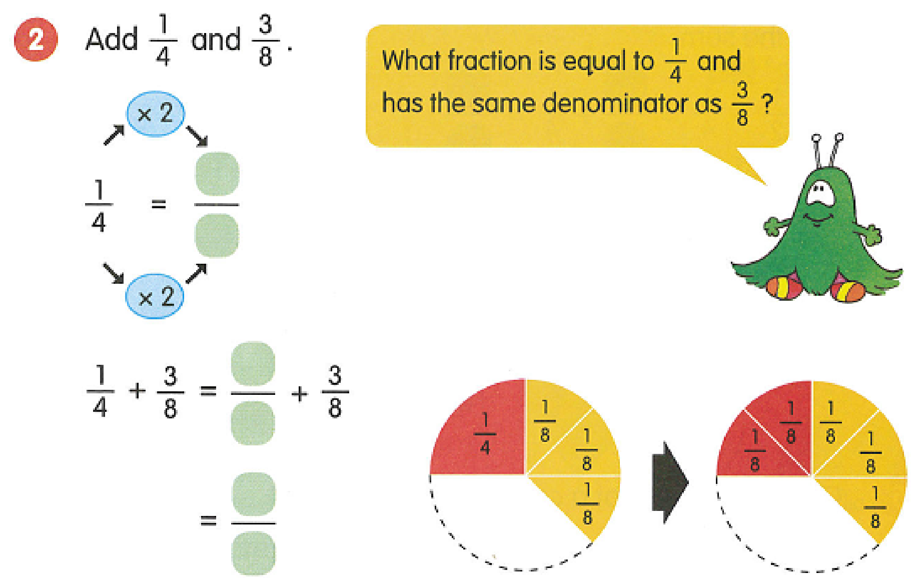




Fracciones equivalentes. Suma y resta

* Una vez entendidos los conceptos de fracción y fracción equivalente, la suma y resta deberían ser inmediatas.
  a) No se pueden sumar (ni restar) fracciones con distinto denominador.
  b) Lo que hay que hacer es buscar fracciones equivalentes que tengan el mismo denominador.

* En lugar de dar el procedimiento (se reducen a común denominador ...) considerar enfoques como el de la figura (andamiaje y zona de desarrollo próximo – Vygotsky)



Fracciones impropias, números mixtos

* La fracción $17/12$ (y, en general, las fracciones a/b donde $a \geq b$) se llaman fracciones impropias y se pueden representar como números mixtos:

$$\frac{17}{12} = 1\,\frac{5}{12} = 1 + \frac{5}{12}$$

* Muy relacionado con la división con resto:

$$D = q \times d + r \quad \rightarrow \quad \frac{D}{d} = q + \frac{r}{d}$$

* Es importante tener presente que, si se ha trabajado la fracción como "parte de un todo", la idea de fracción impropia supone una generalización desde el punto de vista conceptual: ¿qué significa ocho séptimos de algo?

Multiplicación de fracciones

- Desde el punto de vista del algoritmo, multiplicar fracciones es más sencillo que sumarlas.
  Sin embargo, desde un punto de vista conceptual es mucho más complicado.

- Una buena posibilidad es generalizar desde los naturales, de la siguiente forma:
  - 2×18 es "el doble de 18"
  - $\frac{1}{3} \times 18$ es "la tercera parte de 18", es decir, $\frac{18}{3}$

- Aparece aquí una relación fundamental entre las operaciones de multiplicar y dividir:

$$\text{multiplicar por } \frac{1}{n} \text{ es lo mismo que dividir por } n$$

Multiplicación de fracciones

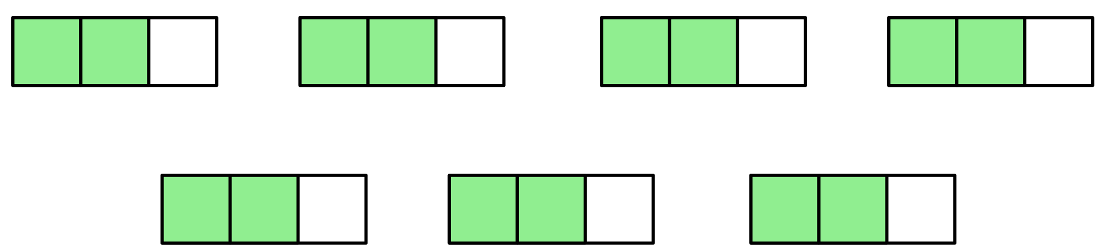
* Una vez que sabemos multiplicar $1/n$ por un entero, y entendemos que estamos dividiendo por n, podemos multiplicar $1/n$ por otra fracción:

a) $\frac{1}{2} \times \frac{8}{15} = \frac{4}{15}$ b) $\frac{1}{2} \times \frac{7}{15} = \frac{1}{2} \times \frac{14}{30} = \frac{7}{30}$

* Fracción de un conjunto: $\frac{2}{3}$ de 7

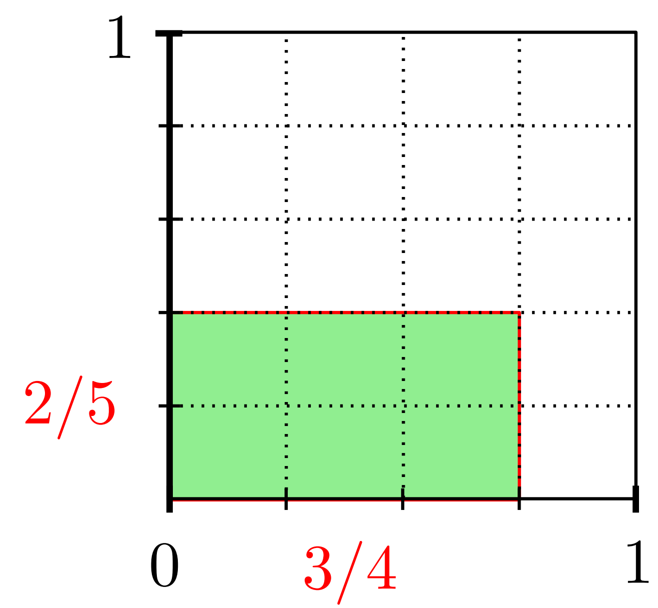
$$\frac{2}{3} \times 7 = 2 \times \left(\frac{1}{3} \times 7\right) = 2 \times \frac{7}{3} = \frac{14}{3}$$

Gráficamente:



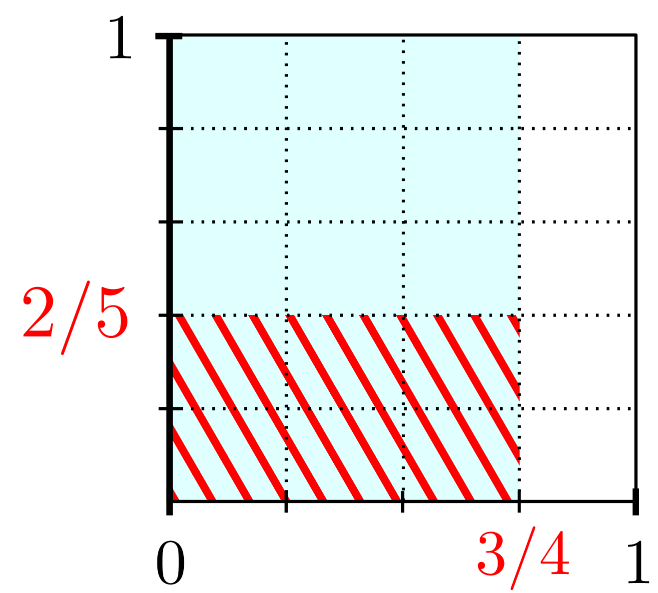
Multiplicación de fracciones. Modelo de área

$$\frac{3}{4} \times \frac{2}{5} = \frac{6}{20}$$



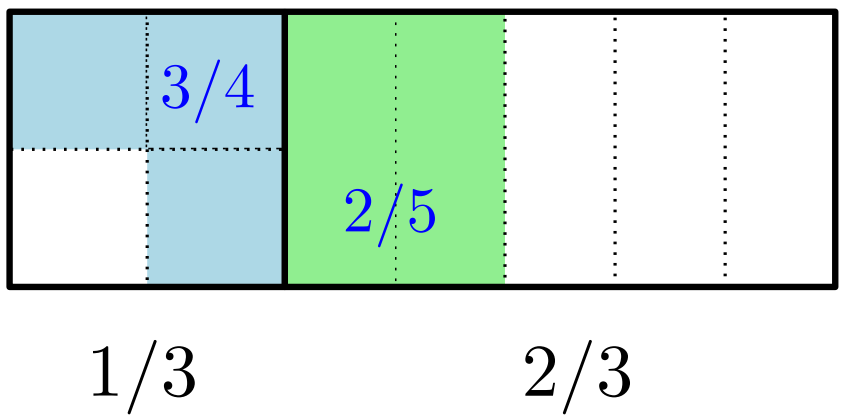
También aquí se puede ver que $\frac{2}{5} \times \frac{3}{4}$ significa

$2/5$ de $3/4$.



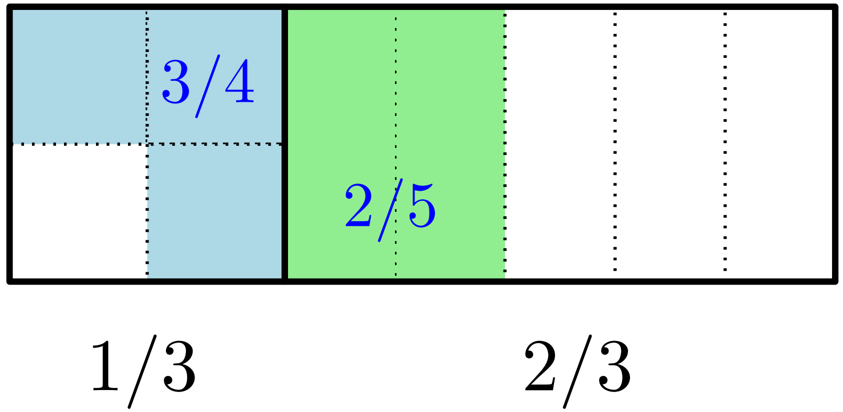
Ejercicios

* ¿Qué fracción del total está coloreada?



Ejercicios

* ¿Qué fracción del total está coloreada?



* Si echo 6 vasos en una botella, y $1/4$ de cada vaso es alcohol, ¿qué fracción del líquido de la botella será alcohol?

División de fracciones

* Primero, lo que creo que no es una buena alternativa.

División de fracciones

Ester tiene 2 kg y medio de almendras.
Las reparte en bolsas de un cuarto de kilo cada una.
¿Cuántas bolsas puede preparar?

Almendras: $2\frac{1}{2}$ kg ▸ ▸ $\frac{5}{2}$ kg

Bolsas de $\frac{1}{4}$ kg: 1 kg = 4 bolsas ▸ ▸ 10 bolsas de $\frac{1}{4}$ kg

Calcula cuántos $\frac{1}{4}$ hay en $\frac{5}{2}$, es decir, divide $\frac{5}{2}$ entre $\frac{1}{4}$

- El numerador es el producto del numerador de la primera fracción por el denominador de la segunda.
- El denominador es el producto del denominador de la primera fracción por el numerador de la segunda.

$$\frac{5}{2} : \frac{1}{4} = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = \frac{20}{2} = 10$$

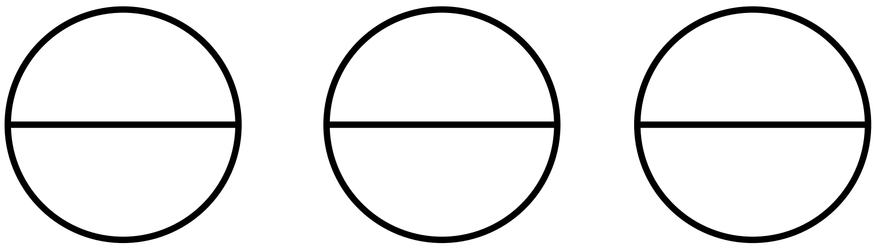
Puede preparar 10 bolsas de un cuarto de kilo.

Para dividir dos fracciones, se multiplican sus términos en cruz.

Primeros ejemplos

* Si queremos que se entienda, hay que empezar con ejemplos sencillos:

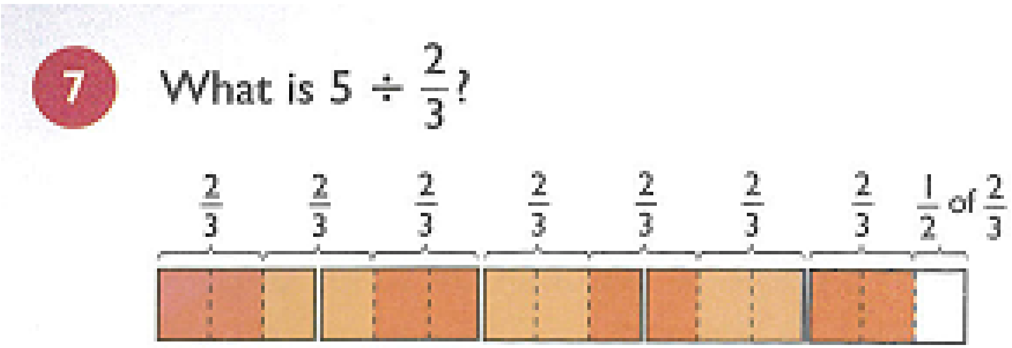
  Un grupo de amigos compran 3 pizzas y se comen media pizza cada uno. ¿Cuántos amigos hay en el grupo?



$$3 \div \frac{1}{2} = 3 \times 2 = 6$$

* Con ejemplos como éste no es difícil entender que dividir entre $1/n$ es equivalente a multiplicar por n.

Un ejemplo (Singapur, 6º)

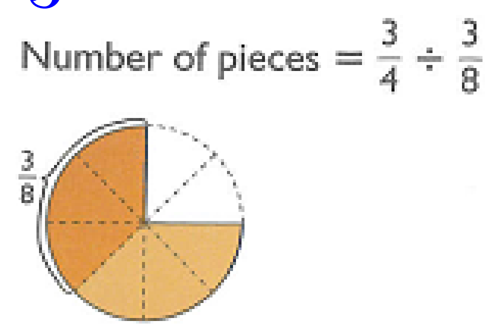


- ¿Cuántos $\frac{2}{3}$ hay en dos unidades?

- Por tanto, en una unidad hay $\boxed{}$ $\frac{2}{3}$.

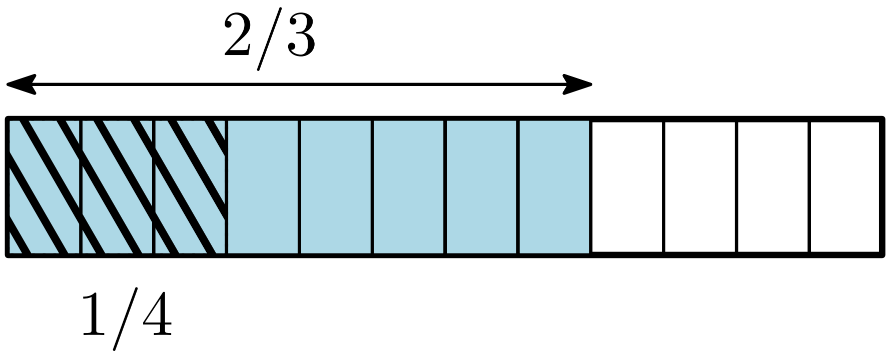
- Por tanto, en 5 unidades hay $\boxed{}$ $\frac{2}{3}$.

- Y el caso general
  (fracción entre fracción)



Otra opción: común denominador

* $\dfrac{2}{3} \div \dfrac{1}{4} \;\; = \dfrac{8}{12} \div \dfrac{3}{12} \;\; = \dfrac{8}{3} = 2 + \dfrac{2}{3}$



Problemas

- Tenemos un barril de 350 l. de agua, y con él rellenamos botellas de $3/8$ de litro. ¿Cuántas botellas llenamos?

- Una persona deja en herencia $2/3$ de su capital a su único hijo, le deja a un tío lejano $4/5$ partes del resto, debe pagar a hacienda por impuestos $1/20$ de la herencia, y dona el resto, 12000 euros, a una obra de beneficencia. ¿Cuál era su capital?

- Ejercicio: Calcula y expresa como fracción irreducible

$$\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\times\frac{4}{7}\times\frac{9}{8}-2\times\left(\frac{1}{12}-\frac{7}{3}\right)-1$$

Orden en $\mathbb{Q}$

* El orden en $\mathbb{Q}$ se define igual que en los enteros:

  dados dos números racionales a y b, se dice que $a < b$ si $b - a > 0$.

* Propiedades de monotonía:

  a) Si $a < b$ entonces $a + c < b + c$ (para cualquier número racional c).

  b) Si $a < b$ y $c > 0$, entonces $a \cdot c < b \cdot c$.

  c) Si $a < b$, entonces $-a > -b$.

  Por tanto, si $a < b$ y $c < 0$, entonces $a \cdot c > b \cdot c$

* Ejercicio: Encuentra los números racionales que verifican la desigualdad $\dfrac{2}{3} - x < \dfrac{7}{5}$

Orden en $\mathbb{Q}$

* Los racionales son "densos": en $\mathbb{Q}$ se pierde el concepto de "siguiente".

  Observación: entre dos números racionales cualesquiera existen infinitos números racionales.

* Pero no "llenan" toda la recta:
  Teorema: $\sqrt{2}$ no es un número racional.

* Un último resultado: Se puede hacer una lista (infinita) que contenga todos los números racionales.

Problema

* El grifo del agua caliente tarda 1 hora en llenar mi bañera y el grifo del agua fría tarda 30 minutos. Si abro los dos grifos a la vez, y el caudal de cada grifo es el mismo que antes, ¿cuánto tardará en llenarse la bañera?