

Tema 2-3: Proporcionalidad y porcentajes

- * Una **razón** es una **relación** entre dos cantidades. Ej:
 - a) en una bolsa con bolas blancas y negras, la razón de bolas blancas a negras es de 2 a 7.
 - b) en cierto examen, la razón entre aprobados y suspensos es de 4 a 3.

- * Una razón puede venir dada en forma de fracción, pero no hay que confundir los conceptos. Algunas diferencias fundamentales:
 1. Una razón puede comparar dos **magnitudes heterogéneas** (con distintas unidades). Ej: consumo 6 litros/100 km.
 2. Una razón puede **no ser un número racional**.
Ejemplo: la razón entre la longitud de una circunferencia y su diámetro.

Razón - Fracción

- * Supongamos que tenemos una bolsa con bolas rojas y bolas azules. Sabemos que por cada 3 bolas rojas hay 2 bolas azules.

Escribimos que **la razón entre bolas rojas y bolas azules** es **$3 : 2$** o también **$3/2$** .

- * Si la razón entre bolas rojas y bolas azules es $3 : 2$, ¿qué **fracción** del total de bolas son rojas?
- * En el lenguaje usual se suele decir **¿qué proporción son rojas?**

Se trata de un uso impreciso, que aquí evitaremos. En matemáticas, una proporción es otra cosa, que veremos enseguida.

Proporciones

- * Una **proporción** es una igualdad entre dos razones.
- * Ejemplo: en cierto examen la razón entre aprobados y suspensos es **4 : 3**. Si suspendieron 81 alumnos, ¿cuántos aprobaron?

$$\frac{4}{3} = \frac{x}{81} \rightarrow 3x = 4 \cdot 81 \rightarrow x = \frac{4 \cdot 81}{3} = 108$$

- * Y sí ... también se puede interpretar como la clásica “regla de tres”:

$$3 \rightarrow 81$$

$$4 \rightarrow x$$

El peligro de “la regla de 3”

4. EL RAZONAMIENTO DE LA REGLA DE TRES

Con la expresión “regla de tres” se designa un procedimiento que se aplica a la resolución de problemas de proporcionalidad en los cuales se conocen tres de los cuatro datos que componen las proporciones y se requiere calcular el cuarto. Aunque aplicado correctamente el razonamiento supone una cierta ventaja algorítmica en el proceso de solución, ya que se reduce a la secuencia de una multiplicación de dos de los números, seguida de una división por el tercero, con frecuencia muchos alumnos manipulan los números de una manera aleatoria y sin sentido de lo están haciendo. En cierto modo el algoritmo les impide comprender la naturaleza del problema, sin preocuparse de si la correspondencia entre las cantidades es de proporcionalidad directa, inversa, o de otro tipo. La regla de tres se llega a aplicar de manera indiscriminada en situaciones en las que es innecesaria o impertinente. **o peor, errónea ...**

De Godino et al: Proporcionalidad y su didáctica para maestros (p. 425),
<http://tinyurl.com/8kxkr7r>

- * Un pequeño divertimento sobre el tema:
<https://youtu.be/wkJrysJhU7s>

Ejemplos

* Problema: Si 3 entradas de cine cuestan 21 euros, ¿cuánto costarán 5 entradas iguales?

* Solución 1:

Como 3 entradas cuestan 21 euros, cada entrada cuesta 7 euros. Por tanto, 5 entradas costarán 35 euros.

Reducción a la unidad

* Solución 2:

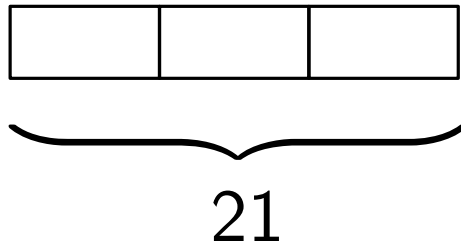
$$\left. \begin{array}{l} 3 \rightarrow 21 \\ 5 \rightarrow x \end{array} \right\} \Rightarrow x = \frac{21 \cdot 5}{3}$$

Regla de tres

Ejemplos

- * Problema: Si 3 entradas de cine cuestan 21 euros, ¿cuánto costarán 5 entradas iguales?

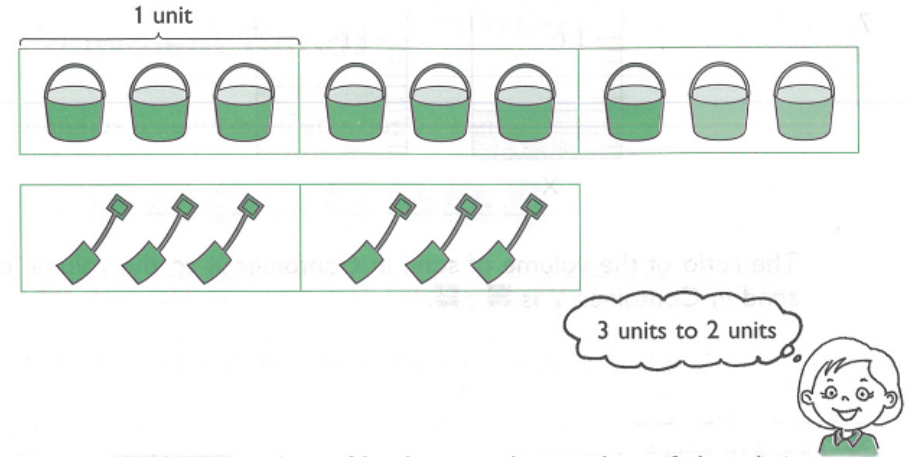
Una alternativa: el **modelo de barras** (Singapur).



- * Al menos, una buena herramienta auxiliar.
Ventaja: visualizar ayuda a entender.

Unos ejemplos de los libros de Singapur

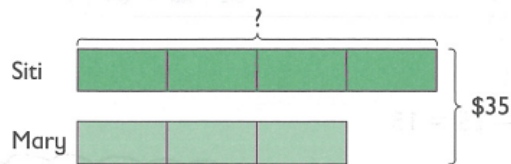
- * Introduciendo el concepto de razón en 5º



The ratio of the number of buckets to the number of shovels is $\blacksquare : \blacksquare$.

- * Para llegar a (también en 5º)

6. Siti and Mary shared \$35 in the ratio 4 : 3.
How much money did Siti receive?



7 units = \$35

1 unit = \$ \blacksquare

4 units = \$ \blacksquare

Siti received \$ \blacksquare .

7. The ratio of the weight of Package X to the weight of Package Y is 5 : 3. If the weight of Package X is 40 kg, find the total weight of the two packages.



5 units = 40 kg

1 unit = \blacksquare kg

8 units = \blacksquare kg

The total weight is \blacksquare kg.

Unos ejemplos de los libros de Singapur

* Para llegar ya en 6º a problemas como éste:

2

The mass of potatoes used by Mrs Wee in her cooking was $\frac{5}{2}$ of the mass of carrots used. She used 9 kg more potatoes than carrots.

a

Find the ratio of the mass of potatoes used to the mass of carrots used to the total mass of both ingredients.

b

What fraction of the total mass of both ingredients was the mass of the potatoes?

c

Find the total mass of both ingredients.

Magnitudes directamente proporcionales

- * Se dice que dos magnitudes son **directamente proporcionales** si su cociente es constante.

Ejemplo: espacio y tiempo en un movimiento uniforme.

$$\frac{e_1}{t_1} = \frac{e_2}{t_2} = \dots = v$$



razón de proporcionalidad

- * **Ejercicio:** Estudia si las siguientes magnitudes son directamente proporcionales:
 1. El lado de un cuadrado y su área.
 2. La masa de un objeto y su volumen.
 3. El tiempo que tarda en caer un objeto y la altura de la torre desde donde se lanza.
 4. El lado de un cuadrado y su perímetro.

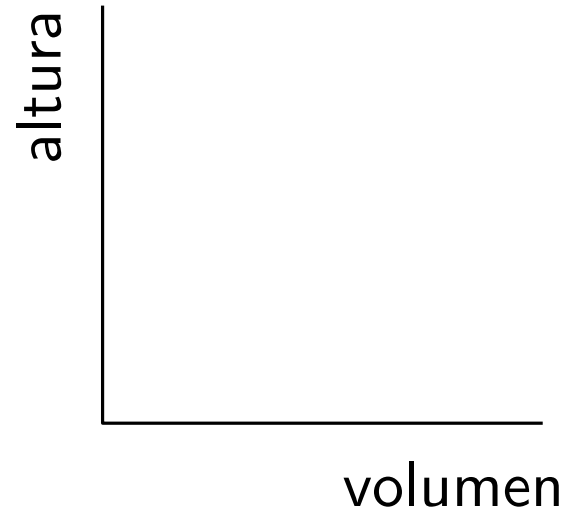
Magnitudes directamente proporcionales

- * En la práctica, a veces las cosas pueden no estar tan claras:
¿Son proporcionales el coste total de fabricar un lote de productos y el número total de unidades del lote?
- * Un experimento (fácil e instructivo)
Hacer una tabla con la cantidad de agua que se echa en los siguientes vasos (medida en centilitros, en cucharadas, ...) y la altura alcanzada en el vaso. ¿Para qué modelo las series son proporcionales?



Series proporcionales

- * Si representamos en el plano cartesiano los datos del experimento anterior, ¿qué obtenemos?



(1)



(2)



(3)

Problemas

- * Un ejemplo importante de razón: la escala.
La distancia entre dos puntos en un mapa de escala 1 : 20000 es de 6,7 cm. ¿Cuál es la distancia real?
- * La razón entre los lados de dos rectángulos es r . ¿Cuál es la razón entre los perímetros? ¿Y entre las áreas?
- * He sacado un 7 en un examen que valía un total de 13 puntos. ¿Cuál será mi nota sobre 10?
- * Si 8 hombres cortan 24 troncos en 6 horas, ¿cuánto tiempo les llevará a 5 hombres cortar 10 troncos, trabajando a la misma velocidad?

Una alternativa a la “regla de 3 compuesta”: **la reducción a la unidad.**

Magnitudes inversamente proporcionales

* Se dice que dos magnitudes x e y son **inversamente proporcionales** si su **producto es constante**.

* Ejemplos:

- velocidad y tiempo en un movimiento uniforme:

Un coche hace un viaje a velocidad constante. Si su velocidad aumenta $1/5$, ¿cuánto disminuye el tiempo?

- presión y volumen de un gas a temperatura constante

$$PV = k \quad (\text{Ley de Boyle-Mariotte})$$

Si manteniendo la temperatura constante el volumen del gas aumenta un 50%, ¿cómo cambia la presión?

Magnitudes inversamente proporcionales

- * **Ejercicio:** Si la base de un rectángulo aumenta en $1/5$, ¿cuánto debe disminuir la altura para que el área no cambie?



$$A = b \times h$$

Problemas

- * Un grupo de excursionistas calcula una provisión de agua para 12 días. Si durante el viaje el consumo es un 50% superior al previsto, ¿cuándo se les acaba el agua?
- * Sabemos que con un grifo de cierto caudal tardamos 4 horas en llenar un depósito. Si el caudal disminuye a $\frac{2}{3}$ del original, ¿cuánto se tardará ahora en llenar el depósito?
- * Una nave sale de Nápoles hacia Barcelona y hace su viaje en 30 días. Otra sale de Barcelona hacia Nápoles y hace el viaje en 20 días. ¿En qué punto del trayecto se encuentran? (Se supone, claro, que las dos naves van por la misma ruta y que cada una de ellas mantiene durante el viaje la misma velocidad).

Porcentajes

- * Un porcentaje es una razón cuyo “denominador” es 100. Es uno de los conceptos matemáticos que más se utilizan en la vida cotidiana.

- * Ejemplos:
 - a) En las elecciones de 2004 el partido A recibió 4323890 del total de 11523876 votos, en tanto que en las elecciones de 2008 recibió 4387905 votos del total de 11600399.
$$2004 \rightarrow 37'5\% \qquad 2008 \rightarrow 37'8\%$$

 - b) Incrementos de sueldo, de precio, rebajas, impuestos ...

Ejemplos elementales

1. Calcular un tanto por ciento de una cantidad.
2. Escribir una razón en forma de porcentaje.

* ¿Sabemos razonar sobre porcentajes?

Supongamos que una tienda baja el 10% un modelo de pantalones para las rebajas de enero, y que los vuelve a subir un 10% pasadas las rebajas. El precio después de las rebajas es:

- a) el mismo del principio.
- b) mayor que al principio.
- c) menor que al principio.
- d) mayor o menor, dependiendo del precio inicial.

Ejemplos elementales

- * A un empleado le han subido el 2% durante dos años consecutivos. Al cabo de los dos años gana:
 - a) El 4% más que al principio.
 - b) Más del 4% más que al principio.
 - c) Menos del 4% más que al principio.
 - d) Más o menos del 4%, dependiendo del sueldo inicial.

- * ¿Qué es mayor, el 37% de 85 o el 85% de 37?

Cálculo “eficiente” de porcentajes

* Ejemplos:

- a) Un vestido de 85 euros está rebajado un 30 %. ¿Cuál es su nuevo precio?
- b) Juan gana 1250 euros mensuales y le suben el 2 % el próximo enero. ¿Cuál será su nuevo sueldo?

¿Sabrías resolver estas cuestiones con una sola operación?

* Ejercicio:

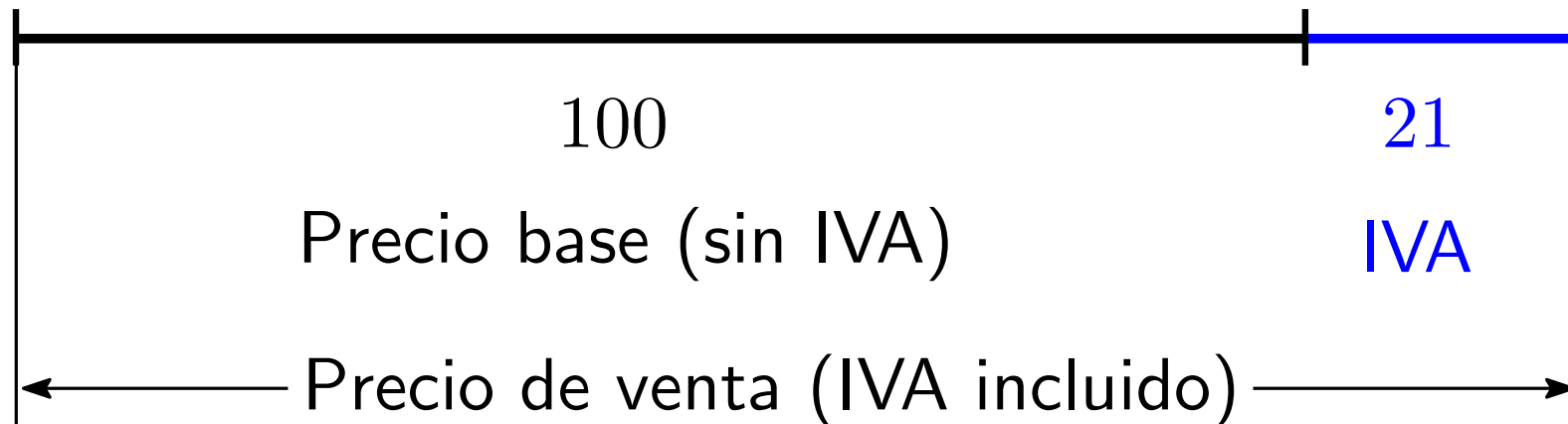
Ricardo empezó a trabajar en una empresa hace diez años, ganando 900 euros. Desde entonces le han subido un 2 % cada año. ¿Cuál será su sueldo en la actualidad?

Impuestos y porcentajes

* El IVA

El precio de venta al público de un artículo se obtiene sumando el IVA (por ejemplo, el 21 %) a su precio base.

1. Unas zapatillas tienen un precio antes de impuestos de 55 euros. ¿Cuál será su precio, IVA incluido?
2. He pagado 140 euros por un traje. ¿Cuánto IVA he pagado?

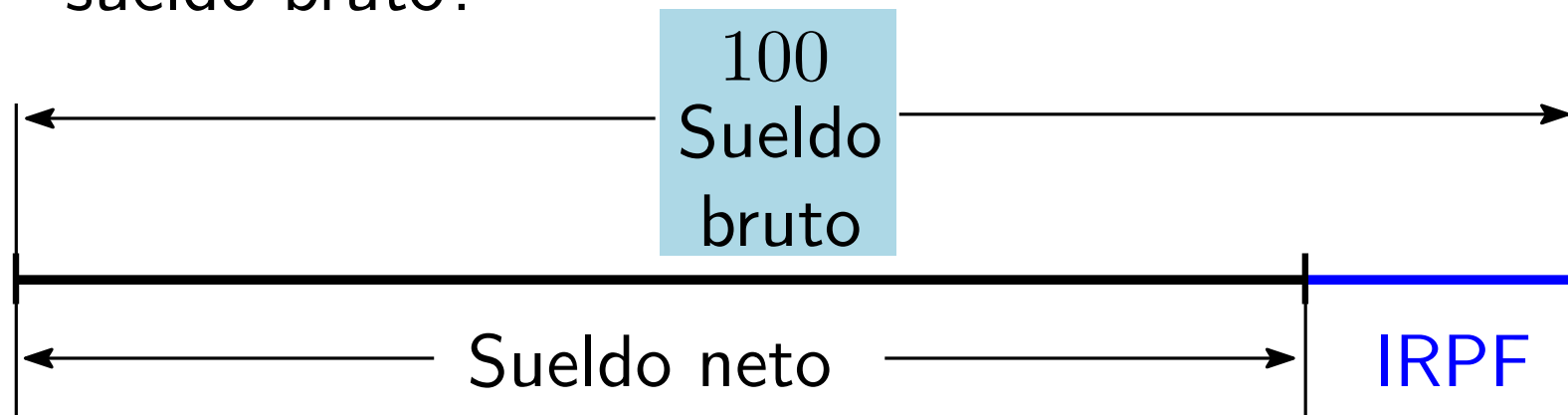


Impuestos y porcentajes

* El IRPF

La empresa paga a un empleado un **sueldo bruto** al que se le practica una retención en concepto de IRPF. Lo que el empleado recibe en su banco es el **sueldo neto**.

1. Luis tiene un sueldo bruto de 1250 euros al mes y la retención que le practican es del 19%. ¿Cuál es su sueldo neto?
2. Tras practicarle una retención del 24%, a Paula le ingresan un sueldo neto de 1420 euros. ¿Cuál es su sueldo bruto?



Problemas

- * He pagado 63 euros por un vestido que estaba rebajado un 30%. ¿Cuál era su precio antes de las rebajas?
- * Juan no recuerda cuánto ganó el año 2008, pero sí sabe que del 2008 al 2009 le subieron el sueldo un 3% y del 2009 al 2010 un 2%. Si el año 2010 ganó 1345 euros, ¿sabrías decirle cuánto ganaba el año 2008?
- * Voy a comprarme un coche que está rebajado, y el vendedor me deja elegir cómo calcular el precio final:
 1. Opción 1: primero, rebajamos el precio un 15% y luego aplicamos el IVA del 21%.
 2. Opción 2: primero aplicamos el IVA del 21% y luego reducimos el precio un 15%.¿Qué alternativa debería elegir?

Dos situaciones “sorprendentes”

- * Supongamos que los porcentajes de acierto en tiros libres de un jugador A han sido, en todos los cuartos, mejores que los del jugador B . ¿Podemos asegurar que el porcentaje de acierto de A en el partido ha sido superior?

	1 ^{er} C	2 ^o C	3 ^{er} C	4 ^o C	Total
A	100 %	100 %	100 %	60 %	?
B	80 %	80 %	90 %	50 %	?

	1 ^{er} C	2 ^o C	3 ^{er} C	4 ^o C	Total
A	1/1	2/2	1/1	12/20	$16/24 = 66,6 \%$
B	8/10	16/20	9/10	1/2	$34/42 = 80,1 \%$

- * Este fenómeno se conoce como **Paradoja de Simpson**.
- * Explicado en vídeo aquí.

¿Los porcentajes siempre suman 100?

- * Un propietario de una cafetería hizo balance de las ventas de la última semana, y descubrió que había perdido 500 euros con la venta de zumos naturales, había ganado 700 euros con la venta de bollería, y otros 800 euros con la venta de cafés.
 1. ¿qué porcentaje de su ganancia total corresponde a la venta de bollería?
 2. ¿qué porcentaje de su ganancia total corresponde a la venta de cafés?
- * Este fenómeno se puede dar, por ejemplo, hablando de subidas y bajadas de paro en diferentes sectores.

Dos últimos problemas

- * Un ejemplo para entender el problema del refresco (<http://blog.mrmeyer.com/2011/wcydwt-coke-v-sprite/>)
Tienes dos cajas, una con 100 fichas azules y otra con 100 fichas rojas. Coges 25 fichas azules y las pones en la caja de las fichas rojas. Mezclas estas 125 fichas, y coges ahora 25 fichas (en la proporción adecuada) para devolver a la primera caja. ¿En qué caja hay más fichas del color original?
- * En una fiesta hay 300 personas, y el 99 % son mujeres. ¿Cuántas mujeres deberían irse para que el porcentaje de mujeres bajara al 98 %?