Práctica 2.4 [1]

1. Completa los recuadros de las siguientes frases:

   a) Si una cantidad aumenta desde C hasta $\frac{5}{4}C$, ha aumentado un $\boxed{25}\,\%$.

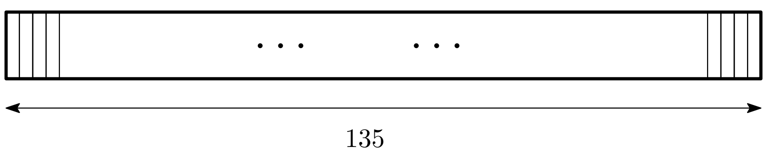
   b) Si una cantidad disminuye un 40 % y valía A, ahora vale $\dfrac{\boxed{3}}{\boxed{5}}A$.

   c) Si una cantidad ha disminuido en 1/4, su valor es el $\boxed{75}\,\%$ del original.

2. Un equipo de 3 pintores necesitan 45 horas de trabajo para pintar un edificio. ¿Cuántas horas de trabajo necesitará un grupo de 5 pintores? (Se supone que todos los pintores trabajan a la misma velocidad). Haz un dibujo que ayude a entender la solución.

   Solución:

   Si 3 pintores tardan 45 horas, un solo pintor tardaría $3 \times 45 = 135$ horas. Si representamos con una barra el trabajo total, está dividida en 135 trozos iguales, y cada uno representa lo que hace un pintor en una hora. Por tanto, si hay 5 pintores, tardarán $135 : 5 = 27$ horas.



3. La Ley de Boyle-Mariotte dice que, si la temperatura es constante, la presión y el volumen de un gas son magnitudes inversamente proporcionales.

   Sabiendo esto, si la temperatura constante y el volumen del gas aumenta un 40 %, ¿en qué porcentaje disminuye la presión?

   Solución:

   Como P y V son magnitudes inversamente proporcionales, sabemos que el producto $P \times V$ se mantiene constante. Que el volumen aumente un 40 % es lo mismo que decir que se ha multiplicado por 1,4. Por tanto, tenemos

   $$P \times V = \boxed{?} \times P \times 1{,}4 \times V$$

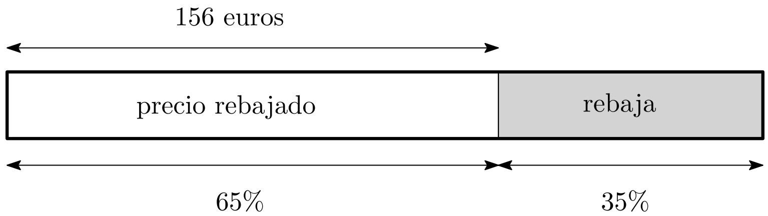
   Viendo esta igualdad deducimos que la presión se ha dividido por 1,4 (o, lo que es lo mismo, multiplicado por 1/1,4. Como $1 : 1{,}4 \approx 0{,}714$, la presión pasa a valer el 71,4 % de la original, es decir, ha disminuido el 28,6 %.

4. He comprado un abrigo que estaba rebajado el 35 % y he pagado por él 156 euros. ¿Cuál era su precio antes de las rebajas? Haz un modelo de barras que ayude a entender el problema.

   Solución:

   En la figura se muestra la situación. Los 156 euros que he pagado corresponden al 65 % del precio del abrigo. Por tanto, el 1 % es $\frac{156}{65}$ y el total será $\frac{156}{65} \times 100 = 240$ euros.

[1] Los problemas con el símbolo © se pueden hacer con calculadora. El resto se deben hacer sin ella.



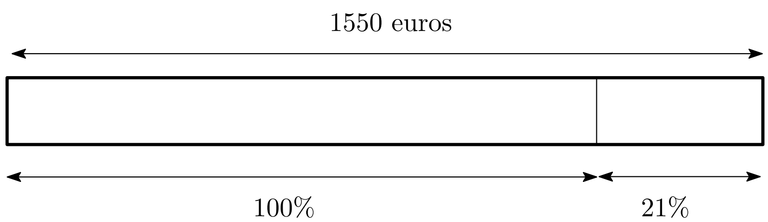
También es posible este enfoque más algebraico: si llamamos P al precio del abrigo sin rebajar, hemos pagado el 65 % de P. Por tanto,

$$0{,}65 \times P = 156 \qquad \rightarrow \qquad P = \frac{156}{0{,}65} = 240 \text{ euros.}$$

5. ⓒ Me he comprado un ordenador que me ha costado 1550 euros. Si el IVA es el 21 %, haz un modelo de barras para calcular el IVA que he pagado y el precio del ordenador antes de incluir el IVA.

   Solución:

   En este caso, lo que he pagado corresponde al 121 % del precio del ordenador sin iva. Por tanto, el 1 % es $\frac{1550}{121}$ y el precio sin iva $\frac{1550}{121} \times 100 \approx 1281$ euros. El iva será por tanto la diferencia, $1550 - 1281 = 269$ euros.



   Con un enfoque más algebraico, sabemos que si llamamos P al precio sin IVA, el precio con el IVA será $P + \frac{21}{100}P = 1{,}21 \times P$. Por tanto,

$$1{,}21 \times P = 1550 \qquad \rightarrow \qquad P = \frac{1550}{1{,}21} \approx 1281 \text{ euros.}$$

6. ⓒ Un coche nuevo pierde el 20 % de su valor por cada año que pasa (por ejemplo, cuando tiene 3 años vale un 20 % menos que cuando tiene 2 años). ¿Cuántos años deben de pasar para que el valor del coche se reduzca a menos de 1/4 de su valor original?

   Solución:

   Si llamamos P al precio inicial, el precio después del primer año será el 80 % del precio inicial, es decir, $0{,}8 \times P$. El precio después del segundo año será $0{,}8 \times (0{,}8 \times P) = 0{,}8^2 \times P$. En general, al cabo de n años el precio será $0{,}8^n \times P$. Por tanto, solo hay que ver (tanteando) para qué valor de n se tiene $0{,}8^n < 0{,}25$. ($0{,}8^6 \approx 0{,}26$, $0{,}8^7 \approx 0{,}21$).

7. © Tenemos un vaso en forma de cilindro, y diseñamos otro aumentando el radio un 30 % y disminuyendo la altura también un 30 %. ¿Cómo cambia el volumen?

   Solución:

   Si llamamos A_{base} al área de la base y h a la altura, el volumen del cilindro es $V = A_{\text{base}}$. Si r es el radio de la base, $V = \pi r^2 h$.

   Tenemos ahora un nuevo cilindro con radio r_1 y altura h_1. Como el radio ha aumentado el 30 %, $r_1 = 1{,}3\,r$. Como la altura ha disminuido el 30 %, $h_1 = 0{,}7\,h$. Por tanto,

   $$V_1 = \pi\, r_1^2\, h_1 = \pi\,(1{,}3\,r)^2\,(0{,}7\,h) = 1{,}3^2 \cdot 0{,}7(\pi r^2 h) = (1{,}3^2 \cdot 0{,}7)\,V = 1{,}183\,V.$$

   Por tanto, el volumen ha aumentado el 18,3 %.

8. © El 1 de enero de 2017 invertí 500 euros en un fondo que se comportó de esta extraña forma: los meses impares su valor subió el 10 %, y los meses pares su valor bajó el 10 %. ¿Cuál era el valor de mi inversión al final de año? (Hay un total de 6 subidas y 6 bajadas).

   Solución:

   Una vez hemos entendido que una subida del 10 % de una cantidad equivale a multiplicar la cantidad por 1,1 y una bajada del 10 % equivale a multiplicarla por 0,9, lo que ocurre es que esa cantidad se multiplica 6 veces por 1,1 y 6 veces por 0,9. El orden no importa, ya que la multiplicación es conmutativa. Por tanto, el valor final será

   $$V_f = 0{,}9^6 \times 1{,}1^6 \times 500 = (0{,}9 \times 1{,}1)^6 \times 500 \approx 470{,}74 \text{ euros}$$

9. En una fiesta hay 300 personas, y el 99 % son mujeres. ¿Cuántas mujeres deberían irse para que el porcentaje de mujeres bajara al 98 %?

   Solución:

   En este problema no voy a dar detalles. Es "elemental", aunque el resultado sea sorprendente.

   Al principio en la fiesta hay 3 hombres. Si esos 3 hombres luego son el 2 % de los invitados, ¿cuánta gente habrá?

   Sí, el resultado es que deben irse 150 mujeres de las 297 que había al principio.

   Puede ser instructivo que pienses por qué la intuición sobre los porcentajes nos engaña tanto en este caso.

10. © Quiero ingresar hoy en el banco una cantidad de dinero, para garantizar que dentro de 20 años tendré disponibles 30000 euros. El banco me garantiza un interés del 5 % anual que ingresa cada año en la misma cuenta, y sé que no pagaré impuestos hasta que retire el dinero. En el momento de retirar el dinero, deberé pagar un 16 % de impuestos. ¿Cuánto debo ingresar hoy en el banco?

    Solución:

    Vamos a hacer el problema en dos etapas. Primero, veamos cuánto dinero necesitamos tener en el banco para que, después de pagar el 16 % de impuestos nos queden disponibles 30000 euros.

Llamando C_f al capital que tengamos al final, sabemos que $0{,}84 \times C_f = 30000$, es decir, $C_f = 30000/0{,}84 \approx 35714$ euros.

Cada año el capital se incrementa el 5 %. Por tanto, si llamamos C_i al capital inicial, al cabo de un año el capital será $1{,}05 \times C_i$, al cabo de 2 años será $1{,}05^2 \times C_i$ y, al cabo de 20 años, $1{,}05^{20} \times C_i$. Por tanto,

$$C_f = 1{,}05^{20} \times C_i \qquad \to \qquad 35714 = 1{,}05^{20} \times C_i \qquad \to \qquad C_i = \frac{35714}{1{,}05^{20}} \approx 13460 \text{ euros}$$

11. Una nave sale de Nápoles hacia Barcelona y hace su viaje en 30 días. Al mismo tiempo, otra sale de Barcelona hacia Nápoles y hace el viaje en 20 días. ¿En qué punto del trayecto se encuentran? (Se supone, claro, que las dos naves van por la misma ruta y que cada una de ellas mantiene durante el viaje la misma velocidad).

    Solución:

    Para este problema voy a dar solo una indicación. Aunque hay varias formas de resolverlo, quizá la más sencilla de entender es pensar cuánto recorre cada barco cada día, y cuánto tardan en encontrarse.

    Se encuentran al cabo de 12 días.

    En ese tiempo, la nave rápida ha recordido 3/5 del viaje, y la nave lenta 2/5 del viaje.

12. Problema extra: http://blog.mrmeyer.com/2011/wcydwt-coke-v-sprite/

    Para este, “extra”, no voy a dar la solución por escrito.