Matemáticas I

(Aritmética)

Grado en Magisterio de Educación Primaria

Universidad de Alcalá

Pedro Ramos Alonso

Departamento de Física y Matemáticas

Índice general

Capítulo 1

Introducción

Estos apuntes corresponden a la asignatura de Matemáticas I, que se imparte en el Grado en Magisterio de Educación Primaria en la Universidad de Alcalá. La asignatura está dedicada al estudio de la aritmética elemental. Revisaremos los procedimientos básicos de la aritmética, porque por supuesto es imprescindible conocer los algoritmos (los clásicos, y otras alternativas) para calcular sumas, restas, multiplicaciones y divisiones de números naturales, así como los procedimientos para operar con fracciones. Pero queremos dejar claro desde el principio que no nos interesa solo el cómo se hacen las cosas, sino el por qué se hacen de esa forma, por qué funcionan los procedimientos que todos conocemos. Estos son algunos ejemplos de las cuestiones que nos ocuparán, y que es posible que sean nuevas para algunos lectores.

1. $$\begin{array}{r} 6\,4\,5 \\ -\;1\,2\,8 \\ \hline 5\,1\,7 \end{array}$$

   El algoritmo tradicional en España para calcular la resta de la izquierda se suele verbalizar en las aulas de la siguiente forma:

   Del 8 al 15 van 7, y me llevo 1 ... (luego esa 1 se le suma al 2 de las decenas del sustraendo)

   No tenemos 15 unidades, sino 5. ¿Qué estamos haciendo exactamente? ¿Por qué funciona este procedimiento?

2. $$\begin{array}{r} 6\,4\,7 \\ \times\quad 2\,8 \\ \hline 5\,1\,7\,6 \\ 1\,2\,9\,4\,\square \;\; ? \\ \hline 1\,8\,1\,1\,6 \end{array}$$

   En el caso del algoritmo tradicional de la multiplicación, que se muestra a la izquierda, cuando multiplicamos 2 por 7, el 4 lo ponemos debamo del 7, dejando el hueco que se muestra. Este hueco es una fuente común de errores en los alumnos que están aprendiendo a multiplicar, porque se olvidan de dejarlo. ¿Por qué es necesario dejar ese hueco?

3. Esto no es una pregunta sobre un procedimiento, sino un problema "básico" de fracciones, o que debería ser básico cuando se entienden las ideas fundamentales sobre fracciones. El problema se debe resolver con métodos de primaria, es decir, sin usar procedimientos algebraicos.

   Luis y Marta tienen la misma cantidad de dinero. Organizan una fiesta juntos, y Luis gasta la mitad de su dinero en organizarla. Como Marta ha invitado a más amigos, ella gasta 3/4 de su dinero en la organización. ¿Qué fracción del total del dinero que tenían entre los dos han gastado en organizar la fiesta?

4. ¿Qué significa $4 : \frac{2}{3}$?

   Obsérvese que no estoy preguntando por el resultado de la operación, ya sabemos que es 6. Estoy preguntado por cuál es el significado de esa operación. Dicho de otra forma: ¿puedes pensar un problema, una situación, que se resuelva haciendo esta división?

5. El máximo común de dos números es, como su nombre indica, el mayor divisor común de los dos números. Sabemos que si queremos calcular, por ejemplo, el máximo común de los números 90 y 84, lo que tenemos que hacer es factorizarlos, $90 = 2 \times 3^2 \times 5$, $84 = 2^2 \times 3 \times 7$ y tomar los factores comunes (con el menor exponente). Por tanto, el máximo común divisor de 90 y 84 es $2 \times 3 = 6$. ¿Por qué funciona esta forma de calcular el máximo común divisor?

1.1. La importancia del por qué

Cualquiera que haya tenido niños de edad temprana alrededor sabrá que casi todos pasan por una etapa en la que continuamente están preguntando ¿por qué? El ser humano tiene un gusto natural por entender el mundo, por una razón evolutiva clara: cuando entendemos por qué funcionan las cosas, cuando comprendemos su funcionamiento, estamos mejor preparados ante posibles imprevistos, y eso fue en su momento una ventaja evolutiva clara.

En matemáticas ocurre lo mismo: si sabemos por qué funciona un procedimiento, estaremos más preparados para saber cuándo se puede generalizar, y cuándo no. Un ejemplo: todos sabemos que para multiplicar un número entero por 10 es suficiente con añadir un 0. Un error estándar cuando se empieza a operar con números decimales es generalizar esta idea, y escribir $17{,}3 \times 10 = 17{,}30$. Si un alumno es consciente de por qué multiplicar un número entero por 10 se traduce simplemente en añadir un 0, es mucho más probable que sea consciente de que esa misma idea no se generaliza a la aritmética con números decimales. Una gran parte de los errores en los procedimientos que vemos en nuestras aulas tienen la misma base: generalizar a nuevas situaciones, de manera incorrecta, técnicas que eran válidas previamente. Y en la mayoría de los casos la mejor forma de evitarlo es la misma: entender por qué esa técnica funcionaba en un entorno (esto casi siempre deja claro por qué no funciona en una nueva situación).

Richard Skemp es uno de los autores que de forma más clara ha tratado esta problemática [**?**]. Skemp habla de *comprensión instrumental* (instrumental understanding) y de *comprensión relacional* (relational understanding). En una imagen que me parece muy clarificadora, Skemp compara la compresión en matemáticas con el conocimiento de una ciudad. En el caso de la comprensión instrumental, lo que sabemos de la ciudad es cómo hacer ciertos recorridos, como ir desde el punto A hasta el B, desde el C hasta el D, etc. El inconveniente de este conocimiento es claro: si un día necesitamos ir a un nuevo lugar, o si cortan una calle por obras, tendremos dificultades para adaptar las rutas conocidas a una nueva situación. En el caso de la comprensión relacional, lo que ocurre es que tenemos en la cabeza una imagen completa de la ciudad, y esto nos permite planear rutas a nuevos destinos, o hacer frente a imprevistos, como unas obras en una calle conocida.

Una componente fundamental de la comprensión relacional de las matemáticas es ser conscientes de las conexiones entre diferentes conceptos, y entre diferentes áreas de la disciplina. El objetivo de esta asignatura es, por supuesto, revisar los procedimientos de la aritmética básica pero, sobre todo, trabajar esa comprensión relacional, entender los por qués de los diferentes procedimientos, y las conexiones entre diferentes conceptos.

Dado que el tiempo disponible para la asignatura es limitado, priorizaré los contenidos que me parecen más importantes para la docencia, a veces en detrimento de aspectos más teóricos. Por último, aunque en algunas ocasiones haré algún comentario que entre en lo que se suele entender como didáctica de las matemáticas, queda pendiente para una futura versión de estas notas la integración de los contenidos de la aritmética y sus aspectos didácticos.

Capítulo 2

Los números naturales

2.1. Números naturales. Sistemas de numeración.

Los *números naturales* son los que usamos para contar, es decir, 1, 2, 3, 4, etc. Estos son los primeros números que hemos aprendido todos, e históricamente, los primeros que surgieron. El conjunto de todos los números naturales se representa por $\mathbb{N}$,

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}.$$

Como la secuencia de números naturales no se agota, porque a cualquier lista de números naturales siempre podemos añadir uno más, decimos que $\mathbb{N}$ es *infinito*.

Estos números aparecieron por la necesidad de "contar", es decir, de describir el tamaño de un conjunto de objetos. Es importante distinguir la diferencia entre el concepto de número y su representación oral o escrita. Todas las culturas que desarrollaron un lenguaje han tenido palabras para los primeros números naturales. Sin embargo, en cuanto los números empiezan a crecer, resulta evidente que no es conveniente utilizar una palabra (o un símbolo) distintos para cada número. Surge así el problema de la representación de los números: los sistemas numéricos. La mejor forma de valorar adecuadamente la importancia de nuestro sistema numérico actual es repasar, al menos de forma rápida, el largo camino recorrido por la humanidad hasta dar con él. Los sistemas numéricos se pueden clasificar en tres grandes familias, que en orden histórico (y de complejidad) son los sistemas aditivos, los aditivo-multiplicativos y los multiplicativos.

2.1.1. Sistemas aditivos.

En los sistemas aditivos, el valor del número se determina sumando los valores de los símbolos que lo componen. El ejemplo más sencillo, y también el método más intuitivo para representar cantidades pequeñas, es el sistema que se utilizaba en Mesopotamia, donde cada número se representaba a partir de marcas (figura 2.1); este sistema se sigue usando, en la actualidad, para hacer pequeños recuentos. El sistema funciona bien para cantidades pequeñas, pero obviamente el número de marcas a utilizar es excesivo cuando las cantidades empiezan a crecer.

Una posible mejora de esta idea es utilizar símbolos específicos para determinadas cantidades. Por ejemplo, en el sistema de numeración babilonio, a la hora de representar los 60 primeros

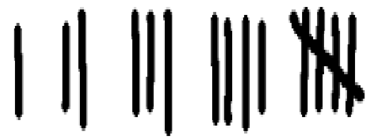


Figura 2.1: Sistema de marcas utilizado en Mesopotamia.

números se utilizaba un símbolo especial para el 10 (véase la figura 2.2). A partir de 60 la representación cambiaba, como veremos más adelante, porque su sistema era *sexagesimal.*

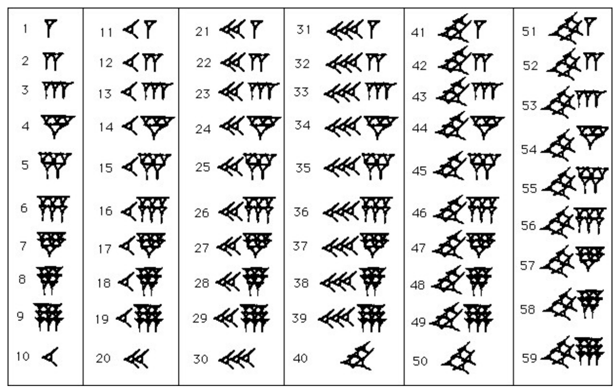
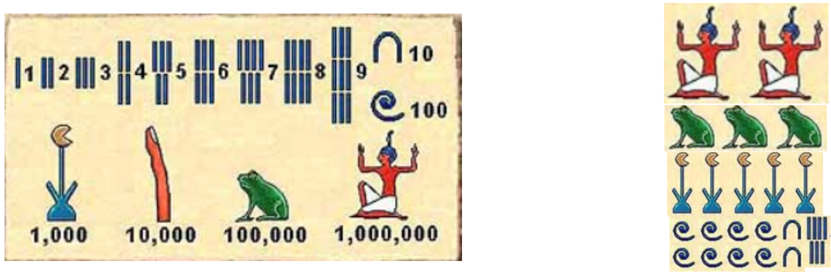


Figura 2.2: Primeros 60 números naturales en Babilonia. Imagen tomada del blog https://conlamenteabierta.wordpress.com

La civilización egipcia se enfrentó a la necesidad de manejar numeros grandes. El Cairo fue en su momento la ciudad más poblada de la tierra, y la administración egipcia necesitaba representar con precisión números grandes. A pesar de que el sistema sigue teniendo carácter aditivo, la forma en que resolvieron el problema de introducir símbolos para números grandes es ya un primer paso hacia nuestro sistema de numeración, al considerar el 10 y sus potencias. En la figura 2.3 se pueden ver los símbolos usados por los egipcios, y como ejemplo, la representación del número 2 305 827 en este sistema aditivo: lo único que hay que hacer es sumar el valor de cada uno de los símbolos que aparecen. Es fácil ver lo laborioso que resulta manejar grandes números con este tipo de sistema de numeración. En especial, la aritmética no es sencilla. Los escribas egipcios encargados de los cálculos aritméticos estaban entre la élite de la administración.

Otros sistemas de numeración en los que se da la sustitución de cantidades por símbolos son el griego y su evolución, el romano, bien conocido por todos. Todos estos sistemas tienen el mismo problema: funcionan razonablemente bien para cantidades pequeñas, y empiezan a volverse complicados con cantidades más grandes. Además, la aritmética con estos sistemas de numeración es complicada, como cualquier lector puede comprobar sin más que intentar una sencilla multiplicación usando números romanos.

[2]En esta página (en inglés) se puede encontrar mucha más información sobre las matemáticas del antiguo Egipto.

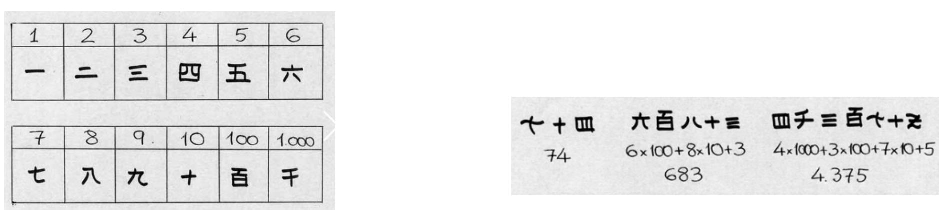


a) b)

Figura 2.3: a) Símbolos en el sistema de numeración egipcio. Imagen tomada de https://discoveringegypt.com[2]. b) Representación del número 2 305 827.

2.1.2. Sistemas aditivo-multiplicativos.

La idea de estos sistemas es evitar excesivas repeticiones de los símbolos. Si tenemos, como en el ejemplo anterior, 5 millares, en lugar de repetir 5 veces el símbolo del millar, ponemos el símbolo del millar y otro símbolo que nos dice que hay 5 millares. Un buen ejemplo de este sistema es el sistema chino clásico; la idea puede verse en la figura 2.4. Cuando recorremos el número de izquierda a derecha, cada símbolo que representa los dígitos del 1 al 9 nos dice cuántos grupos del símbolo que representa potencias de 10 (y que está justo a su derecha) tenemos.



a) b)

Figura 2.4: a) Principales símbolos en el sistema chino. b) Carácter híbrido (aditivo-multiplicativo) del sistema chino. Imágenes tomadas de http://personal.us.es/cmaza/china/numeracion.htm

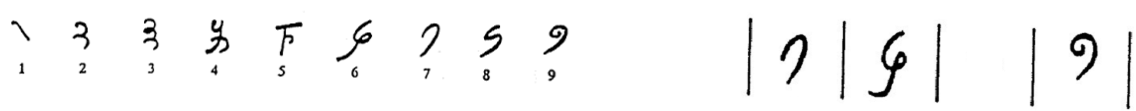
2.1.3. Sistemas multiplicativos.

Una idea simple, pero revolucionaria, nos permite dar el siguiente paso, y llegar a los sistemas multiplicativos, como el nuestro. Podemos prescindir de los símbolos de los grupos de 10 y sus potencias si, por convenio, acordamos que los escribimos siempre en el mismo orden, empezando por las *unidades* a la derecha, los grupos de 10 en la siguiente posición, los grupos de 10^2 en la siguiente, etc.

Aunque existe algún ejemplo de sistema multiplicativo más antiguo (el babilonio, basado en grupos de 60) el sistema hindú es el origen de nuestro sistema de numeración. El sistema hindú es multiplicativo, y *decimal* (porque considera grupos de 10 y de potencias de 10). Este sistema fue probablemente desarrollado en torno al siglo I, pero hay acuerdo general de que ya estaba en uso en la India en el 400 d. C. El sistema se basa en 9 dígitos que pueden verse en figura 2.5.a). La grafía de algunos de estos símbolos se parece mucho a nuestras cifras. La elección de un sistema decimal tiene que ver con el uso natural de los dedos de las manos para contar.

Este sistema llegó a Europa gracias a los árabes. Al-Jwarizmi (de cuyo nombre deriva la palabra "algoritmo") escribió el libro *Acerca de los cálculos con los números de la India* alrededor del año 825. Leonardo de Pisa (1170-1250), más conocido por Fibonacci, aprendió la notación indo-arábiga en Argelia, y la introdujo en Europa en su libro *Liber Abaci* (1202).

En la figura 2.5.b) podemos ver la representación de nuestro 7609 en el sistema hindú de numeración. Las cifras están separadas por barras, cuya necesidad proviene del hecho de dar la información de que en este ejemplo el lugar de los grupos de 10 está vacío, porque no tenemos ningún grupo de 10. Para prescindir de las barras, y llegar a nuestro sistema de numeración, solo necesitamos una alternativa más eficiente para decir que una posición está vacía. Estamos hablando, por supuesto, de la invención (o descubrimiento) de un carácter para denotar esto, el número 0.



a) b)

Figura 2.5: a) Cifras del sistema hindú. b) Representación del número 7609.

Parece ser que los babilonios tenían también un símbolo para representar el vacío, pero nuestro cero proviene, nuevamente, de los hindúes. En sánscrito (la lengua clásica de la India),"vacío" se dice "shunya", que los árabes tradujeron como "sifr"; nuestra palabra "cifra" viene de ahí. Merece la pena pararse a pensar en que el cero no es un número[3] como los demás. Habíamos convenido en que los números naturales son los números que se usan para contar. La utilidad del cero es distinta, nadie dice "tengo cero caramelos". Precisamente por ello, la aparición del cero en la historia de las matemáticas es muy posterior a la de los números naturales. En algunos libros de matemáticas se incluye al cero en los números naturales. Es una cuestión de convenio, que tiene sus ventajas cuando se estudian otros temas (como veremos al estudiar la divisibilidad). Lo que es importante es tener claro que, tanto desde el punto de vista histórico, como didáctico, el cero no es un número como los demás.

Nuestro sistema de numeración se conoce también como sistema de valor posicional, ya que el valor de cada cifra depende de la posición que ocupe. Sin miedo a exagerar, la notación posicional se puede considerar como uno de los grandes inventos de la historia de la humanidad. Estamos tan acostumbrados a ella que seguramente no le damos el valor que tiene y, en particular, no somos conscientes de la dificultad que acarrea su comprensión. La correcta comprensión de la notación posicional es uno de los contenidos más importantes de los primeros cursos

[3] A lo largo de este capítulo, y hasta que empecemos el estudio de las fracciones, cuando hablamos de número se debe entender número natural.

de primaria. Para tratar de entender en profundidad la notación posicional, y para ser un poco más conscientes de las dificultades que puede encontrar un niño cuando la encuentra en 1º y 2º de primaria, vamos a estudiar cómo escribiríamos los números si, en lugar de hacer grupos de diez unidades, hiciéramos grupos de distinto tamaño.

2.2. Sistemas de base b.

Nuestro sistema de notación posicional está basado en el diez porque tenemos diez dedos. Al llegar a diez unidades, hacemos un grupo de diez, al que llamamos *decena*. Cuando tenemos diez decenas, eso hace una *centena*. Luego, al tener diez centenas, tenemos un millar, etc. Esto hace que podamos representar cualquier número, por grande que sea, de manera muy económica, usando un conjunto de solo diez símbolos, las cifras $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$.

Seguramente, la mejor forma de acercarnos a la dificultad que puede experimentar un niño de 6 años que quiere empezar a entender la notación posicional, por ejemplo, por qué escribimos 10 para representar el diez, es pensar cómo escribiríamos los números si tuviéramos ocho dedos. En ese caso, no haríamos grupos de diez, sino grupos de ocho. Por tanto, solo necesitaríamos usar las cifras del 0 al 7. ¿Está claro por qué? Lo veremos con detalle, pero creo que la mejor forma de aprender es descubrir cosas como esta por uno mismo, a través de ejercicios, de actividades pensadas para ello. Es fundamental que le dediques a estos ejercicios unos minutos de reflexión, antes de seguir avanzando en el texto. Para tratar de facilitar esto, las soluciones de estos ejercicios están en un capítulo al final de los apuntes, el capítulo dedicado a ejercicios resueltos. Es muy posible que la forma en que aprendiste matemáticas, basada esencialmente en repetir lo que ya habías hecho antes, haga que esto te resulte, al principio, muy complicado. Una buena forma de romper esta barrera inicial es trabajar con un compañero en tu misma situación, no alguien que te diga lo que tienes que hacer, sino alguien al que le puedas contar tus ideas, y que pueda también aportar las suyas. Ese intercambio de información, y ese análisis de qué ideas son útiles, y cuáles no, ayuda mucho al aprendizaje.

Ejercicio 2.1. Llamamos *base* 8 al sistema numérico basado en hacer grupos de 8, y de potencias de 8. ¿Cómo escribiríamos en base 8 las cantidades de puntos de la figura 2.6?

Antes de dar la definición general, veamos un ejemplo en base 5, con la representación gráfica que puede ayudar a entender mejor lo que estamos haciendo. En la figura 2.7 hemos representado una *tabla de valor posicional* con dos grupos de 5^3, un grupo de 5^2, tres grupos de 5 y cuatro unidades (recuerda, $5^0 = 1$). Este número lo representamos $2134_{(5}$. ¿Cómo escribimos este número en nuestro sistema usual, la base 10? Solo hay que hacer la cuenta que hemos escrito hace un momento[4]

$$2134_{(5} = 2 \times 5^3 + 1 \times 5^2 + 3 \times 5^1 + 4 \times 5^0 = 294$$

⚠ Este signo aparecerá cuando quiera llamar la atención sobre un detalle concreto, que me parece que es fuente de errores. Os pediría que os detuvierais con calma en estos puntos, y que

[4]He escrito el desarrollo con todo detalle, para tratar de que se vea mejor la estructura. Por supuesto, es igual de correcto escribir $2134_{(5} = 2 \times 5^3 + 5^2 + 3 \times 5 + 4 = 294$.

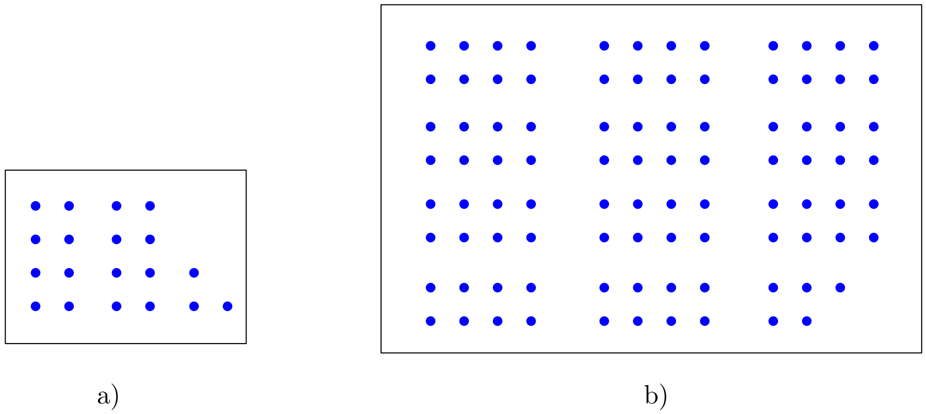


Figura 2.6: Escritura de cantidades en base 8.

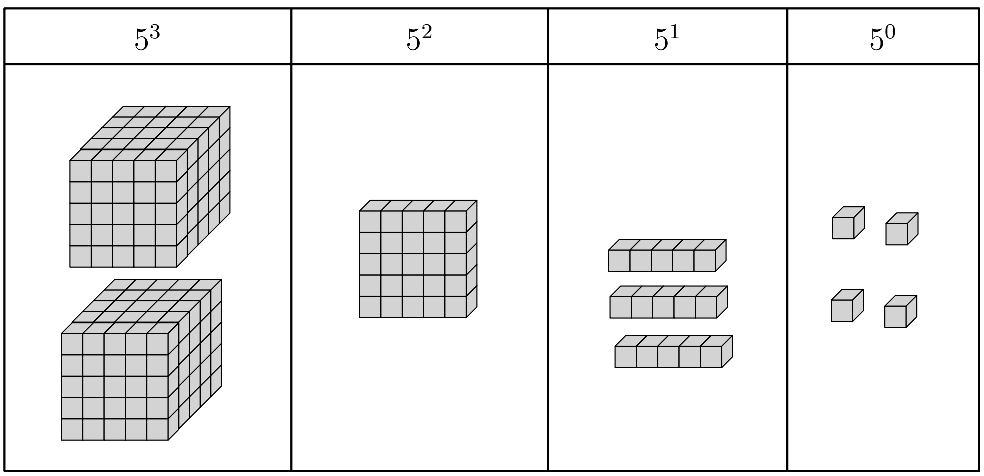


Figura 2.7: Ejemplo de tabla de valor posicional.

los tomarais en consideración. Están basados en la experiencia de ocho años en esta asignatura, y de haber reflexionado sobre las causas de los errores y las dificultades de comprensión de los alumnos de cursos anteriores.

En este caso, querría detenerme en el detalle de cómo leer la expresión $2134_{(5}$. Es importante empezar a darnos cuenta de que cómo se leen, cómo se *verbalizan*, las expresiones matemáticas, puede incidir en la comprensión y, por tanto, en el aprendizaje. Es muy posible que estéis leyendo “dos mil ciento treinta y cuatro, en base 5”. No es buena idea, porque esa forma de verbalizar nos confunde con la tradicional en base 10. Para entender mejor lo que estamos haciendo, os recomiendo que esa expresión la verbalicéis como “dos, uno, tres, cuatro, en base 5”.

Fin de ⚠

Ya estamos en condiciones de dar la definición general de representación de un número en base *b*. Vamos a usar aquí algo de notación algebraica. Es posible que para algunos lectores no sea fácil de descifrar. Os animo a intentar hacerlo. Ser capaz de traducir el lenguaje algebrico a lenguaje natural os ayudará en la comprensión.

Definición 2.1. Sea b un número natural mayor que 1 (si tomamos $b = 1$, todas las potencias de 1 son 1, y no es cierto lo que viene a continuación). Cualquier número natural n se puede expresar *de manera única* como una expresión $a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0 \,_{(b}$, donde los términos a_i son las *cifras* correspondientes a la base b, que representan los números desde 0 hasta $b-1$. Esta expresión representa el número

$$n = a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0 \,_{(b} = a_k b^k + a_{k-1} b^{k-1} + \cdots + a_1 b + a_0$$

2.2.1. Ejemplos de bases

Algunos valores particulares de la base b son importantes en algunas aplicaciones:

- Si tomamos $b = 2$, el sistema resultante se llama *binario*. En el sistema binario, solo se usan dos cifras, el 0 y el 1 (sería muy conveniente que el lector se parara un minuto para convencerse de por qué esto es así). Un número en sistema binario se escribiría, por ejemplo, $1010111_{(2}$. La cifra de la derecha corresponde a las unidades, la siguiente a los grupos de 2, la siguiente a los grupos de 2^2, y así sucesivamente. Como el número tiene siete cifras, el primer uno corresponde a grupos de 2^6. Para averiguar a qué número corresponde en la base 10 usual, es suficiente hacer el cálculo

  $$1010111_{(2} = 1 \times 2^6 + 0 \times 2^5 + 1 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = 87$$

  Igual que antes, los términos con un cero no es necesario escribirlos, aunque os recomiendo que lo hagáis, al principio.

  Aunque pueda parecer raro utilizar una base distinta de 10, en informática, en concreto, el sistema binario es fundamental. De hecho, toda la información que almacena un dispositivo electrónico está en formato binario: todos los textos, la música o las películas que se almacenan no son más que enormes cadenas de ceros y unos. En particular, la aritmética que hace un ordenador es en base 2. La razón es que, en realidad, un ordenador representa *bits* de información: el 0 corresponde a un circuito sin magnetizar (o sin corriente que lo atraviese), y el 1 corresponde a un circuito magnetizado (o con corriente). Por supuesto, esto se hace en circuitos de tamaño inconcebiblemente pequeño, y cualquier dispositivo electrónico contemporáneo contiene millones de tales circuitos.

- Si tomamos $b = 16$, el sistema se denomina *hexadecimal*. En este sistema hacemos grupos de 16, y de potencias de 16. Algún lector se habrá sorprendido un poco con la definición 2.1, y por qué hablamos de “cifras que representan los números desde 0 hasta $b-1$”. La razón la vamos a ver ahora. Si la base no es mayor que 10, necesitamos símbolos para representar los números desde el 0 hasta $b-1$. Estos símbolos serán las usuales. Por tanto, en base 10 usamos las cifras de todos conocidas: $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$. Pero, ¿qué ocurre si la base es mayor que 10? Si queremos representar diez unidades en base 16, no podemos escribir 10, porque esto en base 16 significa “un grupo de 16 y cero unidades”. Por tanto, en base 16 necesitamos símbolos (cifras) nuevas, que representen las cantidades diez, once, doce, trece, catorce y quince. Lo usual es tomar las primeras letras mayúsculas, y así,

A representa diez, B representa once, C representa doce, D representa trece, E representa catorce y F representa quince.

Por tanto, el número $E0A9B7_{(16}$ representa al número que tiene 7 unidades, 11 grupos de 16, 9 grupos de 16^2, 10 grupos de 16^3, 0 grupos de 16^4 y 14 grupos de 16^5. Es decir,

$$E0A9B7_{(16} = 14 \times 16^5 + 0 \times 16^4 + 10 \times 16^3 + 9 \times 16^2 + 11 \times 16 + 7 \qquad (2.1)$$

Obsérvese que en el párrafo previo a la igualdad (2.1), hemos leído las cifras de derecha a izquierda, como suele hacerse cuando hablamos de unidades, decenas, etc. En cambio, en la fórmula aparece el desarrollo que corresponde a leer el número de izquierda a derecha, igual que hacemos cuando se considera lo que se suele conocer como "descomposición polinómica" de un número, y que aparece ya en los últimos cursos de primaria. Hay que acostumbrarse a estas dos formas de leer e interpretar los números. Como ya he dicho, y volveré a repetir, tener soltura para traducir el lenguaje natural en lenguaje matemático, y viceversa, es fundamental para el aprendizaje.

El sistema hexadecimal (la base 16) es también importante en informática. Quizá algún lector haya visto al manejar un ordenador cadenas de números y letras. Seguramente se correspondan a números expresados en notación hexadecimal, que tiene la ventaja de hacer las expresiones más compactas. ¿Por qué 16 y no, por ejemlo, 18? Hay una razón, por supuesto. En matemáticas casi siempre hay una razón para todo. Al ser 16 una potencia de 2, cambiar la expresión de un número de una base a otra es (desde el punto de vista de la cantidad de cálculos necesarios) "sencillo".

En este ejemplo se muestra hasta qué punto la notación es más compacta (cuando no aparece el subíndice de la base, estamos por supuesto en nuestra conocida base 10).

$$A6B7C_{(16} = 10100110101101111100_{(2} = 682876$$

2.2.2. Cambios de base

Cuando tenemos un número expresado en base b, ya sabemos lo necesario para escribir ese número en base 10; no hay más que traducir el significado de la notación en base b, y escribir que tenemos cierto número de unidades, de grupos de b, de b^2, etc. Ya hemos hecho algún ejemplo, como la expresión (2.1).

Si tenemos un número expresado en base 10 y queremos escribirlo en base b, el ejercicio 2.1 nos muestra el camino a seguir. Vamos a ver un ejercicio, en el que daremos dos alternativas para sistematizar este proceso.

Ejercicio 2.2. Expresa el número 2354 en base 4.

Opción 1:

Empezamos haciendo los grupos de grandes a pequeños. Para ello, calculamos potencias de 4: $4^2 = 16$, $4^3 = 64$, $4^4 = 256$, $4^5 = 1024$, $4^6 = 4096$. Con esto ya podemos asegurar que en 2354 hay grupos de 4^5, pero no hay ningún grupo de 4^6. En concreto, tenemos[5]

$$2354 = 2 \times 4^5 + 306 \tag{2.2}$$

A continuación, hacemos grupos de 4^4 con esas 306 unidades: $306 = 1 \times 4^4 + 50$.
Una vez más: $50 = 3 \times 4^2 + 2$.
Llevando ahora estos dos resultados a la igualdad (2.2) tenemos

$$2866 = 2 \times 4^5 + 1 \times 4^4 + 3 \times 4^2 + 2 \tag{2.3}$$

y esto nos permite expresar el número 2865 en base 4 (¡ojo con los ceros!):

$$2354 = 210302_{(4}$$

Opción 2:

Podríamos empezar haciendo grupos de 4: $2354 = 588 \times 4 + 2$.
Ahora, esos 588 grupos de 4 los agrupamos de 4 en 4, y cada 4 grupos de 4 son un grupo de 4^2.
Como $588 = 147 \times 4$, tenemos que

$$2354 = 147 \times 4^2 + 2 \tag{2.4}$$

Agrupando de 4 en 4 esos 147 grupos de 4^2 hacemos grupos de 4^3. Como $147 = 36 \times 4 + 3$, sustituyendo en (2.4) se obtiene

$$2354 = (36 \times 4 + 3) \times 4^2 + 2 = 36 \times 4^3 + 3 \times 4^2 + 2. \tag{2.5}$$

Repetimos el proceso, haciendo grupos de 4^4 con esos 36 grupos de 4^3. Como $36 = 9 \times 4$,

$$2354 = 9 \times 4 \times 4^3 + 3 \times 4^2 + 2 = 9 \times 4^4 + 3 \times 4^2 + 2 \tag{2.6}$$

Finalmente, como $9 = 2 \times 4 + 1$ obtenemos

$$2354 = (2 \times 4 + 1) \times 4^4 + 3 \times 4^2 + 2 = 2 \times 4^5 + 1 \times 4^4 + 3 \times 4^2 + 2 \tag{2.7}$$

que coincide, por supuesto, con la expresión (2.3) obtenida con la primera opción:

$$2354 = 210302_{(4}.$$

Aunque ya ha aparecido un par de veces la palabra *algoritmo*, es el momento de detenerse en ella un momento y dejar claro qué es un algoritmo.

Según la RAE, un algoritmo es un “conjunto ordenado y finito de operaciones que permite hallar la solución de un problema”. Esta definición puede dar a enteder que estamos hablando solo de matemáticas, y personalmente prefiero definir algoritmo como “conjunto ordenado y finito de instrucciones que permite hacer una tarea”. Por tanto, estos son ejemplos de algoritmos:

[5]Esta igualdad la debéis verbalizar como 2354 son 2 grupos de 4^5 y sobran 306, y se obtiene de la división de 2866 entre $4^5 = 1024$. Es posible que algún lector tenga aquí alguna dificultad. Dentro de unas páginas llegaremos a la división, y en ese momento veremos cuál es el origen de esta dificultad, y cómo se puede resolver.

- las instrucciones para preparar un café con una cafetera concreta.
- si tenemos un conjunto de palabras, las instrucciones para ordenarlas alfabéticamente.
- si tenemos dos números de varias cifras, las instrucciones para calcular su suma.

Un error común en el debate social, y en los medios de comunicación, es confundir la palabra “algoritmo” con la palabra “logaritmo”. Los logaritmos tienen que ver con las potencias, se estudian en secundaria, y no los trataremos en este curso.

Los procedimientos que hemos visto para expresar 2354 en base 4 no son algoritmos, en sentido estricto, porque no hemos dado las instrucciones, pero contienen las ideas necesarias para formalizar los algoritmos correspondientes. Si hacéis una búsqueda en internet de un algoritmo para resolver este problema, o si habéis estudiado informática en secundaria, seguramente resulte familiar otro algoritmo para hacer este cambio de base, el que se muestra en la figura 2.8. Este algoritmo es sencillo de formalizar:

1. Divide el número 2354 entre 4. Anota el resto.
2. Toma el cociente de la división anterior, y divídelo entre 4. Anota el resto.
3. Repite el paso 2, hasta que el cociente sea menor que 4.

En la figura he resaltado en azul los restos y el último cociente. Como vemos han aparecido, de derecha a izquierda, las cifras en base 4 buscadas. ¿Por qué funciona este algoritmo? Si se quiere explicar, se puede hacer a partir de la opción 2 antes presentada. Pero no lo voy a hacer; en lugar de ello, creo que es este un buen momento para hacer una primera reflexión sobre qué tipo de procedimientos son interesantes en la educación matemática básica en estos tiempos.

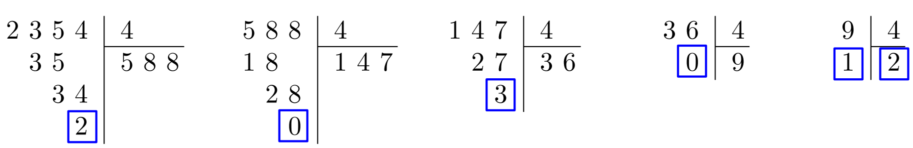


Figura 2.8: El algoritmo “usual” para el cambio de base.

Los argumentos a favor del algoritmo de la figura es que es “más rápido”, y “más fácil de aprender”. Y estos argumentos son ciertos, sin duda. El problema es que, si lo que queremos en algo rápido y fácil, hay una alternativa mejor: estira el brazo y coge tu teléfono móvil, busca un conversor de base, teclea el número y mira la respuesta. Este segundo algoritmo es válido (con ligeras modificaciones) para toda la aritmética, y cada vez para más tareas, en matemáticas y en otras disciplinas. ¿Quiere esto decir que ya no es necesario aprender a sumar, restar, etc? No, por supuesto que no. Lo que quiere decir es que aprender a sumar, por ejemplo, ya no es *un fin en sí mismo*. Ser competente con la aritmética básica, en el sentido de saber calcular los resultados de sumas, restas, multiplicaciones y divisiones era, hasta hace unas décadas, una habilidad importante, necesaria en la vida cotidiana y muy valorada en muchas profesiones. Hace años que esto ha dejado de ser cierto, y el interés de aprender a calcular se centra ahora en que es la mejor forma de entender los números, de adquirir lo que se conoce como *sentido numérico*. Lo importante es que el objetivo ha cambiado: ya no nos interesa solo el resultado correcto (si fuera ese el caso, repito, la tecnología es claramente superior) sino *entender* lo que estamos haciendo, y profundizar en el aprendizaje de la materia en cuestión.

Y esto es así con muchos procedimientos en matemáticas, y en otras disciplinas, no solo en la aritmética básica. Si memorizamos un algoritmo sin entenderlo, con él vamos a ser capaces de resolver una tarea muy concreta. Esta tarea ya habrá sido resuelta muchas veces y habrá un dispositivo tecnológico que lo hará más rápido y mejor que nosotros. El valor de este tipo de aprendizaje es, creo, muy cercano a cero. Porque, además, si no entendemos el procedimiento, en cuanto cambie, aunque sea de forma pequeña, el planteamiento del problema, no seremos capaces de adaptar el algoritmo conocido a la nueva situación. Si, por el contrario, dedicamos la atención necesaria a la *comprensión de los procedimientos*, estaremos en mejores condiciones para adaptar el procedimiento conocido para resolver un problema parecido, pero no igual que el original.

El *pensamiento computacional* está de moda, y proliferan las propuestas para trabajarlo, ya en la etapa de primaria. Son propuestas interesantes, sin duda. Lo que me gustaría decir es que, desde mi punto de vista, aprender las matemáticas de la forma que estamos proponiendo es una alternativa idónea para poner las bases, ya desde el comienzo de primaria, del desarrollo de este pensamiento computacional.

2.3. El sistema de numeración oral

No voy a detenerme en las reglas para escribir los números “en letra”. En esta página de Wikipedia http://goo.gl/XJiZo podéis encontrar un excelente resumen de las reglas gramaticales para escribir los números correctamente. En muchos países se considera que este tema pertenece a la asignatura de Lengua, lo que no deja de tener sentido.

Sobre cómo leer un número como 72 080 023 002 305 006, dos observaciones:

1. El estándar internacional recomienda eliminar puntos, comas y otros símbolos de la parte entera de los números. Por supuesto, podemos usarlos cuando los alumnos están aprendiendo a leer números grandes, pero se deben ir eliminando cuando el proceso de aprendizaje lo permita. Para facilitar la lectura, dejamos un pequeño espacio cada tres cifras, como en el ejemplo.

2. Para leer un número como el anterior, es suficiente con agrupar las cifras de seis en seis, de derecha a izquierda. Así, el número anterior se leería *setenta y dos mil ochenta billones, veintitres mil dos millones, trescientos cinco mil seis.*

En cuanto a los ordinales, es un hecho que están desapareciendo del lenguaje cotidiano. Cada vez es más difícil escuchar, o leer, “se celebra el *nonagésimo* aniversario de ...”. De nuevo, se trata de un tema de Lengua, no de Matemáticas. Lo que sí creo que deberíamos conseguir es que todos los alumnos, al terminar primaria, usaran la palabra *treceavo* para hablar de fracciones, y *decimotercero* para el ordinal correspondiente.

2.4. Suma de números naturales

Antes de empezar con el estudio de la suma, un comentario sobre los conocimientos previos necesarios. Para que el alumno pueda entender la operación de suma, es fundamental que antes haya adquirido el concepto de *cantidad*. Un posible error en la etapa de educación infantil es que se haya memorizado la secuencia numérica, y el alumno “sepa contar hasta cien”, por ejemplo. También habrá trabajado la grafía de los números, y reconocerá la grafía del número 4, por ejemplo. Pero debemos asegurarnos de que también entiende qué significa la cantidad 4, por ejemplo con actividades como la sugerida en la figura 2.9. Este tipo de temas se tratarán con más detalle en la asignatura de Didáctica de las Matemáticas, y en una futura versión de este texto, en la que se traten los aspectos más relacionados con la didáctica de los contenidos que estamos estudiando.

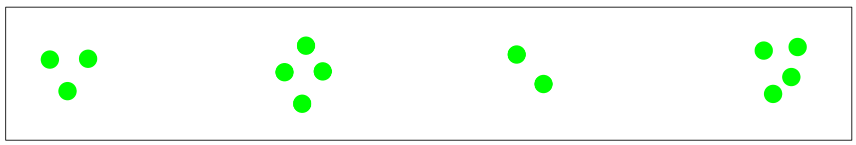


Figura 2.9: Rodea los conjuntos que tengan la misma cantidad de puntos.

Como ya hemos dicho, el objetivo de este texto es detenerse en los temas que causan más dificultades en las aulas, y el concepto de suma no es uno de ellos. Si se quiere definir la suma de dos números a y b, seguramente lo más intuitivo sea recurrir al cardinal de los conjuntos (el cardinal de un conjunto es simplemente la cantidad de elementos que tiene) y a la unión de conjuntos: si tenemos un conjunto A que tiene a elementos, y un conjunto B que tiene b elementos, la suma $a+b$ es simplemente la cantidad de elementos del conjunto $A \cup B$, que es el conjunto que se obtiene al juntar los elementos de A con los de B.

En cuanto a las propiedades de la suma, también son intuitivas y no plantean dificultades en las aulas:

1. Es una *operación interna*, es decir, cuando se suman dos números naturales se obtiene otro número natural.

2. Es *conmutativa*, es decir, para cualesquiera números a y b se tiene que $a+b=b+a$. En muchos libros de texto de primaria viene enunciada esta propiedad, con su nombre. Creo que hay demasiada terminología poco apropiada para la etapa de primaria. Personalmente, eliminaría la palabra “conmutativa” al menos de los primeros cursos de primaria; lo importante es que los niños entiendan que para sumar dos números se puede hacer en cualquier orden, y esto lo entienden sin problemas con las actividades adecuadas.

3. Es *asociativa*, es decir, si tengo que sumar tres números, puedo sumar primero dos, y el resultado sumarlo al tercero, y el resultado no depende de qué dos números sume al principio. Es decir, si a, b y c son números naturales, $(a+b)+c=a+(b+c)$.

2.4.1. Algoritmos de la suma

Cuando los alumnos empiezan 1º de Primaria, lo normal es que *sumen contando*. Por supuesto, para ello es un prerrequisito que hayan adquirido de forma adecuada la habilidad de contar una colección de objetos. Es importante dedicar el tiempo necesario al principio del curso para comprobar el nivel de desarrollo de cada alumno. En la técnica de "sumar contando" se pueden distinguir dos niveles de desarrollo:

1. en el primer nivel, cuando le presentamos el ejercicio de la figura 2.10, el alumno cuenta las 6 pelotas de un conjunto, cuenta las 3 pelotas del otro, y cuando le preguntamos cuál es la suma de 6 y 3 vuelve a empezar a contar, desde el principio.

2. en el segundo nivel, ya se ha dado cuenta de que es suficiente con empezar a contar desde 6 (en los inicios de este segundo nivel, puede también empezar a contar desde el número más pequeño).

Es importante que los alumnos tengan la oportunidad de hacer ejercicios como estos contando físicamente, con las manos, objetos que tenga en la mesa: garbanzos, palillos, policubos, ... Eso les ayuda a afianzar el concepto de cantidad, a entender qué ocurre cuando juntamos 6 objetos con 3 objetos y a ir desarrollando estrategias para lo que será el siguiente paso, *sumar sin contar*.

Una técnica que está bastante extendida en nuestras aulas, y que no da buenos resultados, es decirle al niño algo como "pon el 6 en tu cabeza, y ahora cuenta ...". Con esta idea, el 6 es un ente abstracto, y es más difícil de identificar con la cantidad 6. Por supuesto, habrá alumnos que aprenderán a sumar con técnicas como estas, pero para otros será el momento en que empezaremos a generar dificultades de aprendizaje. Darles la oportunidad de ver los objetos en la mesa, y tocarlos, y después representarlos gráficamente como en el ejemplo, ayuda a afianzar el concepto de cantidad, y evita la aparición de dificultades.

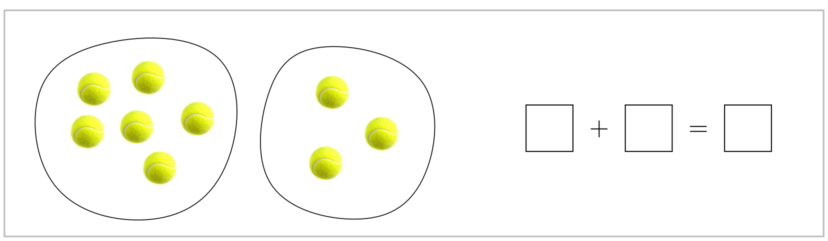
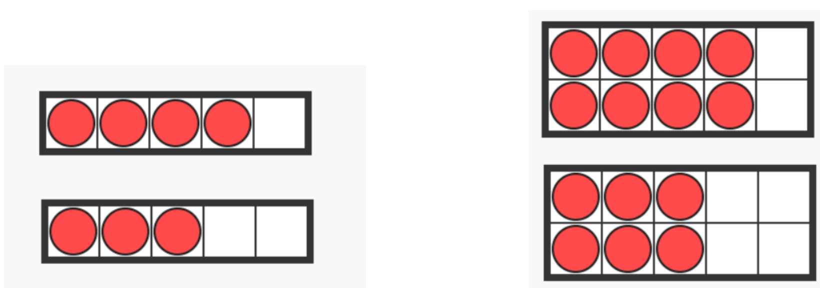


Figura 2.10: Sumar contando, con apoyo visual.

Antes de empezar con los algoritmos para calcular la suma de números "grandes" es fundamental que los alumnos desarrollen estrategias para *sumar sin contar*. En concreto, que sean capaces de calcular, con soltura, la suma de dos números de un dígito. Si un alumno tiene que calcular una suma de números "grandes" (con el algoritmo tradicional, o con otro alternativo), y no es capaz de calcular con soltura la suma, por ejemplo, $8+6$, se produce una sobrecarga de la *memoria de trabajo*. La teoría de la *carga cognitiva* [**?**] establece que nuestra memoria está organizada en una memoria *de largo plazo*, que está organizada en lo que los psicólogos llaman *esquemas* y una *memoria de trabajo*, en la que manejamos los nuevos conceptos. No hay límite conocido a la cantidad y complejidad de los esquemas que nuestro cerebro puede manejar.

Es el conocimiento que tenemos adquirido, y organizado para su uso. En cambio, la memoria de trabajo puede trabajar con una cantidad limitada de nuevos conceptos. Por eso es tan importante, especialmente en matemáticas, haber asimilado de verdad un tema antes de pasar al siguiente. Ese tema ya aprendido se organiza en esos esquemas, que podemos usar para trabajar con ellos en el futuro. Si un alumno está haciendo, por ejemplo, sumas con "llevadas", y tiene que usar su memoria de trabajo también para calcular $8+6$, es muy probable que se produzca un problema de sobrecarga de la memoria de trabajo, y que aparezcan las dificultades y, seguramente, los errores.

La solución de memorizar las "tablas de la suma" no es una buena alternativa. Es mucho mejor trabajar las sumas de números de un dígito, para que los alumnos vayan desarrollando estrategias que les permitan hacer esos cálculos de manera que, al final del proceso, esas sumas, esos "hechos numéricos básicos", estén disponibles en memoria. En la asignatura de Didáctica de las Matemáticas se verán algunas de esas actividades. De momento, nos conformamos con mencionar que la técnica de descomponer números, y completar grupos, es muy útil en esta etapa. En la figura 2.11 mostramos ejemplos de *rejillas numéricas* que ayudan a ver cómo se pueden hacer grupos de 5, o grupos de 10.[6] En la parte a), si queremos sumar $4+3$, una opción puede ser ayudarnos de los grupos de 5. Completar grupos de 10 es especialmente importante para el desarrollo de la aritmética. La imagen de la parte b) puede ayudar a ver cómo completar 10, y pensar $8+6=10+4=14$.



a) b)

Figura 2.11: Uso de rejillas para empezar a sumar sin contar.

Vamos a ver varios algoritmos para calcular la suma de dos números; el primero de ellos, el tradicional. Para tratar de verlo con los ojos de un niño que empieza su estudio, vamos a ver cómo se suman dos números expresados en base 5. Queremos huir de la mecánica del "me llevo una" y entender el significado de lo que estamos haciendo. Insisto en lo ya dicho: calcular sumas, como objetivo en sí mismo, no sirve de gran cosa. Calcular sumas entendiendo lo que estamos haciendo es un ejercicio perfecto para profundizar en la comprensión de la notación posicional, seguramente el concepto más importante de la aritmética de los primeros cursos de primaria.

Queremos calcular la suma

[6]Esta imagen, y otras que aparecerán más adelante, está hecha con la aplicación de la página https://www.mathlearningcenter.org. Es una página que os recomiendo explorar, tiene muchos recursos interesantes disponibles, de uso gratuito.

$$
\begin{array}{rrrrl}
 & 2 & 4 & 2 & 3_{(5} \\
+ & 1 & 2 & 1 & 4_{(5} \\
\hline
\end{array}
$$

y en la figura 2.12 hemos representado los sumandos en la tabla de valor posicional.

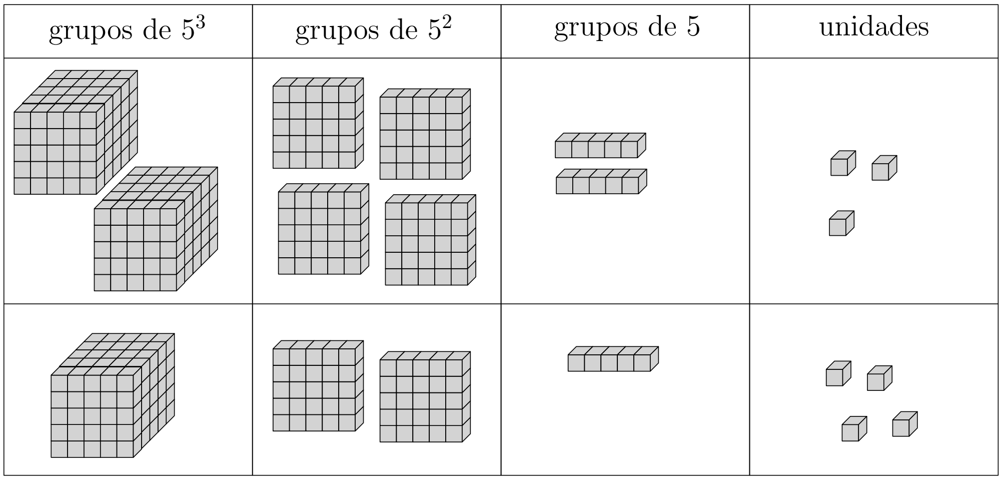


Figura 2.12: Suma en base 5 con tabla de valor posicional.

Procedemos ahora con el algoritmo tradicional, empezando por las unidades. Tenemos un total de 7 unidades. Como estamos en base 5, con esas 7 unidades podemos hacer un grupo de 5, y nos quedan 2. Ese grupo de 5 lo "llevamos" a su lugar en la tabla de valor posicional, los grupos de 5. En lugar de hablar de llevadas, vamos a llamar a este proceso *reagrupamiento*, ya que describe mejor lo que estamos haciendo. Este paso está representado en la figura 2.13 y lo escribimos con la conocida "llevada" en el algoritmo:

$$
\begin{array}{rrrrl}
 & 2 & 4 & \overset{1}{2} & 3_{(5} \\
+ & 1 & 2 & 1 & 4_{(5} \\
\hline
 & & & & 2_{(5}
\end{array}
$$

Ahora tenemos un total de 4 grupos de 5, con lo que no necesitamos hacer en esta posición ningún reagrupamiento. Pasamos a los grupos de 5^2: como tenemos un total de 6, con 5 de ellos hacemos un grupo de 5^3, como representamos en la figura 2.14 (fíjate, 5 grupos de 5^2 son un grupo de 5^3; en lenguaje matemático, $5 \times 5^2 = 5^3$). Finalmente, tenemos un total de 4 grupos de 5^3, y hemos terminado la suma:

$$
\begin{array}{rrrrl}
 & \overset{1}{2} & 4 & \overset{1}{2} & 3_{(5} \\
+ & 1 & 2 & 1 & 4_{(5} \\
\hline
 & 4 & 1 & 4 & 2_{(5}
\end{array}
$$

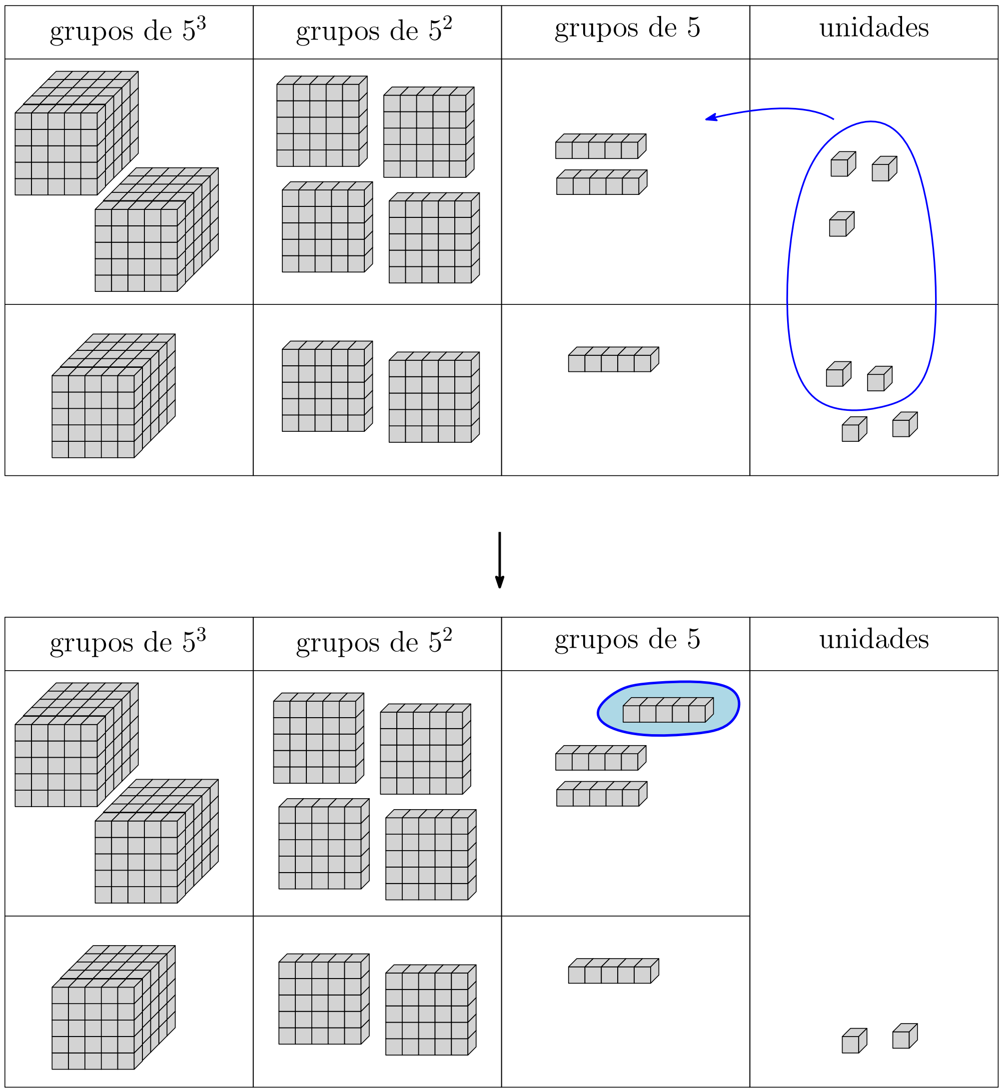


Figura 2.13: El reagrupamiento en las unidades.

En la figura 2.15 vemos la tabla de valor posicional para la suma 279 + 146. Recomendamos al lector que haga esta suma, con el algoritmo tradicional, pensando en el significado de los reagrupamientos necesarios. Para ello nos podemos ayudar de las imágenes con bloques de base 10 que se incluyen en el archivo materiales.pdf.

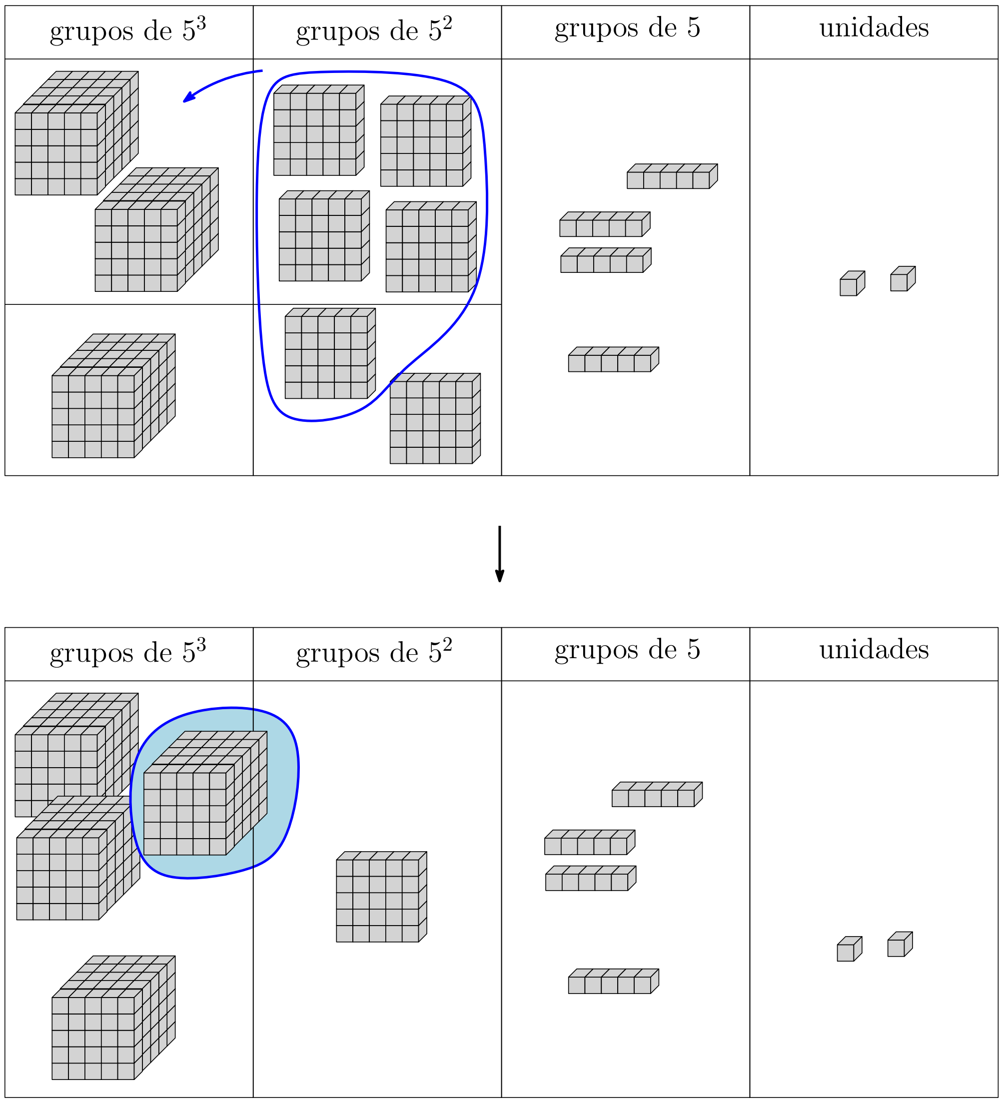
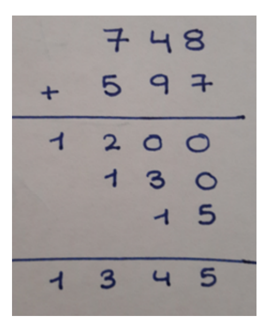


Figura 2.14: El reagrupamiento en los grupos de 5^2.

Un algoritmo alternativo al tradicional, también en columna, y que me parece interesante, es el que se muestra en la figura de la derecha. La idea es cambiar el orden de la suma, y empezar por la izquierda. Un alumno que suma de esta forma está pensando en la descomposición $748 = 700 + 40 + 8$ y, por tanto, se trata de un algoritmo que trabaja muy bien la notación posicional. Otra ventaja que tiene es que está muy relacionado con el cálculo mental, y la estimación: cuando queremos una aproximación a la suma de dos números "grandes", lo que hay que hacer es empezar a sumar por las cifras más significativas, las de la izquierda. Este algoritmo se conoce como el algoritmo de las *sumas parciales*. En esta página de la Universidad de Chicago se pueden ver (en inglés) algunos vídeos donde se presenta este algoritmo, y otros relacionados: http://everydaymath.uchicago.edu/teaching-topics/computation/.



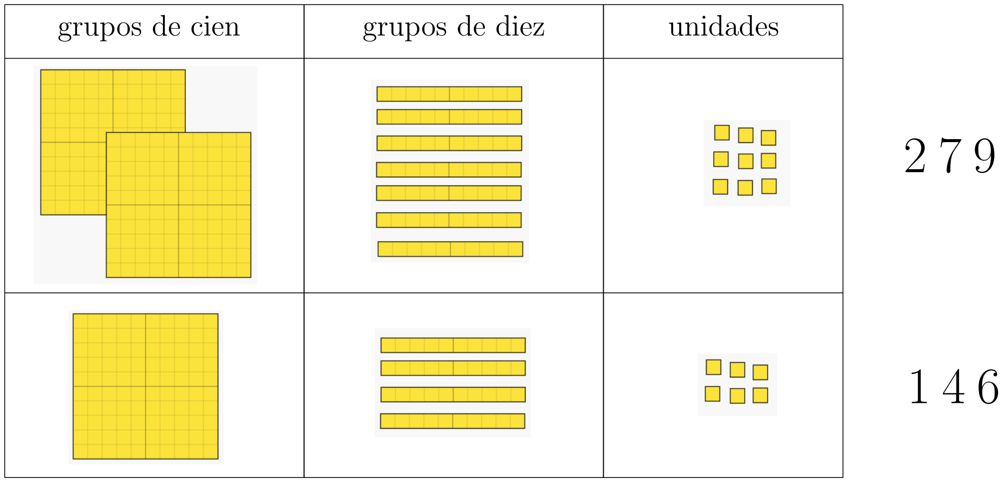


Figura 2.15: Tabla de valor posicional para una suma en base 10.

Otra alternativa que ha ganado presencia en nuestras aulas recientemente son los *algoritmos ABN*. El acrónimo proviene de algoritmos *Abiertos Basados en Números*. La idea del algoritmo es sencilla: los sumandos se colocan en columna, y se van pasando unidades de uno al otro (lo más eficiente, claro, será pasar unidades del menor al mayor). Cuando hemos pasado todas las unidades, en la columna correspondiente aparece la suma de los dos números. En la figura 2.16 se muestran dos ejemplos del cálculo de la suma $36+43$, donde hemos ido tomando nota de las unidades que se pasan en la columna de la izquierda. Son algoritmos *abiertos*, en el sentido de que no hay una forma única de proceder. Cada alumno, en función del grado de desarrollo de su capacidad de cálculo, toma la decisión de cuántas unidades pasar en cada etapa. Por tanto, un simple vistazo a una suma hecha por un alumno usando este algoritmo nos puede dar bastante información sobre la capacidad de cálculo del alumno. Se dice que están *basados en números* (tratan al número como un todo) en contraposición a los tradicionales, que trabajan con las cifras. Creo que la escritura no está del todo estandarizada (se puede argumentar que no hace falta, por supuesto) y si se buscan ejemplos es posible que no aparezca la columna de la izquierda del ejemplo, las cantidades que se van pasando. En el blog http://algoritmosabn.blogspot.com/ se puede encontrar más información.

$36+43$		
	Quedan	Suma
	36	43
6	30	49
1	29	50
9	20	59
20	0	79

$36+43$		
	Quedan	Suma
	36	43
10	26	53
16	10	69
10	0	79

Figura 2.16: Ejemplos de cálculo de la suma $36+43$ con el algoritmo ABN.

2.5. Resta de números naturales

Restar es intrínsecamente más difícil que sumar. Y esto se evidencia tanto en la comprensión del concepto como en los algoritmos. Desde el punto de vista matemático, la resta se define a partir de la suma. En notación algebraica,

$$a - b = c \Leftrightarrow a = b + c. \tag{2.8}$$

El término a se conoce como *minuendo*, el término b como *sustraendo*, y c es la *diferencia*. A diferencia de la suma, la resta *no es una operación interna en* $\mathbb{N}$, es decir, la diferencia de dos números naturales puede no ser un número natural (esto ocurre, claro, cuando el sustraendo es mayor que el minuendo).

La resta nos permite definir un *orden* en $\mathbb{N}$: diremos que $a < b$ si $b - a \in \mathbb{N}$.

Una pequeña excursión en la didáctica: la mejor forma de introducir la resta es con la idea de *restar quitando*, como se muestra en la figura 2.17 para $6-2$. De la misma forma que la primera técnica para sumar es *sumar contando*, en la resta los alumnos empezarán a restar *contando*.

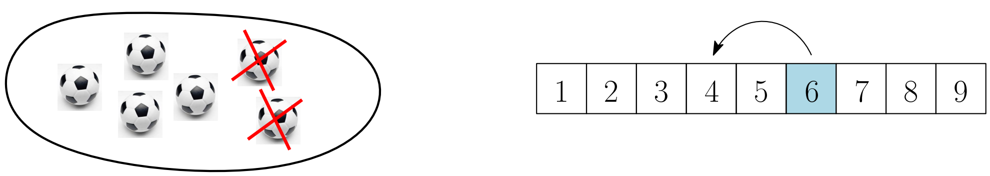
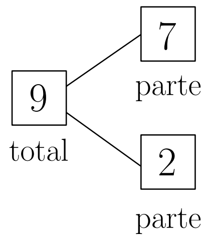


Figura 2.17: Introducción de la resta: restar quitando.

Para progresar en la comprensión de la resta, y en su cálculo, es fundamental conectar de manera adecuada los conceptos de suma y resta, y entender la relación que hemos formulado en lenguaje algebraico en la ecuación (2.8). La mejor forma de hacerlo es usar las descomposiciones numéricas, que en Singapur usan de manera extensiva y que llaman “number bonds”, que se está traduciendo en España como *números conectados*. En la figura 2.18.a) se puede ver un ejemplo de cómo se pueden representar. Este diagrama es una forma muy compacta de representar las cuatro sumas y restas que se pueden hacer con los números 2, 7 y 9, y que forman una *familia de frases numéricas*. Entender estas relaciones es muy útil para el cálculo. Si tenemos que calcular $9 - 7$, quitarle 7 unidades a 9, contando hacia atrás, es equivalente a contar cuánto le falta a 7 para llegar a 9, es decir, contar desde 7 hasta 9. Entender la equivalencia de estos dos significados de la resta es muy importante.

En la figura 2.19 vemos cómo se puede representar la resta, para conectar las dos formas de restar (contando hacia atrás, desde el sustraendo, y contando hacia adelante, desde el minuendo). Si queremos representar la resta $9-7$, podemos quitar las 7 unidades desde 9, como en la figura a), o podemos quitar las 7 primeras unidades, y las que quedan las calculamos contando desde 7 hasta 9, como en la figura b).



a)

$$7+2=9 \qquad 9-2=7$$
$$2+7=9 \qquad 9-7=2$$

b)

Figura 2.18: Números conectados y familias de sumas y restas.

a) b)

Figura 2.19: a) La resta contando hacia atrás. b) La resta contando hacia adelante.

2.5.1. Algoritmos de la resta

Igual que en el caso de la suma, los alumnos empiezan a restar *contando*, y es fundamental que, antes de empezar con los algoritmos tradicionales, desarrollen estrategias para *restar sin contar*, al menos con números hasta el 18 (dejamos al lector que piense por qué hasta este número).

Lo ideal es plantear actividades para que los alumnos vayan desarrollando técnicas para calcular estas restas. Veamos tres ideas alternativas para el cálculo de $14-9$:

a) si ya se dominan las sumas de números de una cifra, y la relación entre suma y resta, podemos usar el hecho de que $9+5=14$ para concluir que $14-9=5$.

b) podemos descomponer el 9 como 4 y 5, y quitarle al 14 primero 4 y luego 5, es decir, $14-9=14-4-5=10-5=5$.

c) podemos descomponer 14 como 10 y 4, y quitarle las 9 unidades al 10. Como $10-9=1$, el resultado final sería $1+4=5$.

Estas tres ideas son aplicables en general. Para el ejemplo particular de $14-9$ se nos pueden ocurrir otras alternativas. Por ejemplo, usar la propiedad de *compensación* de la resta[7] para transformarla en una resta más fácil de calcular. En concreto, su sumamos 1 a los dos términos, obtenemos $14-9=15-10=5$. Naturalmente, cuando estos temas se traten en el aula de 1º de Primaria se debe hacer con la escritura adecuada, y usando los materiales necesarios para que los alumnos entiendan los procedimientos. Estos temas se tratarán en la asignatura de Didáctica.

[7]La propiedad de compensación dice simplemente que, si sumamos o restamos la misma cantidad a los dos términos de una resta, el resultado no cambia

Para el algoritmo tradicional de la resta, la dificultad principal consiste en cómo organizar las conocidas como “llevadas”. Un primer ejemplo sencillo puede ser el cálculo de $56-29$:

$$\begin{array}{rr} 5 & 6 \\ -2 & 9 \\ \hline \end{array}$$

Lo tradicional en España ha sido verbalizar esta cuenta de la siguiente forma: “del 9 al 16 van 7, y me llevo una ...” (que luego se suma al 2 de las decenas del sustraendo). Es evidente que esto no es una buena alternativa si queremos que los alumnos entiendan lo que estamos haciendo. ¿16? Yo veo un 6, ¿dónde está el 16? ¿Qué me llevo? ¿A dónde?

Antes de proponer una alternativa que me parece más adecuada si lo que nos interesa es la comprensión, veamos por qué funciona esta forma de restar. Lo que estamos haciendo es usar la propiedad de compensación de la resta, añadiendo a los dos términos 10 unidades. Pero estas 10 unidades las añadimos en las unidades del minuendo, y como una decena en el sustraendo. Es decir, en lugar de hacer la resta $56-29$, estamos calculando “cincuenta y dieciséis” menos treinta y nueve:

$$\begin{array}{rr} 5 & 6 \\ -\ 2 & 9 \\ \hline \end{array} \longrightarrow \begin{array}{rr} 5 & 16 \\ -\ 3 & 9 \\ \hline \end{array}$$

Esta idea no es fácil de transmitir a los alumnos de 1º de Primaria, y a continuación vamos a ver una alternativa, que es la más utilizada a nivel internacional, y que ya aparece en varios de los libros de texto que se usan en nuestras aulas en los primeros cursos[8].

El procedimiento está representado con todo detalle en las tablas de notación posicional de la figura 2.20, y se puede verbalizar de esta forma:

- Como de 6 unidades no podemos quitar 9, lo que hacemos es tomar un grupo de diez (decena) del minuendo, y desagruparlo en sus 10 unidades. Es decir, en lugar de la descomposición habitual $56 = 50 + 6$, estamos considerando la descomposición $56 = 40 + 16$.
- Ahora, de 16 unidades ya podemos quitar 9, y nos quedan 7. Por último, de 4 decenas quitamos 2 y nos quedan 2, con lo que obtenemos el resultado final: 27.

Igual que hicimos en el caso de la suma, una buena forma de comprobar que hemos entendido bien el funcionamiento del algoritmo es reproducirlo en otra base distinta a la usual. Este es el objetivo del siguiente ejercicio, que está resuelto en detalle en el capítulo de ejercicios resueltos. Recuerda: es muy importante que, antes de ver la solución, le dediques un tiempo de trabajo, bien individual o bien con algún compañero.

Ejercicio 2.3. Calcula $\begin{array}{rrl} 3 & 1 & 2_{(5} \\ -1 & 4 & 3_{(5} \\ \hline \end{array}$

representando los reagrupamientos necesarios en tablas de valor posicional y explicándolos con detalle. Puedes ayudarte para ello con los bloques de base 5 que puedes encontrar en el archivo materiales.pdf

[8]De manera sorprendente, algunas editoriales presentan este algoritmo en 1º y 2º de Primaria, y vuelven al tradicional a partir de 3º.

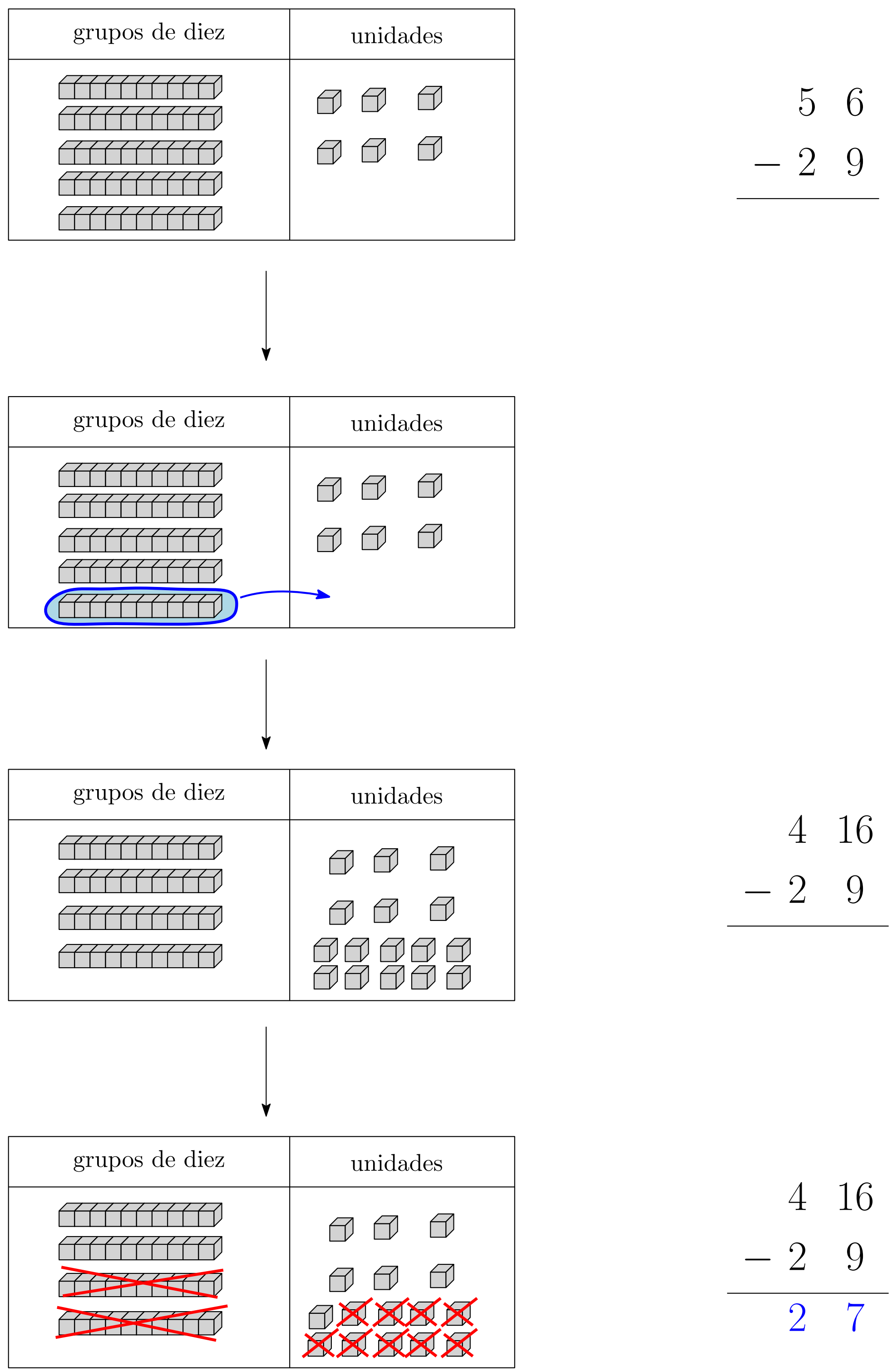


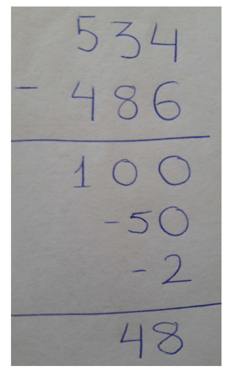
Figura 2.20: Resta con reagrupamiento.

Para terminar con el algoritmo tradicional de la resta, un ejercicio propuesto donde nos encontraremos con una pequeña dificultad a la hora de hacer los reagrupamientos necesarios: si cuando necesitamos desagrupar una decena en diez unidades, no hay decenas en el minuendo, lo que debemos hacer es recurrir a las centenas, y así sucesivamente. Recuerda, no se trata de que memorices la mecánica, sino de que seas capaz de explicar con detalle los diferentes pasos.

Ejercicio 2.4. Calcula

$$\text{a)}\quad \begin{array}{rrrr} 7 & 3 & 0 & 2 \\ -4 & 9 & 6 & 5 \\ \hline \end{array} \qquad\qquad \text{b)}\quad \begin{array}{rrrr} 6 & 7 & 0 & 5_{(8} \\ -1 & 3 & 4 & 7_{(8} \\ \hline \end{array}$$

También para la resta se puede pensar en un algoritmo análogo al de las sumas parciales, como el que se muestra en la imagen de la derecha. Pero este algoritmo tiene un problema que, desde mi punto de vista, poco adecuado para ser usado en primaria, porque no es sencillo evitar la aparición de la aritmética de números enteros: cuando restamos 30 menos 80, nos aparece −50.



En cuanto a los algoritmos ABN para la resta, existen varias alternativas, que reflejan las diferentes interpretaciones de la resta. Nos quedamos con las dos que corresponden a las más significativas, y que se muestran en la figura 2.21. En el caso a), vamos quitando de los dos términos. Cuando hemos quitado todo el sustraendo, en el minuendo nos aparece la diferencia (tenemos aquí de nuevo la propiedad de compensación de la resta). En la alternativa b), vamos añadiendo al sustraendo, hasta llegar al minuendo. En este caso, la diferencia es el total que hemos añadido, y se obtiene sumando lo que hemos añadido en las diferentes etapas.

437 − 248		
Quito	Quedan	Restan
8	240	429
29	211	400
100	111	300
11	100	289
100	0	$\boxed{189}$

437 − 248	
Pongo	Tengo
12	260
100	360
40	400
30	430
7	437
+ $\boxed{189}$	

Figura 2.21: Ejemplos de algoritmos ABN para la resta.

2.6. La multiplicación

La multiplicación es una operación que puede tener varios significados. Vamos a revisarlos, ordenándolos por su complejidad, que seguramente debe coincidir con el orden en que estos significados se presentan a los alumnos a lo largo de la primaria.

1. La multiplicación como *suma repetida*.

   Si tenemos que contar una colección de objetos que están distribuidos en grupos iguales, nos encontramos con sumas de términos iguales, como las que aparecen en la figura 2.22. Surge entonces de manera natural la conveniencia de abreviar esas sumas de sumandos repetidos. Obsérvese que en estos ejemplos la expresión 4×5 se lee "4 grupos de 5" o "4 veces 5".

   Es el significado más intuitivo de la multiplicación, y por tanto el más adecuado para introducir esta operación en los primeros cursos de primaria. Trataremos el tema de las tablas de multiplicar un poco más adelante, pero quiero mencionar ya que verbalizar la multiplicación como "veces" hace que nos tengamos que replantear el tema de las tablas de multiplicar, tal y como se han aprendido tradicionalmente en nuestro país.

$4+4+4$	$5+5+5+5$
3 grupos de 4	4 grupos de 5
3 veces 4	4 veces 5
3×4	4×5

Figura 2.22: La multiplicación como suma repetida.

2. El modelo de área.

   Es también muy intuitivo, y será útil, en particular, para mostrar propiedades de la multiplicación. Se puede introducir también como una forma de contar objetos que están organizados en filas y columnas. Otra observación que hace muy útil este modelo es que conecta la aritmética con la idea de área, en geometría. A veces, los alumnos no tienen una idea clara de qué significa el área de una figura, más allá del "número que obtengo cuando aplico alguna fórmula determinada". La mejor forma de trabajar para que esto no ocurra es ver, desde el principio, que el área de un rectángulo no es más que la cantidad de cuadrados (unitarios) que contiene, como se muestra en la figura 2.23.a. Más adelante, se puede abstraer y ya no será necesario mostrar explícitamente esos cuadrados unitarios, como en la parte b) de la figura.

3. Modelo de proporcionalidad, escalado, "multiplicado por".

   Cuando leemos la expresión 2×3 como "dos por tres", como tradicionalmente se hace en España, lo que estamos diciendo proviene de abreviar la expresión "dos multiplicado por tres", y esto significa que tomamos el 2, y lo repetimos 3 veces. Obsérvese, por tanto, que el significado de 2×3 cambia en función de si verbalizamos el aspa de la multiplicación como "veces" o como "por". Por supuesto, el resultado es el mismo en ambos caso, gracias a la propiedad conmutativa, pero el significado es distinto, $3+3$ en el primer caso y $2+2+2$

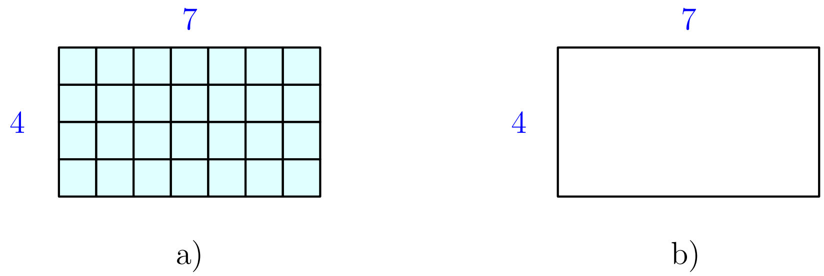


Figura 2.23: El modelo de área de la multiplicación.

en el segundo. Es importante tener esto en cuenta cuando trabajamos la multiplicación, para evitar confusiones.

Este significado de “multiplicado por” (y la terminología asociada, de multiplicando y multiplicador) es claramente menos intuitivo que la lectura “veces”, y por tanto me parece menos adecuado para introducir la multiplicación. Pero es importante trabajarlo también, sobre todo porque ayuda a conectar la multiplicación con su operación inversa, la división: multiplicar por 3 es la operación inversa de dividir entre 3.

4. Modelo combinatorio.

Supongamos que nos planteamos el siguiente problema: si tengo 3 pantalones y 4 camisetas, ¿de cuántas formas distintas puedo vestirme?

Este es un problema que se puede plantear a alumnos incluso en 1º de Primaria, con la ayuda adecuada, que pueden ser simplemente 3 pantalones y 4 camisetas, de diferentes colores. Por simple exploración podrán llegar a encontrar las 12 posibles combinaciones. Este tipo de problemas son también muy adecuados para introducir la importancia de razonar de manera *sistemática*. Si no organizamos el razonamiento, es muy fácil que nos olvidemos alguna posibilidad. Una forma de organizar la información de este problema es una *tabla de doble entrada*, que ya conocen los alumnos de la etapa de Educación Infantil. Sin embargo, la tabla tiene una limitación: ¿qué ocurriría si al problema le añadimos la posibilidad de completar el vestuario con dos gorras diferentes?

Una alternativa a las tablas son los *árboles*, como el de la figura 2.24. En el árbol vemos las tres opciones para el pantalón y, para cada una de ellas, las cuatro opciones para la camiseta. Tenemos por tanto 12 posibilidades para el problema original. Sería sencillo añadir otro nivel más, para representar las dos alternativas para la gorra que tenemos en el problema ampliado. Esto hace que, en esta segunda versión del problema, tengamos un total de 24 atuendos posibles. Los árboles son estructuras más abstractas que las tablas, y no creo que sean adecuadas para los primeros cursos de primaria. Pero si sería bueno introducirlos en los últimos cursos de primaria, con ejemplos como este, porque son una herramienta muy potente de organizar la información y serán muy útiles en secundaria, por ejemplo en el estudio de la probabilidad.

Aunque este modelo aparece en el currículo de primaria (de forma un poco críptica, se habla de “ley del producto”) se trabaja muy poco en nuestras aulas.

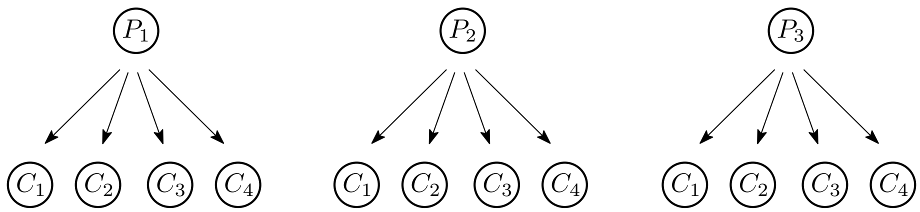


Figura 2.24: Árbol para el modelo combinatorio de la multiplicación.

2.6.1. Propiedades de la multiplicación

- La propiedad *conmutativa* de la multiplicación la tenemos tan asumida que es posible que no nos demos cuenta de que no es, en principio, nada intuitiva. Es importante darse cuenta de que la situación es muy diferente a la que vimos con la conmutatividad de la suma: esta propiedad en la suma es inmediata, los alumnos la descubren sin ningún problema. En el caso de la multiplicación, si le planteamos a un alumno de 1º el problema

  "Alicia tiene 4 bolsas con 7 caramelos en cada una. Benito tiene 7 bolsas con 4 caramelos en cadauna. ¿Quién tiene más caramelos?"

  con toda probabilidad lo que hará será hacer las sumas correspondientes, para darse cuenta de que en ambos casos la cantidad es la misma. Aunque sepa escribir la suma repetida en términos de multiplicación, con "veces", como en la figura 2.25 esto no le dará ninguna indicación para darse cuenta de la respuesta.

  El modelo de área es la mejor herramienta para darnos cuenta de que la multiplicación es conmutativa, ya que "4 veces 7" corresponde a contar los cuadrados de la figura f:modelo-area.a) por filas, mientras que "7 veces 4" corresponde a contar *los mismos cuadrados* por columnas. Esto mismo se puede hacer organizando colecciones de objetos en disposiciones de mallado, ordenadas en filas y columnas.

  Es necesario trabajar la propiedad conmutativa pronto, ya que es una herramienta importante para el estudio de la multiplicación.

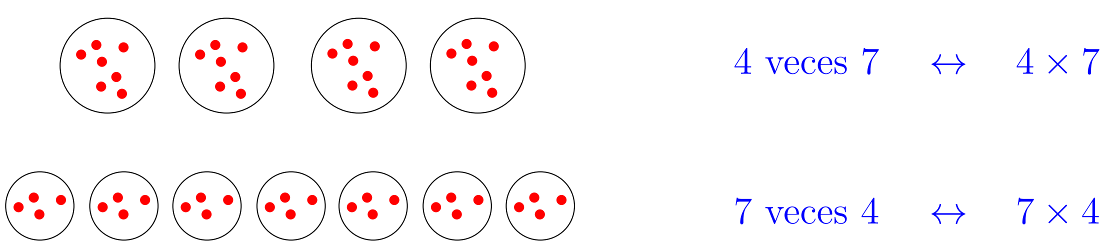
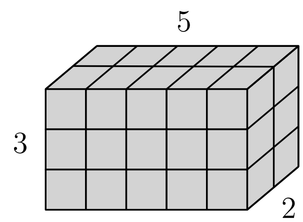


Figura 2.25: Propiedad conmutativa de la multiplicación: situación inicial.

- La propiedad *asociativa* dice que, para multiplicar tres números, podemos hacer primero la multiplicación que queramos. En lenguaje algebraico, si a, b y c son números cualesquiera, entonces $a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$.

La propiedad asociativa es menos importante que la conmutativa, y su estudio se puede retrasar hasta los últimos cursos de primaria, cuando aparece el tema de los paréntesis y el orden de operaciones.

La geometría es de nuevo la mejor forma de justificar esta propiedad. En la figura 2.26 vemos como los dos términos de la igualdad $2 \times (3 \times 5) = (2 \times 3) \times 5$ corresponden a contar los cubos de la figura de dos formas distintas.



$$2 \times (3 \times 5) = (2 \times 3) \times 5$$

Figura 2.26: Propiedad asociativa: contando cubos.

- Hasta ahora hemos visto propiedades de la suma, por un lado, y de la multiplicación, por otro. La propiedad *distributiva* conecta la multiplicación con la suma; en lenguaje algebraico, si a, b y c son números cualesquiera, entonces $a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$.

  Esta propiedad se estudia en Primaria usando diagramas en árbol, del estilo del que se muestra en la figura 2.27. No me parece una buena opción. Por un lado, vista así se trata de una propiedad superflua: ¿para qué desarrollar la expresión de la derecha, si podemos simplemente hacer primer la cuenta $3 + 5 = 8$. Por otro, y más importante, esta forma de escribir los cálculos dificulta el paso a secundaria, donde la propiedad distributiva es fundamental en el álgebra, y donde las expresiones se deben escribir en fila, igual que en la escritura ordinaria.

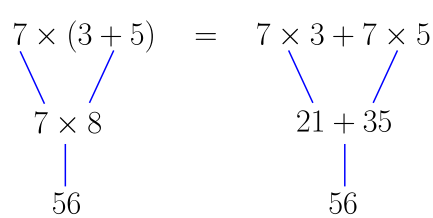
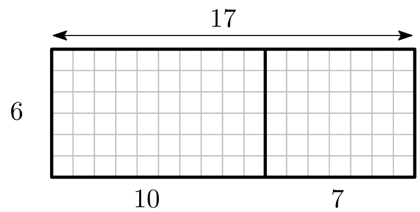


Figura 2.27: Propiedad distributiva: diagrama en árbol.

La propiedad distributiva es sin duda la más complicada de las propiedades que hemos visto hasta ahora y quizá algún lector esté pensando que lo mejor sería posponer su estudio hasta cuando “realmente hace falta”, que es en el álgebra de secundaria, cuando hay que “quitar paréntesis” en una expresión como $2(x + 3)$. Nada más lejos de la realidad: la propiedad distributiva es esencial para avanzar en el estudio de la multiplicación, y es la base de cualquier algoritmo para multiplicar. También es fundamental para el cálculo mental con multiplicaciones.

Pensar en términos de “veces” hace la propiedad distributiva mucho más accesible: si decimos que “17 veces 6 es lo mismo que 10 veces 6 mas 7 veces 6”, no estamos sino expresando la propiedad distributiva, descomponiendo el 17 como 10+7. El modelo de área es un excelente recurso para visualizar esta propiedad, como se muestra en la figura 2.28.



$$17 \times 6 = (10+7) \times 6 = 10 \times 6 + 7 \times 6$$
$$6 \times 17 = 6 \times (10+7) = 6 \times 10 + 6 \times 7$$

Figura 2.28: Propiedad distributiva: modelo de área.

Un error común es confundir las propiedades asociativa y distributiva, en una expresión como $10 \times (7 \times 4)$ y escribirla como $10 \times 7 \times 10 \times 4$. No hay más que hacer la cuenta correspondiente para darse cuenta de que en la segunda expresión estamos multiplicando por 10 dos veces. Fin de

2.6.2. Algoritmos de la multiplicación

La propiedad distributiva es la base de nuestro algoritmo tradicional para multiplicar. La mejor forma de entenderlo puede ser considerar la multiplicación $17 \times 6 = (10+7) \times 6$. Si escribimos los dos productos, nos queda lo siguiente:

$$\begin{array}{ccc} & 1 & 7 \\ & \times & 6 \\ \cline{2-3} & 4 & 2 \\ + & 6 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 2 \end{array}$$

Este algoritmo se conoce como el algoritmo de *productos parciales* y puede ser una buena forma de introducir nuestro algoritmo tradicional, para hacerlo más fácil de entender. Para pasar de esta escritura a la tradicional, solo es necesario “llevarse” las 4 decenas del 42 y sumarlas a la multiplicación de 10×6.

Si queremos multiplicar dos números de dos cifras, la idea es la misma, aunque por supuesto el algoritmo resulta un poco más largo. La idea para multiplicar 87×25 es usar la propiedad distributiva descomponiendo los números: $87 \times 25 = (80+7) \times (20+5)$. El modelo de áreas es, me parece, la mejor forma de ver cómo se obtienen los 4 términos del desarrollo de ese producto. En la figura 2.29 podemos ver el modelo y el algoritmo de productos parciales completo.

Una de las ventajas del modelo de área es que resulta útil también en secundaria, para entender en el álgebra en desarrollo del producto $(2x+7)(x+5)$ (figura 2.30.a) o el cuadrado del binomio $(a+b)^2$ (figura 2.30.b).

Nuestro algoritmo tradicional se puede obtener comprimiendo el algoritmo de los productos parciales:

$$
\begin{array}{rrrrr}
 & & & 5 & 7 \\
 & & \times & 2 & 5 \\
\hline
 & & & 3 & 5 \\
 & & 2 & 5 & 0 \\
 & & 1 & 4 & 0 \\
+ & 1 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
 & 1 & 4 & 2 & 5
\end{array}
$$

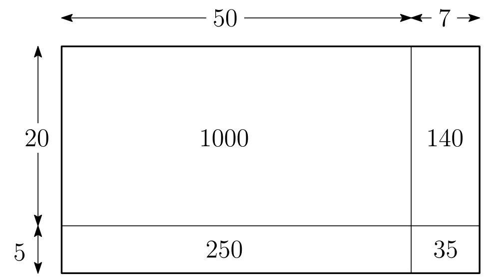


Figura 2.29: Modelo de área y algoritmo de productos parciales.

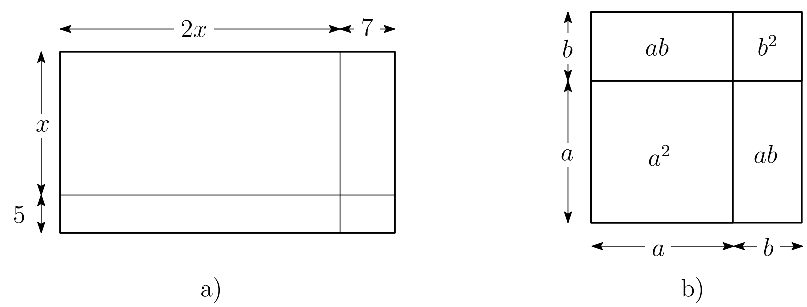


Figura 2.30: Modelo de área y la propiedad distributiva en el álgebra.

$$
\begin{array}{rrrrr}
 & & & 8 & 7 \\
 & & \times & 2 & 5 \\
\hline
 & & 4 & 3 & 5 \\
+ & 1 & 7 & 4 & \boxed{0} \\
\hline
 & 2 & 1 & 7 & 5
\end{array}
$$

Un comentario sobre el 0 recuadrado en rojo: lo tradicional en España es dejar el hueco vacío, ¿por qué? Es un hueco que se convierte en una de las fuentes de errores más comunes al hacer multiplicaciones. Me parece mucho más recomendable escribir ese 0, lo que ayuda además a recordarnos que, en realidad, estamos multiplicando 7 por 20, no por 2.

Llegados a este punto, merece la pena detenerse un momento a contemplar la potencia de este algoritmo: la notación posicional, junto con la propiedad distributiva, nos permiten reducir cualquier multiplicación a la multiplicación de números de una cifra (las *tablas de multiplicar*) y unas cuantas sumas.

Antes de pasar a considerar algún algoritmo alternativo, un ejercicio cuyo objetivo es entender el por qué de algunos hechos de sobras conocidos por todos. La respuesta está en el capítulo de soluciones. Insisto en lo importante que es que el lector le dedique previamente tiempo a pensar por sus medios la respuesta.

Ejercicio 2.5. Explica, recurriendo a las propiedades básicas de la multiplicación, estas propiedades:

1. Para multiplicar cualquier número por 10, es suficiente con añadir un 0.

2. Para multiplicar cualquier número por la unidad seguida de ceros, es suficiente añadir el número de ceros correspondiente.

3. Si tengo que multiplicar un número que termina en uno o más ceros, por otro, puedo olvidarme de los ceros, hacer la multiplicación, y luego añadirlos. Por ejemplo, $400 \times 8 = 3200$.

El algoritmo ABN para la multiplicación consiste simplemente en organizar en una tabla los productos que aparecen en el algoritmo de los productos parciales que hemos expuesto. No me parece que esta forma de organizar los cálculos tenga ninguna ventaja sobre la anterior. En el siguiente ejemplo queremos calcular el producto 285×74. En la primera columna está la descomposición del primer factor, en la primera fila la descomposición del segundo. En las columnas 2 y 3 aparecen los productos parciales. Finalmente, la columna 4 se usa para ir sumando los productos parciales de las columnas 2 y 3, y la suma total aparece en la columna 5.

	70	4		
200	14000	800	14800	
80	5600	320	5920	20720
5	350	20	370	**21090**

2.7. La división

El gran problema con la división es que, quizá por ser el algoritmo más complicado, en las aulas se suele dedicar casi todo el tiempo al estudio del procedimiento, y no se le dedica el tiempo necesario a entender el significado de la división. Siempre se dice que "dividir es repartir", y desde luego uno de los sentidos de la división es el del reparto en grupos iguales. Pero la división también tiene otro significado que no se suele trabajar, al menos de forma sistemática, en nuestras aulas.

Consideremos los siguientes problemas:

Problema 1: Alicia lleva 20 caramelos al colegio, y los quiere repartir (por igual) entre 4 amigas. ¿Cuántos caramelos le tiene que dar a cada amiga?

Problema 2: Benito tiene 24 caramelos y quiere hacer bolsas con 4 caramelos cada una. ¿Cuántas bolsas podrá preparar?

El segundo problema no se corresponde a un reparto, sino que el objetivo es saber cuántos grupos (de tamaño conocido) hay. En el reparto conocemos el número de grupos, y queremos saber cuántos elementos hay en cada grupo. En el segundo sentido, sabemos el número de elementos de cada grupo, y queremos saber cuántos grupos hay. Claramente, los dos problemas corresponden a una división. La división del primer problema es la de reparto, o *división partitiva*; la segunda tiene el sentido de agrupar, y se conoce también como *división cuotativa*.

Hay varias diferencias importantes entre los dos tipos de división. Estas me parecen las más importantes:

1. Supongamos que Alicia y Benito son niños que están empezando 1º de Primaria, y que

no han oído hablar de la división. ¿Cómo afrontarían la tarea?

Lo que haría Alicia, seguramente, es dar caramelos por rondas, uno a cada amiga. Al final, podría comprobar que a cada amiga le ha dado 5 caramelos.

En cambio, lo que haría Benito es empezar a hacer grupos de 4 caramelos, para comprobar que al terminar el sexto montón se ha quedado sin caramelos.

2. En el caso de la división de reparto, las unidades del resultado (el cociente) son las mismas que las del dato original (el dividendo). Alicia tenía 20 *caramelos* y a cada amiga le tocan 5 *caramelos*

   En el caso de la división de agrupar, o cuotativa, las unidades son distintas. Benito tenía 24 *caramelos* con los que ha podido preparar 6 *bolsas*.

3. En el caso del reparto, el divisor (aquello entre lo que repartimos) es siempre un número natural, no podemos repartir entre "2/3 de amigos. No ocurre lo mismo con la división cuotativa. El problema

   Tengo 6 l de agua, ¿cuántas botellas de 2 l puedo rellenar?

   se puede generalizar sin problemas a este otro:

   Tengo 6 l de agua, ¿cuántas botellas de 2/3 l puedo rellenar?

   Como veremos en el estudio de las fracciones, el hecho de no trabajar de forma adecuada este segundo significado de la división puede ser una de las razones por las que dividir entre una fracción es una operación cuya comprensión plantea dificultades notables.

La definición formal de la operación de división se hace en términos de la multiplicación: si a, b y c son números naturales, diremos que[9]

$$a \div b = c \text{ si } a = b \times c. \tag{2.9}$$

Obsérvese que en este momento estamos definiendo la división "exacta", sin resto. El término a es el *dividendo*, b el *divisor* y c el *cociente*. Obsérvese que los papeles de divisor y cociente, que corresponden al número de grupos y al tamaño de cada grupo, son intercambiables en las divisiones exactas: $28 \div 7 = 4 \quad \leftrightarrow \quad 28 \div 4 = 7$. Esto hace que sea especialmente importante verbalizar adecuadamente las soluciones de los problemas en los primeros ejemplos de tareas de división. El cálculo de divisiones se basa en la multiplicación; por tanto, es fundamental comprobar que se domina lo suficiente la multiplicación antes de avanzar en el cálculo de divisiones. En la figura 2.31 se muestra un ejemplo que se puede usar para mostrar esta relación entre multiplicación y división.

[9]Existen dos signos para denotar la división, "÷" y ":". En nuestros libros de texto se suele usar el segundo, pero el primero es el más extendido a nivel internacional. Mi objetivo es que estemos familiarizados con los dos. Obsérvese que el primero, "÷", muestra la relación de la división con el concepto de fracción.

$$3 \times 5 = 15 \qquad 15 \div 3 = 5$$
$$5 \times 3 = 15 \qquad 15 \div 5 = 3$$

Figura 2.31: Familia de multiplicaciones y divisiones.

El 0 suele crear problemas en la división, y no es raro ver alumnos que se bloquean si se les pide calcular $0 \div 5$. Se puede recurrir a la idea de reparto, por más que sea un reparto "triste": si no tengo caramelos, y los quiero repartir entre 5 amigos, ¿cuántos caramelos le tocan a cada amigo? Otra opción es recurrir a la definición de división, en relación con la multiplicación, dada por la expresión (2.9): $0 \div 5 = 0$ ya que $5 \times 0 = 0$. Por tanto, aunque el 0 no sea un número natural, la definición de (2.9) también es válida cuando el dividendo es 0.

La situación es diferente cuando el 0 aparece como divisor. Es claro que a la operación $5 \div 0$ no se le puede dar sentido de reparto, ni de hacer grupos. Pero la situación es todavía peor: no es posible definir un resultado para esta operación, si queremos que la relación (2.9) siga siendo cierta, es decir, no hay forma de rellenar el cuadrado en esta expresión

$$5 \div 0 = \boxed{} \quad \leftrightarrow \quad 0 \times \boxed{} = 5$$

Si el dividendo también es 0 la situación es un poco distinta. La situación sería esta:

$$0 \div 0 = \boxed{} \quad \leftrightarrow \quad 0 \times \boxed{} = 0$$

En este caso, cualquier número vale para la segunda igualdad, y esto quiere decir que cualquier número nos podría servir como resultado de la operación $0 \div 0$, y esto es igual de inútil que la no existencia de solución que veíamos en el primer caso. Por tanto, el *divisor* nunca puede ser 0.

2.7.1. La división con resto

Si queremos repartir 19 caramelos entre 5 amigos, cuando le hemos dado 3 caramelos a cada uno, nos sobran 4, y no podemos seguir con el reparto (estamos asumiendo, claro, que los caramelos no se pueden partir, y que queremos darle la misma cantidad de caramelos a cada amigo).

En general, tenemos un número D, el *dividendo*, y otro número d el *divisor*. La operación de dividir consiste en encontrar los números q, el *cociente*, y r, el *resto*, para los que se cumple que

$$D = q \times d + r \quad \text{y} \quad 0 \le r < d. \tag{2.10}$$

Dos observaciones antes de continuar:

- Es importante darse cuenta de que la división con resto es una operación distinta de la división exacta definida en el apartado anterior (aunque, por supuesto, coinciden cuando el resto es 0). La división (exacta) entre números naturales solo está definida cuando el cociente es exacto. La división con resto está definida para cualquier par de números naturales, dividendo y divisor.

- La operación está bien definida, en el sentido de que hay unos únicos valores que hacen cierta la expresión (2.10). Para convencerse de esto, lo que hay que hacer es darse cuenta de que estamos considerando múltiplos del divisor, y nos quedamos con el último que no es mayor que el dividendo. Si tenemos que $q \times d \leq D$ y que $(q+1) \times d > D$ entonces se tiene que $r = D - q \times d < d$ (en la figura 2.32 mostramos la idea).

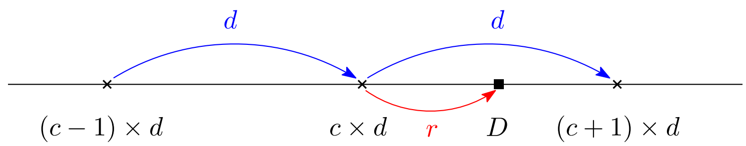


Figura 2.32: Definición de división con resto.

Obsérvese que estoy escribiendo q y d en un orden distinto al habitual. Esto corresponde a interpretar el signo × como "veces", y es importante, ya que, aunque el papel de divisor y cociente era simétrico en las divisiones exactas, esto ya no es así en las divisiones con resto. Consideremos la siguiente expresión:

$$19 = 3 \times 5 + 4. \tag{2.11}$$

La igualdad numérica es cierta, claramente. Sin embargo, solo es correcta como división cuando el divisor es el 5. Si el divisor fuera el 3, y estuviéramos repartiendo entre 3, el resto no podría ser 4, ya que podríamos proseguir con el reparto. En concreto, la expresión análoga para la división de 19 entre 3 es

$$19 = 6 \times 3 + 1. \tag{2.12}$$

Una forma de evitar esta confusión sería una notación que aclarara cuáles son el cociente y el resto de una división. Resulta muy llamativo que en España no usamos ninguna notación para esto. Parece que no podemos concebir la división sin su algoritmo, y la famosa "cajita". La notación internacional es la siguiente (escribo las dos divisiones anteriores):

$$\text{a)} \quad 19 \div 5 = 3\,R\,4 \qquad\qquad \text{b)} \quad 19 \div 3 = 6\,R\,1 \tag{2.13}$$

Para el caso a), leeremos "si dividimos 19 entre 5, el cociente es 3 y el resto es 4".

Es importante trabajar problemas en situaciones variadas, que vayan más allá de la típica interpretación de reparto, con la respuesta "tocan a ..., y sobran ...", en los que el cociente es casi siempre la respuesta. Hay indicios de que nuestros alumnos están demasiado acostumbrados a considerar el cociente como la respuesta de los problemas de división. Por ejemplo, el estudio TIMSS 2011 incluía el siguiente problema:

> Luis necesita 37 litros de pintura para pintar una habitación, y la pintura se vende en latas de 5 litros. ¿Cuántas latas tiene que comprar?

Solo el 36 % de nuestros alumnos de 4º de Primaria dieron la respuesta correcta, 8 latas. La media de respuestas correctas a este problema en el estudio fue del 44 %, pero hay varios países donde la media de aciertos es muy superior. Holanda, con su *matemática realista* alcanza un 74 %.

En el ejemplo de la figura f:sobra-uno (que se puede ver en [**?**]) un alumno razona de manera correcta, pero interpreta mal el resultado final.

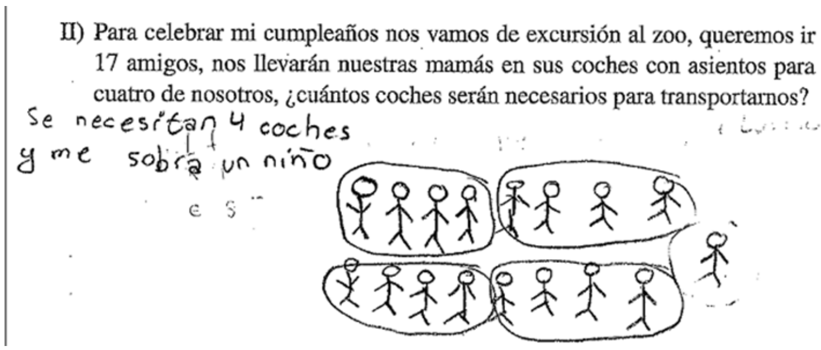


Figura 2.33: Ejemplo de interpretación incorrecta del resultado.

El siguiente es otro problema “de división” con una situación distinta. La solución está en el capítulo de ejercicios resueltos. Piénsalo unos minutos antes de mirar la respuesta.

Ejercicio 2.6. Un astronauta empezó su viaje un martes a las 9 de la mañana. Si el viaje duró 281 horas, ¿qué día de la semana y a qué hora aterrizó?

La definición de división dada por la expresión 2.10 (conocida muchas veces como “prueba de la división”) debería estar más presente en el aprendizaje. Resulta útil en situaciones muy variadas. Veamos algunos ejercicios:

Ejercicio 2.7. Supongamos que el dividendo y el divisor se multiplican (o se dividen) por el mismo número. ¿Qué les ocurre al cociente y al resto?

Vamos a ver primero un ejemplo, ya que es suficiente para ver la idea y nos evita un álgebra innecesaria. Si sabemos que $19 \div 5 = 3\,R\,4$, ¿qué ocurre con la división $190 \div 50$?

La expresión $19 \div 5 = 3\,R\,4$ es equivalente a $19 = 3 \times 5 + 4$. Si ahora multiplicamos por 10 los dos términos de esta igualdad, obtenemos $190 = 3 \times 50 + 40$, es decir, $190 \div 50 = 3\,R\,40$.

Para el caso general, si tenemos un dividendo $D' = k \times D$ y un divisor $d' = k \times d$, al multiplicar por k los dos miembros de la igualdad

$$D = q \times d + r$$

obtenemos

$$k \times D = q \times (k \times d) + (k \times r),$$

es decir, el cociente no cambia, y el resto queda multiplicado por k. ♢

Ejercicio 2.8. Encuentra números de 4 cifras que tengan resto 17 al dividirlos entre 28.

En este caso vamos a conformarnos con una indicación: los números que tienen resto 17 al dividirlos entre 28 se obtienen de la expresión $N = q \times 28 + 17$. $\diamondsuit$

Para terminar esta sección, dos últimos ejercicios, cuya respuesta se puede encontrar en el capítulo final.

Ejercicio 2.9. En una división sabemos que resto es 15 y el cociente 37, y sabemos además que el dividendo es menor que 650. ¿Cuáles pueden ser el dividendo y el divisor?

Ejercicio 2.10. Usa la igualdad $65 \times 328 = 21320$ para calcular el cociente y el resto de dividir 213301 entre 65.

Indicación: averigua qué operaciones hay que hacerle al número 21320 para obtener 213301. Luego, considera estas operaciones en la expresión 2.10

2.7.2. Algoritmos de la división

El algoritmo de la división es el más complicado de la aritmética de primaria, le estamos dedicando muchas horas y, lo que me parece más preocupante, es fuente de frustración y de distanciamiento de las matemáticas para muchos de nuestros niños. Todos conocemos la forma de organizar los cálculos tradicional en España, que en un primer caso sencillo como $19 \div 5$ es esta:

$$\begin{array}{r|l} 19 & 5 \\ \cline{2-2} -15 & 3 \\ \cline{1-1} 4 & \end{array}$$

Las dificultades suelen aparecer cuando los números crecen. Consideremos, por ejemplo, la división $1948 \div 5$. ¿Cómo la verbalizamos? Lo tradicional es hablar de “19 dividido entre 5”. Pero, ¿19 qué? La otra dificultad es la costumbre de no escribir las restas, y llegar a la escritura de la división que se muestra a la izquierda:

$$\begin{array}{r|l} 1948 & 5 \\ \cline{2-2} 44 & 389 \\ 48 & \\ 3 & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r|l} 1948 & 5 \\ \cline{2-2} -15 & 389 \\ \cline{1-1} 44 & \\ -40 & \\ \cline{1-1} 48 & \\ -45 & \\ \cline{1-1} 3 & \end{array}$$

La costumbre generalizada en España es no escribir las restas, y por alguna razón[10] la idea más extendida es que escribir las restas es para los “torpes con las matemáticas”. Esto es un hecho *cultural*, en el que además estamos en clara minoría si miramos al resto del mundo: los anglosajones (con su “long division”, los asiáticos, centroeuropa), en todas partes escriben las restas al hacer las divisiones. Solo en algunos otros países hispanohablantes he visto que también la quitan.

He escuchado dos argumentos distintos a favor de quitar las restas:

[10](que he tratado de averiguar, sin éxito)

- Se hace cálculo mental. Es cierto, pero creo que el cálculo mental es interesante en tanto que cálculo *pensado*, es decir, cálculo que se hace de forma reflexiva, entendiendo lo que estamos haciendo. En este caso, el cálculo que hacemos al no escribir las restas, lleva a lo opuesto: a dificultar la comprensión de lo que estamos haciendo.

- El ahorro de espacio/papel. También es cierto, desde luego, pero también me parece un motivo cuestionable. Es verdad que una división como las que todavía están incluidas en nuestro currículo de primaria (dividendos de hasta 6 cifras y divisores de hasta 3 cifras) escrita completa, con las restas, lleva bastante espacio. Pero hay una solución mejor: poner divisiones más cortas. Creo que tenemos pendiente el debate sobre el valor pedagógico de hacer divisiones con divisores de más de una cifra (estas divisiones han desaparecido del currículo de primaria de muchos países, entre ellos, Finlandia y Singapur). En todo caso, creo que sería suficiente limitarnos, por ejemplo, a dividendos de hasta 4 cifras y divisores de hasta 2 cifras.

  Obligar a nuestros alumnos de final de primaria a hacer divisiones como esta (en su versión sin restas, o con restas)

$$
\begin{array}{llllll|l}
8 & 6 & 9 & 5 & 3 & 4 & 4\,3\,5 \\ \cline{7-7}
4 & 3 & 4 & 5 & & & 1\,9\,9\,8 \\
 & 4 & 3 & 0 & 3 & & \\
 & & 3 & 8 & 8 & 4 & \\
 & & & 4 & 0 & 4 &
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{rllllll|l}
- & 8 & 6 & 9 & 5 & 3 & 4 & 4\,3\,5 \\ \cline{8-8}
 & 4 & 3 & 5 & & & & 1\,9\,9\,8 \\ \cline{2-4}
- & 4 & 3 & 4 & 5 & & & \\
 & 3 & 9 & 1 & 5 & & & \\ \cline{2-5}
- & & 4 & 3 & 0 & 3 & & \\
 & & 3 & 9 & 1 & 5 & & \\ \cline{3-6}
- & & & 3 & 8 & 8 & 4 & \\
 & & & 3 & 4 & 8 & 0 & \\ \cline{4-7}
 & & & & 4 & 0 & 4 &
\end{array}
$$

  tiene poco sentido en estos tiempos, porque no aporta conocimiento matemático útil. Estamos desperdiciando ese tiempo de enseñanza siempre escaso y, todavía más importante, estamos proponiendo tareas que solo transmiten la imagen de las matemáticas como algo inútil y aburrido.

Los argumentos a favor de escribir las restas me parecen decisivos:

- El algoritmo es más fácil (tanto de entender, como de ejecutar) cuando se escriben las restas.

- Es más fácil de transferir a otras situaciones, como la división de polinomios en secundaria, donde se escriben los restos.

Un algoritmo alternativo para la división que me parece especialmente interesante es el algoritmo de los *cocientes parciales*, conocido también como *división de Brousseau*, que se muestra en la figura 2.34. La idea del algoritmo es muy sencilla: en el ejemplo queremos calcular 427/15. Lo que se hace es buscar un múltiplo de 15 menor que 427, se resta, y con lo que queda se repite el proceso. El algoritmo es flexible, en el sentido de que el múltiplo no tiene que ser el mayor posible. En la figura, en el ejemplo de la izquierda el primer paso ha sido considerar $150 = 10 \times 15$, en el del medio $300 = 10 \times 20$ y en el de la derecha $375 = 25 \times 15$. Las tres alternativas son válidas, y por tanto este algoritmo se adapta muy bien a los diferentes niveles de desarrollo del cálculo que puedan tener diferentes alumnos. El resultado final, el cociente total, se obtiene simplemente sumando los cocientes parciales. Se pueden encontrar más ejemplos de este algoritmo en la página de la Universidad de Chicago ya mencionada anteriormente (al ver este vídeo hay que tener en cuenta que los anglosajones organizan los términos de la división de manera distinta a la nuestra): http://everydaymath.uchicago.edu/teaching-topics/computation/.

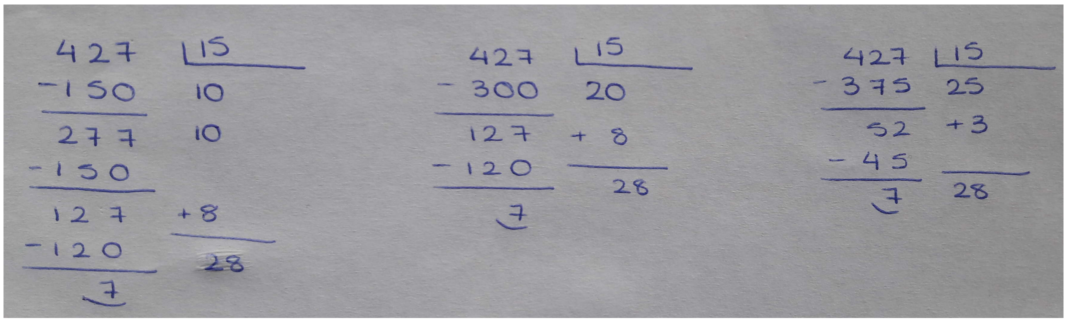


Figura 2.34: Algoritmo de división de los cocientes parciales, o división de Brousseau.

El algoritmo ABN para la división es exactamente este algoritmo de los cocientes parciales, pero los cálculos se organizan en una tabla.

2.8. Introducción al pensamiento algebraico.

En esta sección no se pretende revisar el álgebra de secundaria, ni repasar la resolución de ecuaciones. El objetivo es simplemente hacer una pequeña introducción al *lenguaje algebraico*. Me parece conveniente por estas dos razones:

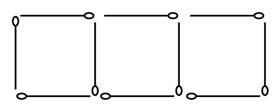
- El lenguaje algebraico es (una vez dominado) claro, conciso y preciso. En muchas ocasiones, enunciar una propiedad en lenguaje algebraico resulta más cómodo que enunciarla en lenguaje usual. Ya lo hemos hecho en algunas ocasiones, y la idea es seguir haciéndolo.

- En nuestro currículo de primaria no se contempla una introducción al álgebra. Sin embargo, hay muchos países con etapa de primaria similar a la nuestra (de seis años) en los que si se contempla lo que se suele conocer como pre-álgebra. Sería muy conveniente que en la, desde mi punto de vista, necesaria revisión del currículo de matemáticas de Primaria, se contemplara también en nuestro país esa introducción al álgebra al final de la Educación Primaria.

  En mi experiencia, en demasiadas ocasiones los sentimientos que despierta la palabra "álgebra" en los estudiantes de magisterio no son del todo positivos, y están seguramente asociados a un estudio demasiado técnico y demasiado rápido en la educación secundaria. Lo que vamos a tratar de hacer aquí es empezar la introducción al álgebra "desde el principio" (y quedarnos muy al principio).

Ya hemos visto algunos ejemplos de lenguaje algebraico, como al enunciar la propiedad conmutativa de la multiplicación: si a y b son números cualesquiera, entonces $a \times b = b \times a$.

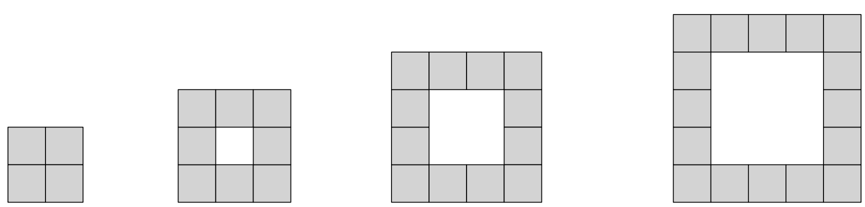
Otro ejemplo del uso del lenguaje algebraico, que trataremos durante este curso, y que me parece especialmente adecuado para una introducción al lenguaje algebraico, es en situaciones como la siguiente. Supongamos que tenemos cerillas, y que con ellas construimos una fila de cuadrados como la que se muestra en esta figura:



Si nos preguntan cuántas cerillas se necesitan para construir 3 cuadrados, nos podemos limitar a contar en la figura para responder que hacen falta 10 cerillas. Si nos preguntaran cuántas cerillas hacen falta para construir 5 cuadrados, podríamos ampliar el dibujo, volver a contar, y responder que 16. Pero, ¿qué ocurre si queremos saber cuántas cerillas hacen falta para construir 50 cuadrados? Podemos extender el dibujo, y volver a contar, o podemos tratar de razonar para dar una respuesta. Nos encontramos aquí con un ejemplo de la utilidad del razonamiento matemático: muchas veces, unos momentos de reflexión nos pueden ahorrar tareas tediosas y largas. Si nos fijamos en la construcción, podemos ver que, una vez puesta la primera cerilla vertical de la izquierda, para completar cada cuadrado necesitamos añadir 3 cerillas más. Por tanto, para construir 50 cuadrados necesitaremos $1 + 50 \times 3 = 151$ cerillas. Una vez visto esto, queda claro que ya podemos contestar la pregunta, de manera inmediata, para cualquier número de cuadrados. Y una forma de dar la respuesta es decir: para formar n cuadrados (donde n es cualquier número natural) necesitamos $3n + 1$ cerillas.[11]

La solución al siguiente ejercicio está en el capítulo de ejercicios resueltos.

Ejercicio 2.11. ¿Cuántos cuadrados sombreados tiene la figura n de esta serie?



1 2 3 4

Si escribimos el número de cuadrados que tienen las figuras de estos dos ejemplos nos encontramos con estas series numéricas:

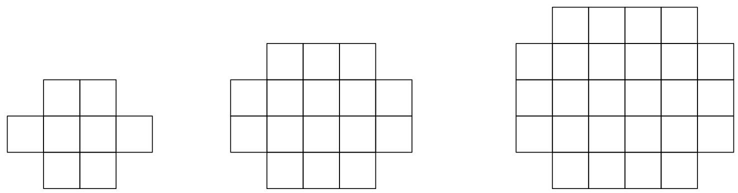
a) $4, 7, 10, 13, \dots$ b) $4, 8, 12, 16, \dots$

Son series “sencillas”, en las que la diferencia entre dos términos consecutivos es siempre la misma, son ejemplos de *progresiones aritméticas*. Podría ser tentador pensar que esto será siempre

[11] Seguimos aquí el convenio usual, de omitir el signo de multiplicar cuando aparecen las letras en el álgebra.

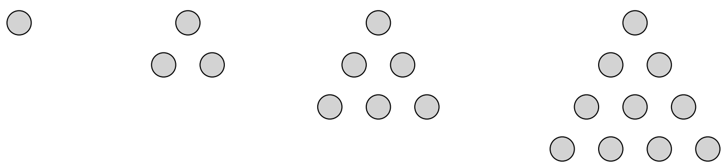
así, y que podría ser suficiente escribir este patrón numérico para los primeros términos, y descubrir así el término general. Pero no, esto no tiene por qué ser siempre así. Veamos dos últimos ejemplos, con un comportamiento un poco más complicado. Las soluciones, en el capítulo final.

Ejercicio 2.12. ¿Cuántos cuadrados tiene la figura n de esta serie?



1 2 3

Ejercicio 2.13. El número de círculos en cada una de las siguientes figuras se conoce como *número triangular*. Si llamamos T_n al número triangular n*-ésimo*, vemos que $T_1 = 1$, $T_2 = 3$, $T_3 = 6$ y $T_4 = 10$. ¿Puedes obtener diferentes expresiones para el número T_n?



1 2 3 4

En otras situaciones el lenguaje algebraico nos sirve para razonar sobre una cantidad desconocida. Considera el siguiente problema:

Marta abrió su hucha y se gastó la mitad de su dinero en un libro. Si después se compró una camiseta que le costó 14 euros y le quedaron 17 euros, ¿cuánto dinero tenía Marta en la hucha?

Para hacer este problema no es necesario usar el lenguaje algebraico, y veremos más adelante que es importante trabajar este tipo de problemas sin usar el álgebra. Pero lo que queremos ver aquí es cómo usar el lenguaje algebraico para expresar lo que está pasando. Si llamamos x a la cantidad de dinero que había al principio en la hucha, y que no es conocida, podemos escribir que el total es la mitad, que se gastó en en libro, mas los 14 euros de la camiseta y los 17 euros que le sobraron, es decir,

$$\frac{x}{2} + 14 + 17 = x.$$

A esta expresión le llamamos *ecuación*, y entre otras cosas el álgebra se ocupa de desarrollar procedimientos para *resolver* ecuaciones como esta, y otras más complicadas. En este curso no vamos a estudiar, ni a usar, técnicas de resolución de ecuaciones.

Por último, el álgebra también nos permite razonar sobre números, en general. Veamos un ejemplo:

Ejercicio 2.14. Demuestra que la suma de tres números pares consecutivos es siempre múltiplo de 3.

Para entender el enunciado, puede ser útil ver qué ocurre en algún ejemplo. Elegimos 3 números pares consecutivos, como 6, 8 y 10. La suma es $6+8+10=24$ que, como vemos, es múltiplo de 3. Sin embargo, a base de ver qué ocurre en ejemplos variados nunca podremos revisar todos los casos posibles, ya que son infinitos. Necesitamos alguna forma de razonar sobre el caso general. Y es aquí donde el álgebra nos ayuda. Si n es un número natural cualquiera, $2n$ siempre es un número par. Recíprocamente, cualquier número par se puede expresar como $2n$, para cierto número natural n (que será la mitad del número par considerado). Por tanto, un razonamiento que hagamos sobre $2n$ será válido para cualquier número par.

Tomemos ahora tres números pares consecutivos. Si el primero es $2n$, el siguiente será $2n+2$ y el siguiente $2n+4$. La suma de estos tres números es

$$2n+(2n+2)+(2n+4)=6n+6=3(2n+2),$$

y esto nos asegura que esta suma es siempre múltiplo de 3. $\diamondsuit$

Esta propiedad no es exclusiva de los números pares. La propiedad sigue siendo cierta si se cambia la palabra “par” por impar, o por múltiplo de 4, o de 5. Sería bueno que lo comprobaras, al menos para alguno de estos casos.

2.9. Divisibilidad (en $\mathbb{N}^*=\mathbb{N}\cup\{0\}$).

En el estudio de la divisibilidad es conveniente incluir también el 0. Podemos cambiar nuestra opción inicial, y consderar que el 0 es también un número natural, o podemos optar por hacer el estudio de la divisibilidad en el conjunto $\mathbb{N}^*$, que es el conjunto de los números naturales, junto con el cero. En todo caso, y salvo que se diga lo contrario, cuando en esta sección el término *número* se referirá a un elemento del conjunto $\mathbb{N}^*$, es decir, puede ser un número natural, o puede ser también el 0.

2.9.1. Divisores y múltiplos

El número 4 es un *divisor* de 20 porque el resultado de la división $20\div 4$ es un número natural, es decir, se trata de una división *exacta*. Para escribirlo, a veces usaremos esta expresión, $4\mid 20$, que se lee “4 es divisor de 20”. Obsérvese que $20\div 4=5$, es decir, $5\times 4=20$, y por tanto la división $20\div 5$ también es exacta (el cociente es 4), es decir, 5 también es divisor de 20. Con este razonamiento podemos “emparejar” los divisores de un número, y esto será útil en algunass situaciones posteriores. Antes de seguir adelante, esta es la definición formal de divisor usando lenguaje algebraico.

Definición 2.2. Dados dos números naturales a y $c\neq 0$, se dice que c es un divisor de a si existe $q\in\mathbb{N}^*$ tal que $a=q\times c$. En ese caso, escribimos $c\mid a$.

El 0 puede causar algún problema en este punto. Para evitarlo, lo mejor es que le dediques unos minutos de reflexión a contestar estas preguntas, examinando con cuidado la definición anterior: ¿es 2 divisor de 0?, ¿es 17 divisor de 0?

El concepto de *múltiplo* es paralelo al de divisor. Si c es un divisor de a, decimos también que a es un múltiplo de c. En el ejemplo anterior, como 4 es un divisor de 20, tenemos que 20 es un múltiplo de 4. El conjunto de los múltiplos de 4 lo denotaremos como $\dot{4}$, y se obtiene multiplicado el número 4 por cualquier número natural (o 0), es decir, $\dot{4} = \{0, 4, 8, 12, 16, 20, 24, \ldots\}$.

La lista de divisores de un número dado se puede encontrar de varias formas. La más sencilla, y la mejor para introducir el tema al final de primaria, es por simple inspección.

Ejercicio 2.15. Encuentra los divisores del número 54.

Para no olvidar ningún divisor es conveniente hacer la búsqueda de los divisores de manera sistemática, y usar la propiedad mencionada anteriormente: si encontramos un divisor k, tendremos que $54 \div k = j$, y por tanto $k \times j = 54$, es decir, j también es divisor. El número 54 tiene 8 divisores. No voy a dar las soluciones de ejercicios como este. Siempre tienes la opción de comprobarlo en páginas como http://www.wolframalpha.com, donde es suficiente teclear “divisors 54” para obtener la lista completa (y bastante más información).

2.9.2. Números primos

Dado cualquier número natural n, los números 1 y n son siempre divisores de n. (¿Los habías olvidado en el ejercicio anterior?) Al resto de divisores, se les llama *divisores propios*.

Definición 2.3. Decimos que un número natural $p > 1$ es un *número primo* si no tiene divisores propios (es decir, si sus únicos divisores son 1 y p).

Hay una buena razón para no considerar $p = 1$ como número primo (la veremos pronto). Una definición alternativa de número primo en la que no es necesario eliminar explícitamente el 1 en el enunciado, como hemos hecho, es esta:

Definición: Un número es primo si tiene *exactamente* dos divisores (el 1 y el propio número).

Supongamos que nos preguntan si un número determinado es o no primo. ¿Cómo podemos saberlo? El siguiente ejercicio está resuelto en el capítulo final. Trata de resolverlo antes de ver la solución.

Ejercicio 2.16.

1. ¿Es 119 un número primo?
2. ¿Es 883 un número primo?

Los pensadores de la Grecia clásica ya se ocuparon del estudio de los números primos. Veamos un primer problema que se plantearon.

Supongamos que queremos encontrar todos los números primos menores que 100. Evidentemente, podemos ir uno por uno, y aplicar el procedimiento del ejercicio anterior. Pero, ¿no habrá otra manera mejor de hacerlo? ¿No existirá un *algoritmo* más adecuado[12] para esta tarea? La respuesta es el algoritmo que se conoce como *criba de Eratóstenes*. Vamos a describir el algoritmo como una lista de instrucciones:

1. Escribe en una tabla los números del 2 al 99.
2. Tacha los múltiplos de 2 (excepto el 2).
3. Tacha los múltiplos de 3 (excepto el 3).
4. Tacha los múltiplos de 5 (excepto el 5).
5. Tacha los múltiplos de 7 (excepto el 7).

Cuando hemos terminado, los números que no están tachados son primos, ya que no tienen divisores. Fíjate que aquí estamos usando el mismo argumento que el presentado en la solución del ejercicio 2.16: si un número menor que 100 no tiene divisores menores que 10 ($=\sqrt{100}$), entonces es primo. Si quieres ver la criba de Eratóstenes en acción, puedes hacerlo en este enlace: http://www.visnos.com/demos/sieve-of-eratosthenes.

Otra pregunta que ya se plantearon los pensadores de la Grecia clásica es ¿cuántos números primos hay? ¿Existe una cantidad finita, y se puede hacer una lista con todos los números primos, o hay una cantidad infinita de números primos? Observa que la respuesta no es evidente. Si piensas en la criba de Eratóstenes, en la primera etapa se eliminan los números pares, que son infinitos. En la siguiente se eliminan los múltiplos de tres, también una cantidad infinita. Tras las sucesivas etapas (hechas en la lista infinita de todos los números naturales), ¿quedará una cantidad infinita de números sin eliminar, quedará por el contrario solo una cantidad finita?

Teorema 2.1 (Euclides, ~ 300 aC)**.** Existen infinitos números primos.

En estas páginas no voy a presentar demasiadas demostraciones, pero sí nos vamos a detener en esta. Por varias razones: una demostración es un argumento que nos convence de que una afirmación es cierta. En este caso, el resultado es fundamental y el argumento está al alcance de cualquier persona con una formación básica.

La demostración utiliza una técnica conocida como *reducción al absurdo*: vamos a suponer que el resultado es falso. Y vamos a razonar a partir de ahí. Si conseguimos llegar a una contradicción, a algo claramente absurdo, habremos demostrado que es imposible que el resultado sea falso, es decir, ¡que el resultado es cierto!

Demostración. Supongamos entonces que hay una cantidad finita de números primos, y hacemos la siguiente lista con ellos:

$$L = \{p_1, p_2, \dots, p_n\} \tag{2.14}$$

Dicho de otra forma: estamos suponiendo que hay n números primos, y los ponemos en la lista.

[12] El término "adecuado" se podría definir de manera precisa, pero es suficiente que lo interpretemos como que resuelve la tarea con menos operaciones.

Ahora consideramos el número $q = p_1 \times p_2 \times \cdots \times p_n + 1$, es decir, q lo obtenemos multiplicando todos los números primos de la lista y sumando una unidad. El número q no está en la lista (es mayor, ¡mucho mayor!, que todos los números de L). Sin embargo, no tiene divisores, ya que ninguno de los números p_i es un divisor de q (¿está claro por qué?). Por tanto, no es cierto que en la lista L estuvieran todos los números primos, como habíamos afirmado. Esta contradicción me asegura que es imposible hacer una lista (finita) con todos los números primos, es decir, que hay infinitos números primos. □

2.9.3. Descomposición en factores primos

Los números primos se describen muchas veces como los *ladrillos* de los que están hechos los números. Esta idea es la que está detrás del siguiente resultado, que se conoce como Teorema Fundamental de la Aritmética. En las siguientes páginas vamos a ver que conocer cómo es escribe un número como producto de números primos nos da mucha información sobre ese número.

Teorema 2.2. Todo número natural se puede escribir de manera única como producto de números primos.

No vamos a ver la demostración de este teorema, porque excede del nivel de dificultad al que me quiero limitar. La primera parte, la de que se puede hacer, sí es sencilla: si n es un número que no es primo (si fuera primo, ya hemos terminado), tiene algún divisor propio, digamos a. Pero entonces tenemos $n = a \times b$. Si a y b son primos, ya hemos terminado. En caso contrario, tienen divisores, y podemos repetir el proceso.

La parte que no es tan sencilla es demostrar que la descomposición en factores primos, también conocida como *factorización* es única (naturalmente, salvo el orden, siempre podemos escribir $6 = 2 \times 3$ y $6 = 3 \times 2$). Para preservar esta unicidad es para lo que excluimos el número 1 de la lista de los números primos, ya que si 1 fuera un número primo podríamos escribir $6 = 2 \times 3$, $6 = 1 \times 2 \times 3$, $6 = 1^7 \times 2 \times 3$, etc.

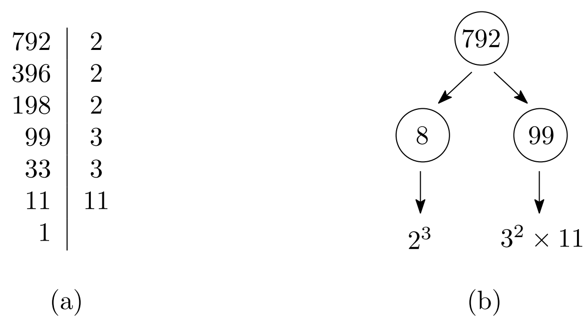


Figura 2.35: Algoritmos de factorización.

Seguro que todos los lectores recuerdan el algoritmo usual (en España) para descomponer un número en factores primos. En la figura 2.35.a) se puede ver un ejemplo, para la factorización del número 792. Pero existen otras alternativas, y pueden tener sus ventajas en algunas situaciones. En la figura de la derecha podemos ver una organización en árbol del algoritmo. Nos damos cuenta de que $792 = 8 \times 99$, y continuamos el árbol, hasta escribir los números como producto de números primos. Es muy instructivo disponer de varias alternativas para hacer un cálculo, porque ayuda a mejorar la comprensión. Además, diferentes algoritmos pueden ser más convenientes en distintas situaciones.

Ya hemos comentado que la factorización de un número nos da mucha información sobre él. Vamos a revisitar el problema de encontrar los divisores de un número, para ver que son sencillos de obtener una vez conocida la factorización.

Supongamos que queremos obtener todos los divisores del número 60. Sabemos que $60 = 2^2 \times 3 \times 5$ y que, si a es un divisor de 60, se tiene que $60 = a \times b$ (donde b es otro divisor de 60. Comparemos estas dos expresiones:

$$
\begin{aligned}
60 &= 2^2 \times 3 \times 5 \\
60 &= a \times b
\end{aligned}
$$

Como la factorización es única, al factorizar a (y también b) nos deben salir algunos de los factores que aparecen en la factorización de 60. Es decir, los factores de 60 son dos doses, un tres y un cinco: pues bien, los divisores de 60 se obtienen combinando, de todas las formas posibles, estos factores.

La mejor forma de organizar estas combinaciones es en un árbol como el de la figura 2.36. Como un número elevado a cero es uno, podemos pensar en el exponente de 2^0, 2^1, 2^2 como "no cogemos ningún dos", "cogemos un dos" y "cogemos dos doses", respectivamente. Multiplicando los factores correspondientes se obtienen todos los divisores, que se muestran en el rectángulo inferior.

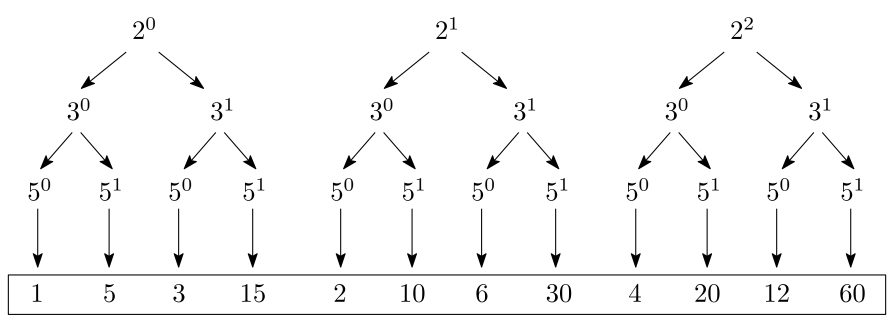


Figura 2.36: El árbol con los divisores de 60.

Esta estrategia nos muestra cómo conseguir todos los divisores de un número a partir de su descomposición en factores primos, y a continuación vamos a ver alguna otra aplicación. Supongamos que nos preguntan cuántos divisores tiene un número del que conocemos su factorización. En el árbol vemos la idea que nos permite contestar a esta pregunta sin necesidad de escribir todos los divisores: tenemos tres opciones para el factor 2 (no coger ningún 2, coger un 2 y coger dos), tenemos dos opciones para el factor 3 y, finalmente, dos opciones para el factor 5. En total, por tanto, tenemos $3 \times 2 \times 2 = 12$ divisores.

En el siguiente ejemplo vamos a ver cuánta información se puede sacar del árbol de divisores que hemos presentado.

Ejercicio 2.17. Sabiendo que $5720 = 2^3 \times 5 \times 11 \times 13$:

1. ¿Cuántos divisores tiene el número 5720?
2. Escribe los divisores impares de 5720.
3. ¿Cuántos divisores de 5720 son múltiplos de 22?

Este árbol es mucho mayor, y vamos a ver que no hace falta construirlo completo para contestar a las preguntas.

1. Como $5720 = 2^3 \times 5 \times 11 \times 13$, en el árbol tendríamos 4 opciones para el dos, dos opciones para el 5, dos para el 11 y dos para el 13. Por tanto, 5720 tiene $4 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$ divisores.
2. Para determinar los divisores impares, es suficiente darse cuenta de que corresponden a no tomar ningún factor 2 en el árbol anterior. Por tanto, corresponden a combinar los otros factores primos (5, 11 y 13) de todas las formas posibles. Hay un total de 8, que son $\{1, 5, 11, 13, 55, 65, 143, 715\}$.
3. Si queremos ahora los divisores de 5720 son múltiplos de 22, como $22 = 2 \times 11$, sabemos que en el árbol de divisores hay que elegir el 11, y también al menos un 2. Por tanto, estos divisores se pueden obtener combinando de todas las formas posibles el resto de factores (2^2, 5 y 13), y multiplicando esas combinaciones por 22. Hay un total de 12 soluciones. Las combinaciones de 2^2, 5 y 13 son $\{1, 2, 4, 5, 10, 13, 20, 26, 52, 65, 130, 260\}$ (a los que habría que multiplicar por 22. Obsérvese que estos números son exactamente los divisores de $2^2 \times 5 \times 13 = 5720 \div 22$.

♢

Para contestar el apartado 1 hemos seguido un razonamiento que se puede generalizar de la siguiente forma. Si el número natural n se factoriza como $n = p_1^{a_1} \times p_2^{a_2} \times \cdots \times p_k^{a_k}$ entonces n tiene $(a_1 + 1) \times (a_2 + 1) \times \cdots \times (a_k + 1)$ divisores.[13]

Ya sabemos determinar el número de divisores que tiene un número si conocemos su descomposición en factores primos. En el siguiente ejercicio vamos a darle la vuelta a los razonamientos anteriores, y buscar factorizaciones para que la cantidad de divisores sea una dada, o con ciertas propiedades.

Ejercicio 2.18. Encuentra 4 números de 3 cifras que tengan 20 divisores.

Hay varias posibilidades para factorizar un número que tenga 20 divisores. Siguiendo el razonamiento para contar el número de divisores, deducimos que para que un número que tenga 20 divisores se debe factorizar de una de estas formas:

a) p^{19} b) $p^9 \cdot q$ c) $p^4 \cdot q \cdot r$ d) $p^4 \cdot q^3$

donde p, q y r son *números primos distintos.*

En los casos a) y b) no obtenemos ningún número de 3 cifras ($2^9 = 512$), pero en los casos c) y d) hay varias posibilidades. Por ejemplo, poniendo $p = 2$ y $q = 3$ en d) se obtiene $2^4 \times 3^3 = 432$. ♢

[13] Si has entendido el razonamiento del apartado 1 no hace ninguna falta que memorices esta fórmula.

2.9.4. Divisibilidad, un poco más de teoría

Todos sabemos desde primaria que cuando sumamos dos números pares se obtiene un número par, y que cuando un número par se multiplica por cualquier número el resultado es par. Los números pares son los múltiplos de dos, y esta propiedad es cierta para los múltiplos de cualquier número, no solo para los números pares. Esto es lo que dice el siguiente enunciado.

Propiedad 2.1.

1. Si a es múltiplo de c, todos los múltiplos de a son múltiplos de c.

2. Si a y b son múltiplos de c, entonces $a+b$ y $a-b$ son múltiplos de c.

Vamos a comprobar por qué esto es cierto con un ejemplo. La demostración general es simplemente escribir en lenguaje algebraico lo que vamos a ver ahora en un caso particular.

Para el apartado 1. consideremos $a=27$ y $c=9$. La propiedad afirma que, como 27 es múltiplo de 9, todos los múltiplos de 27 son múltiplos de 9. En efecto, como $27=3\times 9$, si consideramos cualquier múltiplo de 27, como 82347×27, tendremos que $82347\times 27=82347\times 3\times 9$ que es, por tanto, múltiplo de 9.

El apartado 2. afirma que si consideramos dos múltiplos de 9, como por ejemplo 72 y 45, tanto la suma como la diferencia serán múltiplos de 9. Vamos a comprobarlo, no haciendo la cuenta directa sino con el argumento que se puede hacer en el caso general:

a) $72+45=9\times 8+9\times 5=9\times(8+5)$ b) $72-45=9\times 8-9\times 5=9\times(8-5)$

La propiedad 2.1 se puede enunciar también en términos de divisores. Vamos a hacerlo, como ejercicio de lenguaje algebraico.

1. Si $c \mid a$ y k es cualquier número natural, entonces $c \mid (k\times a)$.

2. Si $c \mid a$ y $c \mid b$ entonces $c \mid (a\pm b)$.[14]

Dos consecuencias sencillas de esta propiedad:

1. Como 34 es múltiplo de 17, y 51 también es múltiplo de 17, podemos estar seguros, sin hacer un solo cálculo, que $8247\times 34-634\times 51$ es también múltiplo de 17.

2. ¿Cuáles son los divisores comunes de 200 y 206? Dentro de poco veremos una técnica general para encontrar los divisores comunes de dos números. Para este caso, podemos observar que si c es divisor de 200 y también de 206, entonces c es divisor de $206-200$, es decir, c tiene que ser un divisor de 6. Por tanto, los únicos posibles divisores comunes de 200 y 206 son el 1, el 2, el 3 y el 6. Una vez visto esto, es sencillo comprobar que el 3 y el 6 no son divisores de 200. Por tanto, los únicos divisores comunes de 200 y 206 son el 1 y el 2.

[14] El signo $\pm$ significa que se puede sumar y también restar.

2.9.5. Máximo común divisor y mínimo común múltiplo

Definición 2.4. El *máximo común divisor* de dos números a y b, $\mathrm{mcd}(a,b)$, es el mayor número natural que es divisor tanto de a como de b.

Pronto veremos alternativas para calcular el máximo común divisor de dos números, pero la definición puede ser suficiente en muchas situaciones. De hecho, en primaria no deberían verse algoritmos adicionales, ya que la mejor forma de que los alumnos entiendan qué es el máximo común divisor de dos números es que lo calculen siguiendo la definición: buscamos los divisores de a, también los de b, y nos quedamos con el mayor de ellos.

⚠ El 0 puede causar en este momento algunas dificultades, seguramente por haber calculado el máximo común divisor a partir de la factorización, pero sin haber pensado demasiado en la definición. Un ejemplo: ¿cuál es el máximo común divisor de 29348 y 0, es decir, $\mathrm{mcd}(29348,0)$?

Cualquier número natural es divisor de 0 (recuerda, la división $0 \div 29348$ puede ser poco útil, pero está bien planteada: el cociente es 0, y el resto es 0). Por tanto, $\mathrm{mcd}(29348,0) = 29348$. Por supuesto, el número 29348 no tiene nada de especial. Si n es cualquier número natural, $\mathrm{mcd}(n,0) = n$ (recuerda que 0 no es un número natural, $\mathrm{mcd}(0,0)$ no está definido, precisamente porque cualquier número natural es divisor de 0). Fin de ⚠

El máximo común divisor de dos números se puede obtener fácilmente si se conocen las factorizaciones de esos números, eso de "los factores comunes al menor exponente". Vamos a ver por qué funciona esa receta, ya que tenemos todos los ingredientes necesarios.

Supongamos que queremos calcular el máximo común divisor de 17640 y 12474, sabiendo que

$$17640 = 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7^2$$
$$12474 = 2 \times 3^4 \times 7 \times 11.$$

Los divisores de 17640 se obtienen combinando de todas las formas posibles los tres doses, dos treses, un cinco y dos sietes de su factorización, y lo mismo ocurre para 12474. Si ahora queremos obtener el divisor común más grande, ¿qué habrá que hacer? Pues coger todos los factores que tienen en común, es decir, un dos, dos treses y un siete. Por tanto, $\mathrm{mcd}(17640,12474) = 2 \times 3^2 \times 7 = 126$.

Propiedad 2.2. El máximo común divisor de dos números naturales a y b es el producto de sus factores comunes (tomados al menor exponente).[15]

Supongamos que nos interesa conocer todos los divisores comunes de dos números, no solo el mayor de ellos. ¿Cómo deberíamos proceder? Una vez más, en las factorizaciones tenemos toda la información necesaria. En el ejemplo anterior, si un número es divisor tanto de 17640 como de 12474, ese divisor común se puede obtener de las factorizaciones de ambos términos, es decir, se puede obtener combinando los factores comunes. En el ejemplo, los divisores comunes de 17640 y 12474 son los números que podemos obtener combinando un dos, dos treses y un

[15]Conservo lo del "menor exponente" porque así se suele enunciar en secundaria, aunque no sea necesario. En el ejemplo, lo común entre 3^2 y 3^4 es 3^2, sin necesidad de añadidos.

siete, es decir, son los divisores de $2 \times 3^2 \times 7 = 126$, el máximo común divisor de 17640 y 12474. Esta propiedad es cierta en general.

Propiedad 2.3. Los divisores comunes de dos números naturales son los divisores de su máximo común divisor.

Ejercicio 2.19. Tenemos una habitación rectangular, de 6,30 m de largo y 4,50 m de ancho. Queremos poner un suelo de baldosas cuadradas, todas iguales, sin tener que partir ninguna baldosa.

1. ¿de qué tamaños podrían serán las baldosas?
2. ¿cuántas baldosas necesitaremos en cada caso?

Para más de dos números naturales todo lo que hemos dicho hasta aquí se generaliza de manera directa (también los argumentos). Por tanto:

Si $a_1, a_2, \ldots, a_k$ son números naturales, su máximo común divisor, $\text{mcd}(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ es el mayor de sus divisores comunes, y se puede obtener a partir de las descomposiciones en factores primos tomando los factores comunes (al menor exponente). Los divisores comunes de los números $a_1, a_2, \ldots, a_k$ son los divisores de su máximo común divisor.

Ejercicio 2.20. Sabiendo que

$$\begin{aligned}
17640 &= 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7^2 \\
12474 &= 2 \times 3^4 \times 7 \times 11 \\
3591 &= 3^3 \times 7 \times 19 \\
4998 &= 2 \times 3 \times 7^2 \times 17
\end{aligned}$$

calcula $\text{mcd}(17640, 12474, 3591, 4998)$ y escribe todos los divisores comunes de estos números.

Revisando las factorizaciones, vemos que los únicos factores comunes son el 3 y el 7. Por tanto, $\text{mcd}(17640, 12474, 3591, 4998) = 3 \times 7 = 21$. Como los divisores comunes son los divisores del máximo común divisor, en este caso tenemos 1, 3, 7 y 21.

Una última propiedad del máximo común divisor que puede ser útil para simplificar algunos cálculos:

Propiedad 2.4. Si k es un divisor común de a y de b, entonces

$$\text{mcd}(a, b) = k \times \text{mcd}(a/k, b/k).$$

En el caso del ejercicio 2.19, esta propiedad nos dice que $\text{mcd}(630, 450) = 10 \times \text{mcd}(63, 45)$.

¿Por qué es cierta esta propiedad? La idea es muy sencilla: el máximo común divisor de a y b es el conjunto de factores comunes de a y de b. Si k es un conjunto de factores comunes, los podemos "quitar", y seguir buscando los factores comunes de a/k y b/k.

Definición 2.5. El *mínimo común múltiplo* de dos números a y b, $\text{mcm}(a, b)$, es el menor número natural que es múltiplo tanto de a como de b.

La propia definición nos proporciona una forma de calcular el mínimo común múltiplo de dos números. Si nos piden, por ejemplo, el mínimo común múltiplo de 6 y 10, podemos considerar los múltiplos de 6, hasta que encontremos un múltiplo de 10. Ese será el menor de los múltiplos comunes. Una buena forma de ayudara los alumnos de primaria a visualizar este procedimiento es la recta numérica, tal y como se muestra en la figura 2.37.

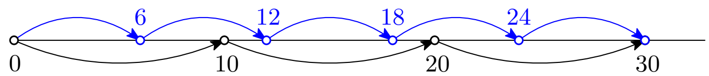


Figura 2.37: El mínimo común múltiplo de 6 y 10 en la recta numérica.

El máximo común divisor y el mínimo común múltiplo son dos conceptos que originan conocidas dificultades de aprendizaje, y creo que merece la pena dedicar unos párrafos a reflexionar sobre ellas.

1. El lenguaje puede inducir a equívocos, ya que máximo suena a "grande". Sin embargo, al ser el mayor de los divisores, resulta ser un número menor que los números de partida. Por el contrario, mínimo suena a "pequeño", pero al ser el menor de los múltiplos resulta ser un número mayor que los datos del problema. Esta situación no es fácil de resolver, no parece que exista alternativa para la terminología. Por ello, sería especialmente importante presentar estos conceptos trabajando de manera cuidada la comprensión. Y esto nos lleva a la segunda observación.

2. La mejor forma de trabajar en Educación Primaria el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo es calcularlos usando su definición, porque es la forma que nos permite ver qué significa cada uno. Por supuesto, este procedimiento solo es adecuado para números pequeños. El cálculo mediante la descomposición en factores primos no es adecuado para ser usado en Primaria, aunque por desgracia sí está presente en muchas de nuestras aulas. ¿Por qué se trabaja así? Creo que la única explicación es cultural, nuestra tendencia a presentar los procedimientos generales demasiado pronto, cuando sería útil empezar calculando las cosas de forma más "artesanal". Es importante tener presente que la descomposición en factores primos no aparece en el currículo de Primaria de la LOMCE. En la figura 2.38, extraída de https://www.bocm.es/boletin/CM_Orden_BOCM/2014/07/25/BOCM-20140725-1.pdf, (pag 54) se muestran los contenidos de divisibilidad en el Decreto que fija los contenidos y estándares de aprendizaje en la Comunidad de Madrid.

Pasamos ahora a ocuparnos del cálculo del mínimo común múltiplo de dos números a partir de sus factorizaciones. Supongamos que queremos calcular el mínimo común múltiplo de 3591 y 14994 sabiendo que

$$3591 = 3^3 \times 7 \times 19$$
$$14994 = 2 \times 3^2 \times 7^2 \times 17$$

Los múltiplos de 3591 deben contener los factores 3^3, 7 y 19. De la misma forma, los múltiplos de 14994 deben contener los factores 2, 3^2, 7^2 y 17. Por tanto, si queremos un múltiplo de ambos, 5º Primaria

Divisibilidad. Múltiplos y divisores. Números primos.

4. Define las relaciones "divisor de" y "múltiplo de" entre dos números y determina si un número es múltiplo o divisor de otro.
5. Calcula los primeros múltiplos de un número dado.
6. Halla todos los divisores de cualquier número menor que 50.
7. Define número primo y número compuesto y memoriza la lista ordenada de los números primos menores que 30.
8. Conoce las reglas de divisibilidad por 2, 5 y 10.

6º Primaria

Divisibilidad. Divisores de un número menor que 100. Máximo común divisor y mínimo común múltiplo.

5. Determina si un número natural cualquiera es múltiplo o divisor de otro.
6. Halla todos los divisores de cualquier número menor que 100.
7. Calcula el m.c.m. y el m.c.d. de dos números naturales.
8. Conoce las reglas de divisibilidad por 2, 3, 5, y 10.

Figura 2.38: Divisibilidad en el currículo de Educación Primaria de Madrid.

debemos tomar el 2, el 3^3 (que contiene al 3^2), el 7^2 (que contiene al 7), el 17 y el 19, es decir, los factores comunes (al mayor exponente) y los factores no comunes, como dice la conocida receta.

Propiedad 2.5. El mínimo común múltiplo de dos números naturales a y b es el producto de sus factores comunes (tomados al mayor exponente) y sus factores no comunes.

La última propiedad de esta sección es una sencilla relación entre dos números, su máximo común divisor y su mínimo común múltiplo.

Propiedad 2.6. Si a y b son dos números naturales cualesquiera, $a \times b = \mathrm{mcd}(a,b) \times \mathrm{mcm}(a,b)$.

Para ver por qué esta igualdad es cierta es suficiente pensar en las factorizaciones de a y b, y cómo los términos del producto $a \times b$ (que se obtienen uniendo los términos de los dos factores) se reparten entre el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo. En el siguiente ejemplo, con los números 3591 y 14994, los factores que corresponden al máximo común divisor están recuadrados, y el resto corresponden al mínimo común múltiplo:

$$3591 \times 14994 = (3^3 \times \boxed{7} \times 19) \times (2 \times \boxed{3^2} \times 7^2 \times 17).$$

El máximo común divisor de dos (o más) números nos permitía encontrar todos los divisores comunes de esos números. Una propiedad análoga es cierta para el mínimo común múltiplo. Supongamos que queremos determinar los múltiplos comunes de los números 6 y 10. Como ya vimos, y representamos en la figura 2.37, el primer múltiplo común (positivo, recordemos que el 0 es múltiplo de los dos) es 30, su mínimo común múltiplo. ¿Cuál será el siguiente múltiplo? Claramente, el 60, luego el 90, etc. En general, tenemos:

Propiedad 2.7. Los múltiplos comunes de dos números son los múltiplos de su mínimo común múltiplo.

Por último, igual que hicimos con el máximo común divisor, generalizamos el mínimo común múltiplo a más de dos números. También en este caso los razonamientos son los mismos, por lo que no nos detenemos en ellos.

Si $a_1, a_2, \ldots, a_k$ son números naturales, su mínimo común múltiplo, $\mathrm{mcm}(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ es el menor número natural que es múltiplo de todos ellos, y se puede obtener a partir de las descomposiciones en factores primos tomando los factores comunes (al mayor exponente) y los factores no comunes. Los múltiplos comunes de los números $a_1, a_2, \ldots, a_k$ son los múltiplos de su mínimo común múltiplo.

Ejercicio 2.21. Busca un ejemplo que muestre que para tres números ya no es cierto que

$$a \times b \times c = \mathrm{mcd}(a, b, c) \times \mathrm{mcm}(a, b, c).$$

Indicación: considera dos números a y b, y después busca un número c de forma que $\mathrm{mcd}(a, b, c) = \mathrm{mcd}(a, b)$ y que $\mathrm{mcm}(a, b, c) = \mathrm{mcm}(a, b)$.

Terminamos con este problema (cuya solución está en el capítulo final).

Ejercicio 2.22. Dos faros emiten una señal especial cada 16 y 12 minutos, respectivamente. Sabiendo que emiten la señal a la vez a las 0 horas y que empezamos a contemplarlos a las 5 de la tarde:

1. ¿a qué hora coinciden por primera vez después de la medianoche?
2. ¿cuántas veces han emitido la señal a la vez antes de que llegáramos?
3. ¿a qué hora los veremos coincidir por primera vez?

2.10. Aritmética con restos (Reglas de divisibilidad)

Todos sabemos que al sumar dos números pares se obtiene un número par, y que cuando se suma un número par con otro impar el resultado es impar. Esta propiedad se puede formular en términos de resto al dividir entre dos, y el objetivo de esta sección es generalizarla a otras divisiones y ver cómo esto nos permite deducir las conocidas reglas de divisibilidad. Empecemos con un primer ejemplo:

Ejercicio 2.23. Sabemos que al dividir el número a entre 3 el resto es 2, y que al dividir el número b entre 3 el resto también es 2. ¿Cuál es el resto de dividir el número $a + b$ entre 3?

Al terminar de agrupar (o repartir) $a + b$ elementos, vemos que nos han sobrado 4 (2 al agrupar a y otros 2 al agrupar b). Por tanto, podemos hacer otro grupo de 3 y nos sobrará 1.

En esta sección vamos a hablar muchas veces de “el resto de dividir un número entre otro”. Para abreviar un poco la escritura, introducimos esta notación: $r(a, n)$ es el resto de dividir a entre n. Por ejemplo, $r(15, 4) = 3$, o $r(28, 3) = 1$. Usando esta notación, la respuesta del ejercicio anterior se puede escribir de esta forma:

Si $r(a, 3) = 2$ y $r(b, 3) = 2$, entonces $r(a + b, 3) = 1$.

Antes de pasar a los criterios de divisibilidad, un último ejercicio para que el lector compruebe si ha entendido la idea:

Ejercicio 2.24.

1. Si $r(a,5) = 3$ y $r(b,5) = 2$, ¿cuánto vale $r(a+b,5)$?

2. Si $r(a,7) = 5$ y $r(b,7) = 4$, ¿cuánto vale $r(a+b,7)$?

Es importante que el lector vaya desarrollando estrategias para comprobar si sus respuestas son correctas. En este caso, por ejemplo, como los resultados son generales, se puede comprobar si dan respuestas correctas para algunos valores de a y b concretos.

Veamos ya algunos criterios de divisibilidad. Los vamos a presentar en tres grupos, de acuerdo con la idea que hace que funcionen.

- Los más sencillos son los que nos permiten ver si un número es divisible entre otro (de hecho, calcular el resto) mirando solo la cifra de las unidades. Esto ocurre cuando el divisor es 2, 5 o 10: si la cifra de las unidades es par, el número es múltiplo de 2, si la cifra de las unidades es 0 o 5 el número es múltiplo de 5, si la cifra de las unidades es 0, el número es múltiplo de 10.

- A continuación, consideramos los divisores 4 y 8.

  Como 100 es múltiplo de 4, cualquier múltiplo de 100 es múltiplo de 4. Por ejemplo, si nos piden calcular el resto de dividir 28653 entre 4, podemos escribir $28653 = 28600 + 53$ y, por tanto,

  $$r(28653,4) = r(28600+53,4) = r(28600,4) + r(53,4) = r(53,4) = 1.$$

  Por tanto, hemos deducido una regla que diría: "para calcular el resto de un número al dividir entre 4, es suficiente calcular el resto de dividir el número formado por las unidades y las decenas".

  Con el 8 no podemos hacer lo mismo, porque 100 no es múltiplo de 8. Pero sí lo es 1000, ya que $125 \times 8 = 1000$. Por tanto, los múltiplos de 1000 son múltiplos de 8, y siguiendo la misma idea podemos reducir el cálculo del resto de un número al dividir entre 8 al cálculo del resto tomando las tres últimas cifras. En el ejemplo anterior,

  $$r(28653,8) = r(28000+653,8) = r(28000,8) + r(653,8) = r(653,8) = 5.$$

- Por último, consideramos los divisores 3 y 9.

  La primera observación es que el resto de una potencia de 10 al dividir entre 3 es siempre 1. Por ejemplo, esto se puede deducir del hecho de que un número cuyas cifras son todas 9 es múltiplo de 3. En lenguaje algebraico, podemos escribir que $r(10^k,3) = 1$ para cualquier número natural k.

  Veamos un ejemplo de cómo podemos proceder para calcular el resto de un número al dividir entre 3. Si queremos calcular $r(28653,3)$, consideramos la descomposición usual

  $$28651 = 2 \times 10^4 + 8 \times 10^3 + 6 \times 10^2 + 5 \times 10 + 1.$$

  Vamos ahora a hacer grupos con cada uno de estos sumandos:

  - Con 2×10^4 hacemos cierto número de grupos y nos sobran 2.

- Con 8×10^3 hacemos cierto número de grupos y nos sobran 8. Por tanto, podríamos hacer otros dos grupos, pero resulta más conveniente proceder en dos fases, y dejar pendientes estas 8 unidades.
- Con 6×10^2 hacemos más grupos de 3 y nos sobran 6. De nuevo, dejamos pendientes estas 6 unidades.
- Con 5×10 hacemos otros grupos, y nos sobran 5, que dejamos pendientes.
- Finalmente, la unidad la dejamos pendientes, para la siguiente fase.

En resumen, en la primera fase hemos dejado pendientes un total de $2+8+6+5+1$ unidades (la suma de las cifras del número original). Por tanto, lo que hemos visto es que

$$r(28651,3) = r(22,3) = 1.$$

Y la regla para calcular el resto al dividir entre 3 dice: "el resto de un número n al dividir entre 3 es el mismo que el resto del número que se obtiene al sumar las cifras de n". (Seguramente, el lector habrá visto la versión para múltiplos de 3, es decir, cuando el resto es 0).

Al dividir por 9, la regla es exactamente la misma, ya que también se tiene que $r(10^k,9) = 1$ para cualquier número natural k. Es decir, "el resto de un número n al dividir entre 9 es el mismo que el resto del número que se obtiene al sumar las cifras de n". En el ejemplo del número anterior,

$$r(28651,9) = r(22,9) = 4.$$

Existen más reglas de divisibilidad, como las del 7, o el 11. No es casualidad que sean números primos. Motivados por el problema de buscar divisores primos, era especialmente importante poder determinar si un número era o no divisible por números primos. Hoy en día, el problema de factorizar un número es uno de esos procedimientos mecánicos que puede resultar más conveniente dejar en manos de la tecnología, y así poder centrarnos en pensar qué se puede hacer con las factorizaciones, y otros problemas similares. El interés de los resultados anteriores no es tanto poder calcular los restos, sino seguir haciendo ejercicios sobre la división y la descomposición de un número en grupos de 10 y de potencias de 10.

En esta línea, nos podríamos plantear preguntas como, por ejemplo, ¿cómo se puede calcular el resto de un número al dividir entre 25? ¿Y al dividir entre 40?

Cerramos esta sección, y el tema, con el problema de la divisibilidad entre 6. A muchos lectores les resultará familar la frase "un número es divisible entre 6 si es divisible entre 2 y entre 3". ¿Por qué? Ya conocemos el resultado que explica este hecho, aunque lo hemos visto formulado en términos de múltiplos: los múltiplos comunes de dos números son los múltiplos de su mínimo común múltiplo. Por tanto, los números que son divisibles entre 2 y entre 3 (los múltiplos comunes de 2 y 3) son los múltiplos de 6 (que es el mínimo común múltiplo de 2 y 3). Visto así, queda claro que esta situación se puede generalizar, para ver por ejemplo cuando un número es divisible entre 12 (lo será cuando es divisible entre 3 y entre 4, ya que $\mathrm{mcm}(3,4) = 12$).

Capítulo 3

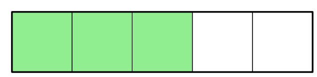
Los números racionales

Positivos!! Seguramente, mejor titularlo las fracciones

Las fracciones son seguramente el contenido de las matemáticas de Educación Primaria que es origen de más dificultades de aprendizaje. No es sorprendente que sea así, ya que la fracción requiere un salto de abstracción desde el número natural. Creo que más importante, un mismo objeto matemático, como la fracción 3/5 tiene al menos estos tres significados:

1. Parte de un todo.

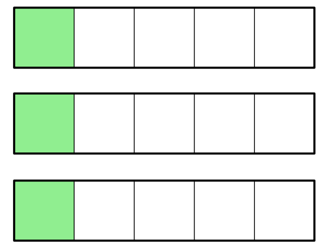
   Este es el significado más sencillo, y el que se suele usar para introducir las fracciones. El todo, el total, puede ser continuo (un objeto, como un rectángulo, o una chocolatina) o discreto (una colección de objetos, como una bolsa de caramelos). El caso continuo es más sencillo, y es el que se usa al principio.

   En la figura tenemos coloreados 3/5 del rectángulo: hemos dividido el total en 5 partes iguales, y hemos coloreado 3 de ellas.

2. Solución a un problema de reparto (división).

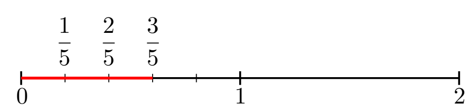
   Si tenemos 3 chocolatinas, y las queremos repartir (por igual) entre 5 niños, ¿cuánto tenemos que darle a cada niño? Aunque la solución nos viene a la mente de forma natural, debemos hacer el esfuerzo de ver este problema con los ojos de un alumno que se está iniciando en el estudio de las fracciones, y que aún no identifica de manera natural la fracción 3/5 con la solución a este problema de reparto.

   ¿Cómo se podría hacer el reparto? Una solución natural sería dividir cada chocolatina en 5 partes iguales, y dar una parte a cada niño. Por tanto, el primer niño recibiría las partes coloreadas, que son 3/5 de chocolatina. Un error común es decir que está recibiendo 3/15; este error está motivado por la principal fuente de confusión al tratar con las fracciones, no tener clara la referencia del total, en cada caso. El niño recibe 3/15 (es decir, 1/5) del total de las tres chocolatinas, que resulta ser 3/5 de chocolatina.

3. Una *cantidad* (un punto en la recta numérica, un número).

   El 5, el *denominador*, nos indica que tenemos que dividir el intervalo unidad en 5 partes iguales. El 3, el *numerador*, dice que tomamos 3 de esas partes. La representación de las fracciones en la recta numérica supone un paso de abstracción con respecto a la representación como partes de un todo, y se suele tratar con posterioridad (lo que me parece adecuado). Esta representación de las fracciones será fundamental para conectarlas con el resto de los números (naturales, decimales). También es la mejor forma de introducir las fracciones impropias. Combinar de manera adecuada la representación como parte de un todo y como punto en la recta numérica es una de las claves para hacer un tratamiento adecuado de las fracciones.

Un error común en nuestros libros de texto tradicionales es no variar lo suficiente la representación de las fracciones. La mayoría de los ejemplos se limitan a círculos (tartas, pizzas) divididos en partes iguales, y quizá algunos rectángulos. En la figura 3.1 se pueden ver ejemplos variados, ante los que se podría plantear la pregunta: ¿está sombreado 1/4 del total? ¿Por qué?

La representación de las fracciones tiene un papel fundamental en la resolución de problemas. A su vez, la resolución de problemas es esencial para profundizar en la comprensión de las fracciones. Pensemos por ejemplo en este problema de primaria:

Ejercicio 3.1. He comido 1/3 de los bombones de una caja y me quedan 12 bombones. ¿Cuántos bombones tenía la caja?

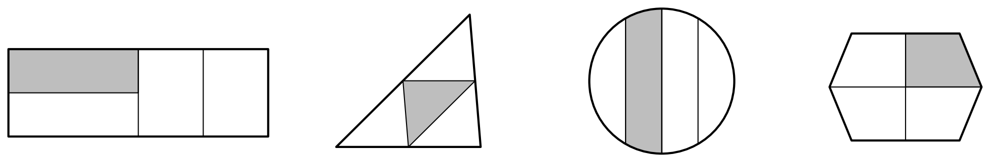


Figura 3.1: ¿Está sombreado un cuarto del total?

El modelo de barras va a ser especialmente útil para ayudarnos a resolver problemas de fracciones. El enunciado de este ejercicio está representado en la figura 3.2. Una vez hemos lo hemos dibujado, resulta claro que 2/3 de la caja son 12 bombones, por tanto cada tercio son 6 bombones, y la caja tiene un total de 18 bombones.

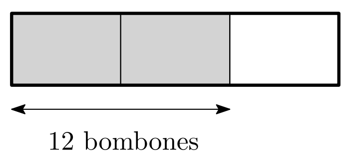


Figura 3.2: Modelo de barras para el ejercicio 3.1.

En este momento ya estamos listos para contestar la tercera de las cuestiones que planteamos en la introducción. Era esta:

Ejercicio 3.2. Luis y Marta tienen la misma cantidad de dinero. Organizan una fiesta juntos, y Luis gasta la mitad de su dinero en organizarla. Como Marta ha invitado a más amigos, ella gasta 3/4 de su dinero en la organización. ¿Qué fracción del total del dinero que tenían entre los dos han gastado en organizar la fiesta?

Un error común en este ejercicio es contestar que como Luis ha gastado 1/2, y Marta ha gastado 3/4, entre los dos han gastado $1/2+3/4=5/4$. La causa de este error es no darse cuenta de que Luis ha gastado 1/2 de *su dinero*, y Marta 3/4 del suyo, mientras que nos preguntan por la fracción *del total* que han gastado. Si representamos los datos como hemos hecho en la figura 3.3 la situación es mucho más clara, y es más sencillo darse cuenta de que la mitad del dinero de Luis corresponde a 1/4 del total, el dinero que ha gastado Marta corresponde a 3/8 del total, y por tanto entre los dos han gastado 5/8 del total.

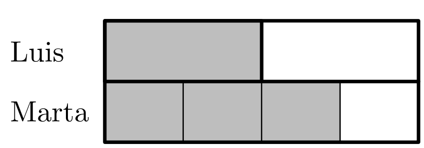


Figura 3.3: Modelo para el ejercicio 3.2.

3.1. Fracciones. Primeros conceptos

Desde el punto de vista formal, para lo que nos ocupa será suficiente definir una fracción como una expresión de la forma a/b, donde a y b son números naturales. a es el *numerador* y b es el *denominador*. Aunque el denominador se representa como un número, no es realmente un número, sino que juega el papel de unidad. Cuando hablamos de "tres quintos", el término "quintos" se refiere a la unidad que estamos considerando, y que en este caso corresponde a dividir el total en 5 partes iguales. Por su parte, el numerador si juega el papel de número que designa cantidad. En el caso de "tres quintos" tomamos 3 de esas unidades.

Es posible que este detalle no se trabaje lo suficiente en el tratamiento de las fracciones. Cuando un alumno comete el error básico de sumar denominadores al hacer $\frac{1}{4}+\frac{1}{3}=\frac{2}{7}$, lo que está haciendo es ver los denominadores como números, y hacer con ellos lo que venía haciendo anteriormente cuando aparecía el símbolo $+$. La expresión "1 cuarto + 1 tercio" para la suma anterior deja mucho más clara la situación, y la imposibilidad de sumar cuartos y tercios. No estoy proponiendo cambiar la notación de las fracciones, simplemente tener este detalle presente, pues podría ser útil para ayudar a los alumnos con dificultades de aprendizaje.

3.1.1. Fracciones equivalentes

Comprender de manera adecuada el concepto de *fracciones equivalentes* es fundamental para poder avanzar en el estudio de las fracciones, tanto para entender que las fracciones representan una cantidad (dos fracciones equivalentes son dos formas distintas de expresar la misma cantidad) como para operar con ellas (para compararlas, sumarlas o restarlas lo necesitaremos). Por tanto, es fundamental trabajar la comprensión del concepto y no limitarse a exponer el procedimiento numérico que se puede usar para hacer la comprobación, el "dos fracciones son equivalentes cuando al multiplicar sus términos en cruz obtenemos el mismo resultado".

La mejor forma de entender qué significa que dos fracciones sean equivalentes es representando las fracciones. En la figura 3.4 vemos tres representaciones posibles de las fracciones $2/3$, $4/6$ y $6/9$: con círculos, con rectángulos (barras), y en la recta numérica. Los círculos son la herramienta más usada en nuestras aulas, pero como hemos comentado anteriormente es importante ver también la representación de las fracciones en la recta numérica. La representación con rectángulos es una buena herramienta para hacer más fácil pasar de una representación a la otra.

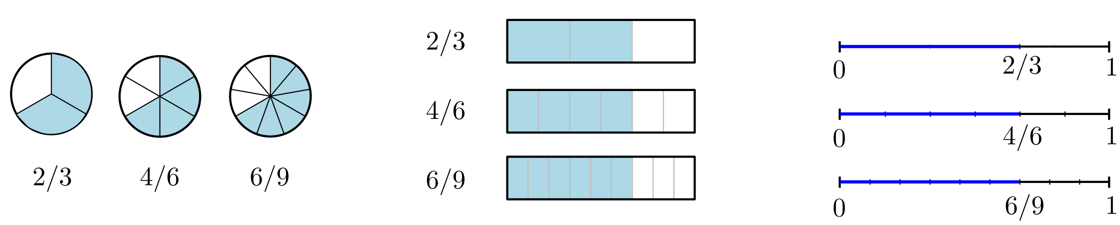


Figura 3.4: Fracciones equivalentes.

El *muro de fracciones*, que se muestra en la figura 3.5 es un recurso muy útil para trabajar varios conceptos relacionados con las fracciones, entre ellos el de fracciones equivalentes. Recortando las tiras correspondientes a las diferentes fracciones, o usando alguna de las versiones comerciales de este recurso, se pueden plantear actividades en las que el alumno *ve* las fracciones y sus propiedades.

Estos son ejemplos de algunas de las preguntas que podríamos plantear usando el muro de fracciones *antes de* tratar el procedimiento (la “cuenta”) que resuelve esa pregunta en el caso general:

1. Compara las siguientes fracciones:

   a) $\frac{2}{5}$ y $\frac{3}{5}$ b) $\frac{3}{5}$ y $\frac{3}{4}$ c) $\frac{5}{6}$ y $\frac{6}{7}$

2. Calcula la suma $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$.

3. Completa los recuadros en las siguientes igualdades:

   a) $\frac{2}{5}=\frac{\square}{10}$ b) $\frac{6}{8}=\frac{3}{\square}$ c) $\frac{1}{2}=\frac{\square}{8}$

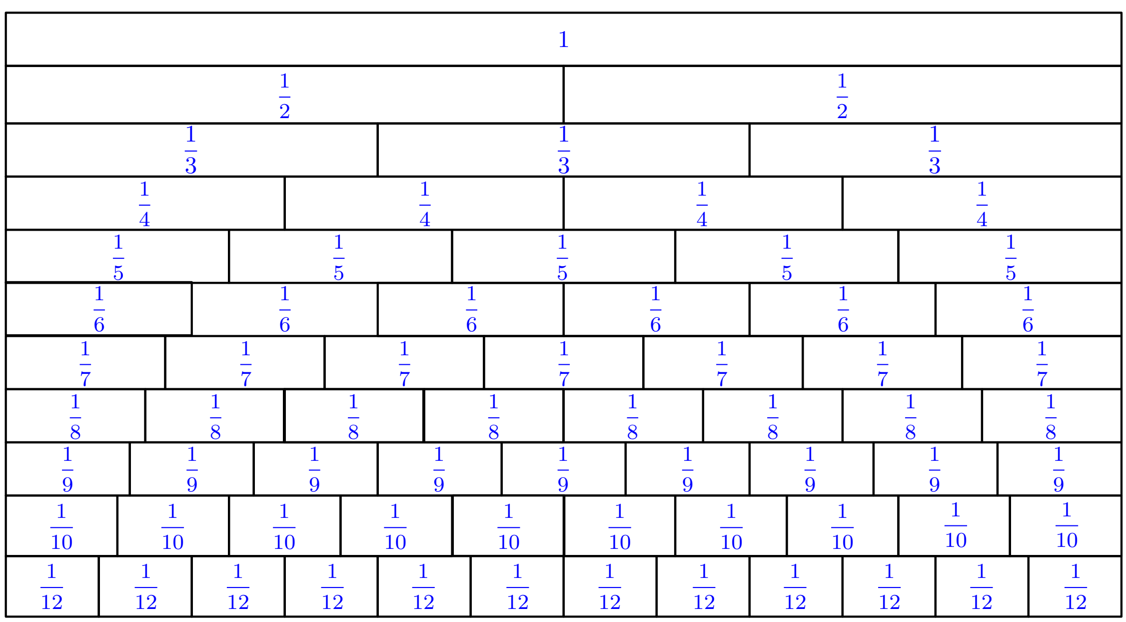


Figura 3.5: Muro de fracciones.

Una vez que el alumno ha trabajado de forma adecuada ejemplos como los anteriores está en condiciones de entender la propiedad general: “ si el numerador y el denominador se multiplican (o se dividen) por el mismo número, la fracción que se obtiene es equivalente”. En la figura 3.6 se muestra un ejemplo, que se puede interpretar de esta forma:

- si en la fracción $\frac{10}{15}$ agrupamos de cinco en cinco (de abajo hacia arriba en la figura), lo que se obtiene es

$$\frac{10}{15}=\frac{10:5}{15:5}=\frac{2}{3}.$$

A este proceso se le llama *simplificar* la fracción. En general, es recomendable trabajar con fracciones en la forma lo más simplificada posible, ya que esto las hace más fáciles de interpretar. El procedimiento para simplificar fracciones es claro: buscamos un divisor común del numerador y el denominador, y dividimos ambos términos por él. Cuando el numerador y el denominador de la fracción no tienen divisores comunes, la fracción se llama *irreducible*, no hay otra fracción “más sencilla” que sea equivalente a ella.

- si en la fracción $\frac{2}{3}$ dividimos cada parte en cinco (de arriba hacia abajo en la figura), lo que se obtiene es
$$\frac{2}{3} = \frac{2\times 5}{3\times 5} = \frac{10}{15}.$$
Este proceso, el inverso de la simplificación, puede parecer inútil en este momento, ya que nos produce fracciones más grandes, y más difíciles de interpretar, pero será muy importante cuando lleguemos a la suma de fracciones. Aunque no es en absoluto necesario darle nombre a todo, en nuestros libros de texto a este segundo proceso se le suele conocer como “amplificación"(nosotros no usaremos esta terminología, no será necesaria).

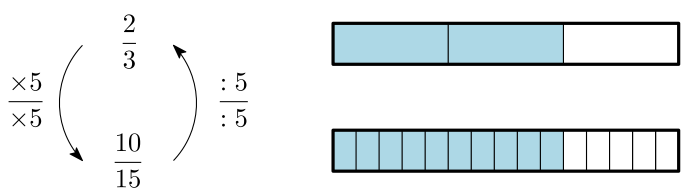


Figura 3.6: Fracciones equivalentes: propiedad.

3.1.2. Comparación de fracciones

Aunque ya ha surgido de manera natural algún ejercicio de comparación de fracciones, merece la pena detenerse en el tema y hacer alguna observación adicional. Hay varias formas de comparar fracciones, y es muy útil explorarlas todas, sin reducirlo todo al procedimiento general (que será el “reducir a común denominador”). En orden creciente de dificultad (conceptual) y, por tanto, en orden en que se deberían presentar, estas son las opciones:

1. Fracciones con el mismo denominador. Es el caso más sencillo, y haber entendido la idea básica de fracción es suficiente para darse cuenta de que, como el denominador (la unidad) es la misma, el numerador mayor dice también qué fracción es mayor.

2. Fracciones con el mismo numerador. En el ejemplo anterior, cuando nos pedían comparar $\frac{3}{5}$ y $\frac{3}{4}$, ya nos podemos haber dado cuenta de la idea general: como $1/5$ es menor que $1/4$ (estamos dividiendo el total en más partes que son, por tanto, menores), si tomamos tres veces $1/5$ será menor que tomar tres veces $1/4$. Se trata, evidentemente, de entender este razonamiento para poder aplicarlo cuando sea necesario, no de aprenderse la receta “si los numeradores son iguales, la fracción mayor es la que ...”.

3. Comparación con otra fracción.

   En algunas situaciones la comparación con otra fracción conocida puede ser suficiente para ver qué fracción es mayor sin hacer ninguna cuenta. Supongamos que tenemos que comparar las fracciones $\frac{5}{11}$ y $\frac{9}{17}$. Debería ser fácil darse cuenta de que $\frac{5}{11} < \frac{1}{2}$ (y sería útil que el lector pensara un argumento para convencer de ello a un alumno que no lo ve), y que $\frac{9}{17} > \frac{1}{2}$. Por tanto, $\frac{5}{11} < \frac{9}{17}$.

   En otras situaciones podremos comparar fracciones con razonamientos similares al usado para comparar 5/6 y 6/7 en el ejercicio anterior. Por ejemplo, supongamos que nos piden comparar $\frac{11}{12}$ y $\frac{15}{16}$. Hacer el dibujo con el modelo de barras y la representación explícita de las fracciones resulta ya demasiado laborioso. Si representamos las fracciones en la recta numérica, y damos un paso más de abstracción y usamos la recta numérica *vacía*, tenemos la situación que se represent en la figura 3.7: como $\frac{11}{12} = 1 - \frac{1}{12}$ y $\frac{15}{16} = 1 - \frac{1}{16}$, y como $\frac{1}{16} < \frac{1}{12}$, podemos concluir que $\frac{11}{12} < \frac{15}{16}$. Este razonamiento es interesante, sobre todo, porque nos hace reflexionar sobre las fracciones. La mejor manera de asegurarse de que se ha entendido es tratar de generalizarlo, por ejemplo, a comparar ls fracciones $\frac{47}{49}$ y $\frac{65}{67}$. (Indicación: la misma figura puede servir de guía, cambiando solo las fracciones).

4. Reducción a común denominador.

   Ya que comparar fracciones es fácil cuando tienen el mismo denominador, se pueden buscar fracciones equivalentes a las dadas que tengan el mismo denominador. Es el procedimiento más general, válido para todos los casos. Es también el procedimiento más mecánico, en el que no es necesario reflexionar mientras se aplica, y que por tanto me parece el menos útil si el objetivo de hacer los ejercicios es mejorar la comprensión de las fracciones.

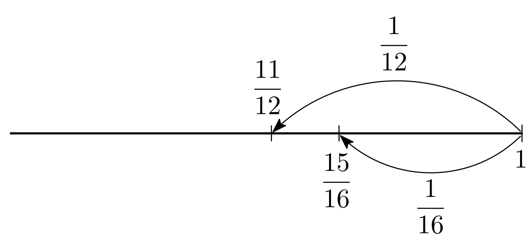


Figura 3.7: Comparación de fracciones.

3.1.3. Fracciones impropias

Se dice que una fracción es *propia* cuando el numerador es menor que el denominador. Al principio es con las que se trabaja, pues es con ellas con las que tiene sentido la idea de que una fracción es la *parte de un todo*. Cuando el numerador es mayor (o igual) que el denominador, esta idea de "parte de un todo" deja de tener sentido. Es importante darse cuenta que el paso a la situación en que el numerador es mayor (o igual) que el denominador, las fracciones *impropias* supone un salto conceptual que hay que trabajar de manera adecuada. Después de haberse planteado repetidamente situaciones del tipo “he comido 3/4 de la tarta", o “he calculado los 2/3 de 24”, hay que darse cuenta de que decir “he comido 5/4 de ¿la tarta?.º “he calculado los 4/3 de 24” pueden plantear dificultades al alumno.

Creemos que la mejor herramienta para entender las fracciones impropias es la recta numérica. Por tanto, antes de empezar el estudio de las fracciones impropias deberíamos haber trabajado convenientemente la representación de las fracciones propias en la recta numérica. Si hemos entendido que para representar la fracción 3/4 lo que hacemos es primero darnos cuenta de que 1/4 corresponde a dividir el intervalo $(0,1)$ en cuatro partes iguales, y luego tomamos tres de esas partes, para representar la fracción 9/4 tenemos que hacer exactamente lo mismo, tomando ahora nueve de esas partes (figura 3.8). De esta manera también es fácil entender que

$$\frac{9}{4} = \frac{4}{4} + \frac{4}{4} + \frac{1}{4} = 2 + \frac{1}{4}. \tag{3.1}$$

Ahora ya podemos hablar de que hemos comprado 9/4 de pizza (aunque sea una compra poco habitual, ciertamente), o que hoy hemos bebido 9/4 de litros de agua.

Un pequeño comentario sobre los *números mixtos*. La expresión $2+\frac{1}{4}$ se puede escribir también $2\frac{1}{4}$ (sin ningún signo entre el entero y la fracción). A estos números se les llama *número mixtos*. Están en nuestro currículo, pero su estudio me parece claramente prescindible. Por supuesto que es importante entender la fracción $\frac{9}{4}$ como $2+\frac{1}{4}$, pero ahorrarse el signo “+” y escribirlo como $2\frac{1}{4}$ tiene más inconvenientes que ventajas. En el mundo anglosajón el estudio de los números mixtos sigue estando presente, ya que se usan en la vida cotidiana por el sistema de medidas imperial, pero en nuestro entorno ha desaparecido. Esta será la última mención a los números mixtos (en el sentido de escribirlos sin el signo “+” entre la parte entera y la fraccionaria) en este texto.

Igual que en situaciones parecidas, no debemos apresurarnos a presentar en el aula de Primaria el procedimiento general para escribir cualquier fracción impropia como una parte entera y una parte fraccionaria (que será una fracción propia). De hecho, no está claro que sea necesario hacerlo, ya que no es fácil encontrar una justificación para el uso de una fracción como, por ejemplo, $\frac{53}{4}$. Está claro que en este caso la representación en la recta numérica será un procedimiento tedioso, pero la expresión (3.1) nos da la pista de cómo proceder: tenemos que hacer grupos de 4, pues cada grupo de 4 será una unidad. Por tanto, la división $53 = 13\times 4+1$ nos dice que

$$\frac{53}{4} = 13 + \frac{1}{4}.$$

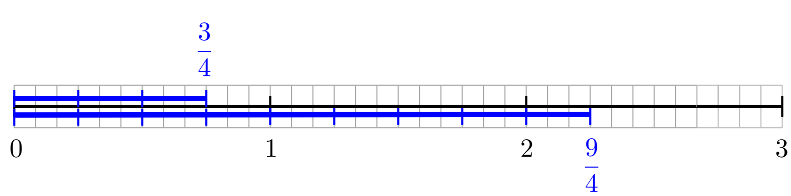


Figura 3.8: Fracciones propias e impropias en la recta numérica.

3.2. Suma (y resta) de fracciones

La suma de fracciones con el mismo denominador es una operación que debería resultar sencilla si se ha trabajado bien el significado de fracción. Naturalmente, la suma de fracciones se debe introducir con el apoyo visual o de materiales adecuado. En la figura 3.9.a vemos la representación gráfica de "si coloreamos de verde 1/8 del total y coloreamos de azul 3/8 del total, ¿qué fracción del total hemos coloreado?".

$$\frac{1}{8}+\frac{3}{8}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2} \qquad \frac{5}{8}-\frac{3}{8}=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$$

a) b)

Figura 3.9: Suma y resta de fracciones con el mismo denominador.

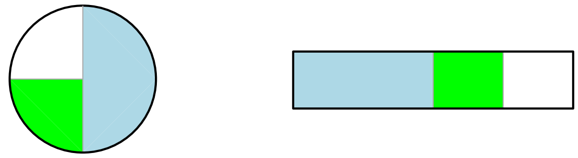
La resta de dos fracciones con el mismo denominador se debe tratar en paralelo, igual que se hizo en su momento la suma y la resta de números naturales. En la figura 3.9.b hemos representado una situación como esta: "Luis ve en la mesa 5/8 de tarta y se come 3/8 de tarta, ¿cuánta tarda queda?".

Una observación importante en este momento es insistir en que, cuando se suman (o se restan) fracciones, hay que prestar atención a que ambas se refieran al mismo total, para evitar errores como el que comentamos en el ejercicio 3.2. Esto es especialmente importante en la resolución de problemas, y en la introducción de la suma, cuando las fracciones se han tratado fundamentalmente como parte de un todo, y ver las fracciones en la recta numérica puede estar todavía no suficientemente trabajado.

3.2.1. Distinto denominador

Estamos ante una de las situaciones en las que me parece especialmente importante hacer al alumno consciente del problema antes de darle la solución. Lo ideal es que el ejemplo sea suficientemente sencillo para que los alumnos puedan darse cuenta del problema que tenemos cuando los denominadores son distintos, con el apoyo visual o de materiales adecuado. Es importante trabajar esta situación con distintas representaciones de las fracciones. En la figura 3.10) aparece la representación de la suma $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$ con el círculo y también con el rectángulo (la "barra"). Como ya hemos trabajado las fracciones equivalentes, la alternativa de expresar 1/2 como 2/4 saldrá de forma natural.

La idea fundamental de la suma de fracciones es que debemos buscar fracciones equivalentes que tengan el mismo denominador. Una forma de que esto quede más claro es que el alumno se centre, al principio, en esa parte del problema. Para conseguir esto, le podemos dar resuelta



$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} =$$

Figura 3.10: Un primer ejemplo de suma con distinto denominador.

la tarea de buscar ese denominador común, como en estos ejemplos, en los que debe encontrar los numeradores:

$$\text{a)}\quad \frac{2}{3} + \frac{1}{6} = \frac{\square}{6} + \frac{1}{6} = \qquad\qquad \text{b)}\quad \frac{3}{10} + \frac{2}{5} = \frac{3}{10} + \frac{\square}{10} =$$

En este momento estamos ya en condiciones de plantear una suma como $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$, ante la que el alumno puede darse cuenta de que el denominador común buscado debe ser un múltiplo de los denominadores. Una forma sencilla de encontrar ese múltiplo común puede ser considerar el producto de los denominadores, como en este ejemplo;

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{6}{24} + \frac{4}{24} = \frac{10}{24} = \frac{5}{12}.$$

Es verdad que, si los números crecen, o si tenemos que sumar más de dos fracciones, este procedimiento puede dar lugar a denominadores grandes, y puede ser recomendable introducir la idea del menor de los denominadores posibles, es decir, el mínimo común múltiplo. Pero creemos que el uso del mínimo común múltiplo para la suma de fracciones no debería incluirse en la etapa de Primaria, pues esto nos permitiría centrarnos en la idea de buscar un denominador común. Para que los números no se hagan demasiado grandes existe otra alternativa, y es proponer ejemplos con denominadores adecuados. En la figura 3.11 podemos ver las sumas de fracciones más complicadas que se tratan en la Educación Primaria en Singapur.[1]

(c) $\frac{1}{2} + \frac{3}{5} =$ (d) $\frac{2}{5} + \frac{3}{4} =$

(e) $\frac{9}{10} + \frac{1}{6} =$ (f) $\frac{3}{10} + \frac{5}{6} =$

Figura 3.11: Sumas de fracciones en 5º de Primaria en Singapur.

Es muy posible que el lector esté pensando que estas sumas de fracciones son "muy sencillas", y seguramente lo son, comparadas que las que se ven en muchas de nuestras aulas, al final de la etapa de Primaria. Me parece un buen ejemplo de cómo en España dedicamos tiempo

[1] La etapa de Educación Primaria en Singapur consta de seis cursos, y los alumnos empiezan a los 6 años.

y esfuerzo a los procedimientos rutinarios más técnicos. En Singapur, en cambio, limitan esos procedimientos y ponen mucho más énfasis en la resolución de problemas. Como ejemplo, terminamos esta sección con el siguiente problema, tomado de la prueba final de Primaria de Singapur. El problema debe resolverse con métodos de Primaria, es decir, sin álgebra.

Ejercicio 3.3. Luis y Nuria hicieron tarjetas durante dos días. El sábado Nuria hizo 19 tarjetas más que Luis. El domingo, Nuria hizo 20 tarjetas, y Luis hizo 15. Al acabar los dos días, comprobamos que Nuria hizo 3/5 del total de las tarjetas. ¿Cuántas tarjetas hizo Luis?

En los siguientes enlaces se puede ver la prueba externa que hemos mencionado completa. Puede ser una buena forma de hacerse una idea más precisa de la diferencia de enfoque.

- `https://masideas-menoscuentas.com/2017/01/29/una-prueba-final-de-primaria-de-singapur/`
- `https://masideas-menoscuentas.com/2017/02/12/prueba-final-de-primaria-de-singapur-ii/`

3.3. Multiplicación de fracciones

Desde el punto de vista procedimental, la multiplicación de fracciones es la operación más sencilla, no hay más que multiplicar los numeradores y los denominadores. De hecho, no es raro ver en nuestras aulas que, para calcular $5 \times \frac{2}{3}$ se escribe $\frac{5}{1} \times \frac{2}{3}$. El problema de este enfoque es que el alumno no entiende qué significa multiplicar dos fracciones y, por tanto, es muy posible que no sepa interpretar la operación de manera adecuada cuando llegue la resolución de problemas.

Veamos un enfoque más gradual, donde consideramos primero los casos en que uno de los factores del producto es un número natural, y con el que se intenta dejar claro que la multiplicación de fracciones es la extensión de la ya conocida multiplicación por números naturales.

En algún momento hay que justificar por qué 4/5 significa también 4 dividido en 5 partes iguales. Hay que ver que eso es lo mismo que dividir la unidad en 5 partes y tomar 4 veces eso, es decir 4 veces 1/5, que al multiplicar vemos que es 4/5

1. En primer lugar, consideremos la expresión $5 \times \frac{2}{3}$, interpretando el producto como “cinco veces dos tercios”, que son, claro “diez tercios”. Estamos ante un caso en el que verbalizar adecuadamente la expresión simbólica es suficiente para darse cuenta de qué estamos haciendo.

2. El siguiente paso es una expresión como $\frac{1}{3} \times 12$. Si ya hemos la multiplicación como “veces”, resulta natural leer aquí “un tercio de doce”. Por tanto, $\frac{1}{3} \times 12 = \frac{12}{3} = 4$. Por supuesto, en este primer ejemplo hemos tenido el cuidado de considerar el 12, divisible entre 3. Vemos que multiplicar por $\frac{1}{3}$ es equivalente a dividir entre 3, esto será útil para dar el siguiente paso.

3. Consideremos una expresión como $\frac{1}{3} \times 5$. Al verbalizarla como “un tercio de cinco”, y después de haber visto el caso anterior, es fácil ver que esta expresión es equivalente a “cinco dividido entre tres”. Como ya sabemos interpretar la fracción como una división, “cinco dividido entre tres son cinco tercios”. Por tanto, $\frac{1}{3} \times 5 = \frac{5}{3}$.

4. En este momento merece la pena detenerse un momento para darnos cuenta de que hemos visto que “multiplicar por $1/n$ es equivalente a dividir por n”. Este hecho, que conecta la multiplicación y la división, será importante en el futuro. También es buen momento para ver que vamos por buen camino y que la multiplicación sigue teniendo la propiedad conmutativa: $\frac{1}{3} \times 5 = 5 \times \frac{1}{3}$, es decir, “un tercio de cinco es lo mismo que cinco veces un tercio”.

5. Ahora que ya sabemos cómo interpretar $\frac{1}{3} \times 5$ (“un tercio de cinco”) y cómo calcularlo, resulta sencillo dar el paso a $\frac{2}{3} \times 5$ (“dos tercios de cinco”), que será “dos veces un tercio de cinco”, es decir, $2 \times \frac{5}{3} = \frac{10}{3}$.

   El cálculo de “dos tercios de cinco” se conoce como “fracción de una cantidad”. En muchos libros de texto, la instrucción para calcular $\frac{2}{3} \times 5$ es “se multiplica por 2 y se divide entre 3”. Como ya hemos comentado en algunas ocasiones, la forma de verbalizar un procedimiento matemático es importante, porque puede ayudar a la comprensión o, como en este caso, hacerla más difícil. La intención de multiplicar antes que dividir es clara, eliminar la “dificultad” de dividir 5 entre 3. Pero resulta en un procedimiento cuyo significado es “la tercera parte del doble de 5”, muy alejado semánticamente del cálculo inicial, “dos tercios de cinco”. Por ello, esta forma de verbalizar el cálculo nos parece poco conveniente. Además, si la cantidad es un múltiplo del denominador, también desde un punto de vista puramente operativo resulta ventajoso hacer primero la división.

6. Finalmente, ya estamos en condiciones de ver el caso general, multiplicando dos fracciones. El modelo de área será la mejor forma de comprobar cómo la multiplicación de fracciones generaliza la multiplicación de dos números naturales. En el modelo de área, la multiplicación 5×4 se interpreta como el área (o los cuadrados unitarios), de un rectángulo de base 5 y altura 4 (formado por 5 filas de 4 cuadrados). Si ahora tenemos un rectángulo R de base $3/4$ y altura $2/5$, como el que se muestra en la figura 3.12, ¿cuál será su área? Dividiendo el cuadrado unidad en cuatro partes iguales con rectas verticales (para tomar la base $3/4$) y en cinco partes iguales con rectas horizontales (para tomar la altura $2/5$), vemos que el cuadrado ha quedado dividido en 4×5 rectángulos iguales, y que 3×2 de ellos corresponden al rectángulo R. Por tanto, el área del rectángulo de base $\frac{3}{4}$ y altura $\frac{2}{5}$, que como vemos es $\frac{6}{20}$ debe ser el producto de las fracciones $\frac{3}{4}$ y $\frac{2}{5}$, es decir,

$$\frac{3}{4} \times \frac{2}{5} = \frac{3 \times 2}{4 \times 5} = \frac{6}{20}.$$

7. Además de la interpretación del producto de fracciones dada en el punto anterior, es también fundamental enteder que el producto de fracciones corresponde también al cálculo de la fracción de otra fracción, como “$2/5$ de $3/4$”. Para ello, tomamos $3/4$ del cuadrado unidad, como hemos representado en la figura 3.13.a), donde los $3/4$ están coloreados. A continuación, dividimos la región en cinco partes iguales y tomamos dos de ellas (las rayadas en la figura 3.13.b). Por tanto, “$2/5$ de $3/4$” será igual a $\frac{2}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{6}{20}$.

   Por último, es también recomendable comprobar que $3/4$ de $2/5$ es lo mismo que $2/5$ de $3/4$, razonando directamente, es decir, sin necesidad de recurrir a la multiplicación de fracciones, que ya sabemos que es conmutativa. Para ello, lo único que hay que hacer

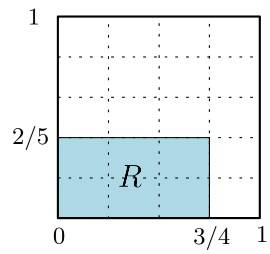


Figura 3.12: Multiplicación de fracciones: modelo de área.

es un dibujo análogo al de la figura 3.13. Si tomamos la precaución de hacer la primera división, la correspondiente a 2/5, con rectas horizontales, entonces la representación de los 3/4 de 2/5 que obtenemos será exactamente igual que la anterior.

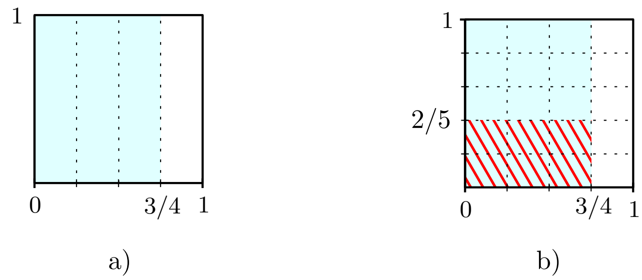


Figura 3.13: Fracción de una fracción.

3.4. División de fracciones

Para la división de fracciones vamos a seguir la misma idea que con la multiplicación, presentando los diferentes casos según su complejidad.

1. El caso más sencillo es cuando el divisor es un número natural, y además el numerador de la fracción es un múltiplo del divisor, como en este problema:

   > Dos amigos se reparten (por igual) 4/5 de una tarta. ¿Cuánta tarta come cada amigo?

   Sin más que verbalizar este cálculo de manera adecuada: "cuatro quintos dividido entre dos", la solución es evidente, "dos quintos", es decir, $\frac{4}{5} : 2 = \frac{2}{5}$. Obsérvese que esta forma de calcular es mucho más fácil de entender que si usamos un procedimiento general para dividir fracciones, sea cual sea, y esto siempre tiene sus ventajas en la resolución de problemas.

2. ¿Qué ocurre ahora si son tres amigos, en lugar de dos? La cuenta que tenemos que hacer es "cuatro quintos dividido entre tres", es decir, $\frac{4}{5} : 3$. Las fracciones equivalentes vienen

de nuevo en nuestra ayuda: 4 no es múltiplo de 3, pero siempre podemos expresar una fracción de manera que el numerador sea múltiplo de 3, en este caso, o de cualquier otro número. Por tanto, podemos hacer lo siguiente:

$$\frac{4}{5} : 3 = \frac{12}{15} : 3 = \frac{4}{15}.$$

En este cálculo nos hemos topado con una propiedad que será útil en etapas posteriores, por ejemplo en el manejo de fracciones algebraicas: dividir el numerador de una fracción es equivalente a multiplicar su denominador.

3. En el siguiente paso, ya consideramos una fracción en el divisor, pero de la forma $1/n$, como en estos ejemplos:

   a) Un grupo de amigos compra dos pizzas y cada uno se come $1/3$ de pizza. ¿Cuántos amigos eran en el grupo?

   b) ¿Cuántas botellas de $1/4$ de litro podemos rellenar con una garrafa de 3 litros de agua?

   Cuando el divisor es una fracción el sentido de la división no puede ser el de reparto (no se puede "repartir entre $1/3$"), sino el sentido de "agrupar", de "cuántas veces cabe el divisor en el dividendo". En la figura 3.14 tenemos representaciones para las dos preguntas anteriores.

   a) Como cada pizza tiene tres tercios, en dos pizzas habrá 6 tercios:

   $$2 : \frac{1}{3} = 2 \times 3 = 6.$$

   b) Como con 1 litro de agua podemos rellenar 4 botellas, con 3 litros de agua podremos rellenar 12 botellas:

   $$3 : \frac{1}{4} = 3 \times 4 = 12.$$

   En este proceso estamos descrubriendo que *dividir entre* $1/n$ *es equivalente a multiplicar por* n, una propiedad importante en el manejo de expresiones matemáticas.

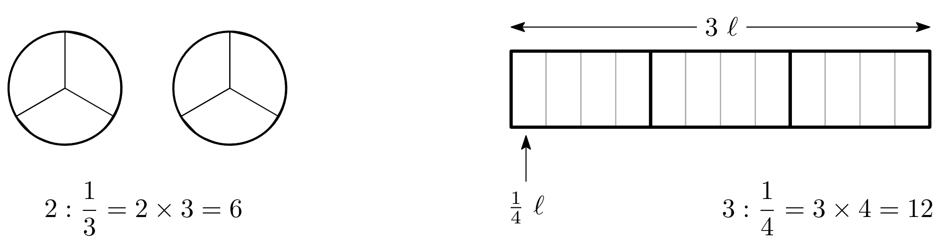


Figura 3.14: Dividir entre $1/n$.

4. Nos planteamos ahora una división como $5 : \frac{2}{3}$, por ejemplo, con la pregunta: si tenemos 5 litros de agua, ¿cuántas botellas de 2/3 de litro podemos rellenar? En la figura 3.15.a hemos resuelto el problema gráficamente, contando 2/3 para cada botella. Vemos que se llenan 7 botellas completas y, con el tercio de litro que nos sobra, podemos rellenar media botella adicional. Por tanto, con 5 litros de agua llenamos 7 botellas y media.

   Para ver cómo podemos hacer el cálculo en general, podemos considerar el caso en que tenemos 1 litro de agua, representado en la figura 3.15.b. En este caso podemos rellenar 1 botella y media. En notación simbólica: $1 : \frac{2}{3} = \frac{3}{2}$. Animamos al lector a que compruebe, con un dibujo, que $1 : \frac{3}{4} = \frac{4}{3}$ y que $1 : \frac{2}{5} = \frac{5}{2}$. Esta propiedad es cierta en general: $1 : \frac{a}{b} = \frac{b}{a}$ para cualesquiera números naturales a y b.

   Ya podemos terminar el cálculo de las botellas que llenamos con 5 litros: si con 1 litro llenamos 3/2 botellas (es decir, una botella y media), con 5 litros llenaremos 5 veces 3/2, es decir,

$$5 : \frac{2}{3} = 5 \times \frac{3}{2} = \frac{15}{2} = 7 + \frac{1}{2}.$$

   Que el dividendo sea un número natural no juega ningún papel en este razonamiento, si hubiéramos tenido 5 litros y medio, la cuenta sería[2]

$$\frac{11}{2} : \frac{2}{3} = \frac{11}{2} \times \frac{3}{2} = \frac{33}{4} = 8 + \frac{1}{4}.$$

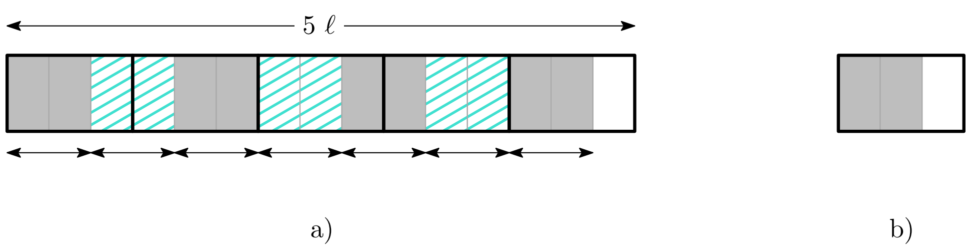


Figura 3.15: Dividir entre una fracción, caso general.

Hemos deducido el siguiente procedimiento general para dividir entre una fracción: dividir entre $\frac{a}{b}$ es equivalente a multiplicar por $\frac{b}{a}$, es decir, la fracción “dada la vuelta”, que se llama *fracción inversa*. Por supuesto, este procedimiento es equivalente al tradicional en España, de “multiplicar en cruz”. Sin embargo, nos parece más conveniente, ya que se puede entender su funcionamiento. Además, incluso si no se entiende, la receta memorística “invierte y multiplica”, funciona mejor que la multiplicación en cruz, ya que evita el error de intercambiar numerador y denominador en el resultado.

Un último comentario sobre la relación entre la división de fracciones y la división con resto

[2]Esperamos que el lector ya entienda sin problemas la fracción 11/2 como 5 y medio.

estudiada en el tema anterior. Comparemos estas dos expresiones:

$$5 : \frac{2}{3} = 7 + \frac{1}{2} \qquad (1)$$

$$5 = 7 \times \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \qquad (2)$$

La primera nos dice que, con 5 l de agua podemos rellenar 7 botellas y media de 2/3 de litro. La segunda, nos dice que con 5 litros rellenamos 7 botellas de 2/3 de litro y nos sobra 1/3 *de litro* (con ese tercio que sobra, llenamos media botella, y recuperamos la solución de (1)).

3.4.1. Reducción a común denominador

Reducir a común denominador también puede ser una buena estrategia para entender la división de fracciones. Comparemos estas dos preguntas:

a) ¿Cuántas veces cabe 2/3 en 5?, o ¿cuántos 2/3 hay en 5?

b) ¿Cuántas veces cabe 2/3 en 15/3?, o ¿cuántos 2/3 hay en 15/3?

Terminamos con un ejemplo de este procedimiento para dividir fracciones, animamos al lector a que lo interprete haciendo un dibujo:

$$\frac{4}{3} : \frac{1}{2} = \frac{8}{6} : \frac{3}{6} = \frac{8}{3} = 2 + \frac{2}{3}.$$

3.4.2. Una última visita a las fracciones equivalentes

Una vez vista la división de fracciones ya estamos en condiciones de entender el criterio más común para determinar si dos fracciones son equivalentes, el de “multiplicar en cruz”. La “receta” dice que las fracciones a/b y c/d son equivalentes si $a \times d = b \times c$. ¿Por qué? Que dos fracciones son equivalentes quiere decir que representan la misma cantidad. En ese caso, al dividir una entre la otra (no importa el orden) el resultado debe ser 1. Por tanto,

$$1 = \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{a \times d}{b \times c} \qquad \rightarrow \qquad a \times d = b \times c.$$

Este criterio es el más eficiente desde el punto de vista de que reduce el problema a un sencillo cálculo, y es el más recomendable cuando las fracciones son “complicadas”. Sin embargo, para que el alumno de primaria entienda en profundidad el significado de fracciones equivalentes creemos recomendable limitarse a trabajar con fracciones que se puedan estudiar con métodos que sean más “transparentes”, en los que se vea mejor el significado del concepto de fracciones equivalentes.

3.5. Dos resultados sobre números racionales

Terminamos el estudio de las fracciones con dos resultados teóricos. El conjunto de números racionales, que en matemáticas se denota por $\mathbb{Q}$, (la letra "Q" viene de "quotient") es el conjunto de números que se pueden obtener como cociente de otros números "más sencillos", es decir, el conjunto de los números que se pueden expresar en forma de fracción.

Una propiedad fundamental que distingue a los números racionales de los naturales es que no existe el *siguiente* de un número racional. De forma más precisa, en $\mathbb{Q}$ podemos considerar la relación de orden $<$ análoga a la de los números naturales: $a < b$ si $b - a > 0$. En la recta numérica, a es menor que b si a está a la izquierda de b. Cualquier número natural n tiene su *siguiente* (que es el menor de todos los números naturales mayores que n). El siguiente de 3 es 4 y, en general, el siguiente de n es $n + 1$. Esta propiedad, muy intuitiva, es de hecho fundamental en los números naturales, y junto con la existencia del *primer elemento* (el 1), son las propiedades más importantes de la lista que caracteriza al conjunto de los números naturales cuando se estudian de forma axiomática, y que se conocen como *axiomas de Peano*. Pues bien, si nos preguntamos por el número racional siguiente a $1/2$, nos daremos cuenta de que no existe; de hecho, entre dos números racionales, por parecidos que sean, siempre podremos encontrar otro número racional (de hecho, podremos encontrar infinitos números racionales).

Supongamos que nos piden encontrar un número racional que esté entre $\frac{12}{17}$ y $\frac{13}{18}$. Podríamos expresarlas con un denominador común, y encontrar una fracción entre ellas dos de esa forma, pero también se puede recurrir a la *media aritmética*. Si a y b son dos números cualesquiera, $\frac{1}{2}(a + b)$ es un número que está entre ellos. Por tanto,

$$\frac{1}{2}\left(\frac{12}{17} + \frac{13}{18}\right) = \frac{437}{612}$$

es una fracción mayor que $\frac{12}{17}$ y menor que $\frac{13}{17}$.

Claramente, este procedimiento se podría repetir indefinidamente (buscando en el siguiente paso una fracción entre a y la media aritmética calculada, y entre ésta y b, y así sucesivamente), para obtener no solo uno, sino infinitos números racionales entre los dos dados.

Esta propiedad, en la recta numérica, nos dice que entre dos puntos de la recta, por cercanos que estén, hay infinitos números racionales. Vistas así las cosas, es natural pensar que todos los números van a ser racionales. Sin embargo, esto no es cierto, y el siguiente resultado nos dice que hay números "sencillos" que no son racionales.

Teorema 3.1. $\sqrt{2}$ no es un número racional.

Demostración. La idea de la demostración es la siguiente: vamos a empezar suponiendo algo, y a razonar a partir de esta suposición. Si de esta forma conseguimos deducir algo que es imposible, o contradictorio, habremos demostrado que la suposición del principio es falsa. Esta técnica de demostración matemática se conoce como *reducción al absurdo*. Para intentar que el razonamiento quede más claro vamos a separarlo en diferentes pasos.

1. Empezamos suponiendo que $\sqrt{2}$ *sí* es un número racional, y que, por tanto, podemos escribirlo como una fracción. Un detalle que será importante: la expresión en forma de

fracción la hacemos irreducible. Por tanto, tenemos

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \quad \text{(con } \frac{p}{q} \text{ irreducible).} \tag{3.2}$$

2. Elevando al cuadrado la igualdad (3.2), obtenemos que $p^2 = 2q^2$, de donde se deduce que p^2 es un *número par*.

3. Como p^2, sabemos que p también es par (porque si p fuera impar, p^2 sería también impar). Como p es par, es el doble de otro número natural, es decir, sabemos que $p = 2k$ para algún número natural k.

4. Escribiendo que $p = 2k$ en la igualdad $p^2 = 2q^2$ se obtiene

$$(2k)^2 = 2q^2 \quad \rightarrow \quad 4k^2 = 2q^2 \quad \rightarrow \quad q^2 = 2k^2$$

5. De la última igualdad de la línea anterior se deduce que q^2 es par, e igual que antes, esto obliga a que q sea también un número par.

6. Y hemos terminado, porque hemos llegado a una contradicción: habíamos supuesto que la fracción era irreducible, y hemos visto que p y q son números pares. Lo que nos dice esto es la suposición inicial es falsa, es decir, que $\sqrt{2}$ no se puede expresar como una fracción.

El resumen en dos líneas de la demostración es el siguiente:
si $\sqrt{2}$ fuera un número racional, lo podríamos escribir como una fracción irreducible $\frac{p}{q}$. Pero con un poco de álgebra, se deduce que si la relación $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ fuera cierta entonces tanto p como q serían números pares.

□

Los filósofos de la Grecia clásica (en concreto, la escuela Pitagórica) ya se dio cuenta de este resultado fundamental, y de hecho su descubrimiento causó una crisis en sus líneas de pensamiento. El lector estará pensando en la conexión del resultado con el Teorema de Pitágoras, y es cierto que la longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo es un ejemplo evidente de estos números, pero hay una forma de introducir estos números ya en Primaria, en conexión con el estudio de la raíz cuadrada.

En la figura 3.16 se muestra una cuadrícula. Si se define la unidad de manera que el área de cada uno de los cuadrados de la malla sea 1, ¿cuál es el área del cuadrado girado? En efecto, el cuadrado mayor tiene área 2. Pero entonces, como el área de un cuadrado es el lado al cuadrado, el lado del cuadrado es ... ¡$\sqrt{2}$!

3.6. Los números decimales

El estudio de los números decimales se empieza, de manera informal, en conexión con los euros y los céntimos. Pero es importante tener claro que la comprensión en profundidad de los

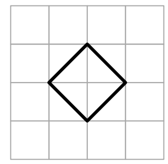


Figura 3.16: Un cuadrado de lado $\sqrt{2}$.

números decimales solo se puede conseguir si se apoya de manera adecuada en los conceptos correspondiente de las fracciones.

Una *décima* se obtiene al dividir la unidad en diez partes iguales, y una *centésima* al dividir la unidad en cien partes iguales (o, lo que es lo mismo, una décima en diez partes iguales). Los bloques de base 10 que se usan para introducir la notación posicional son una buena herramienta para trabajar estas ideas. Como se muestra en la figura f:dec-cent, podemos trabajar con la barra de 10 como la unidad, en cuyo caso los cubos unitarios serían décimas, o con la placa de 100 como unidad, en cuyo caso las barras de 10 serían las décimas y los cubos unitarios las centésimas. De manera análoga, se obtienen las milésimas, diezmilésimas, etc.

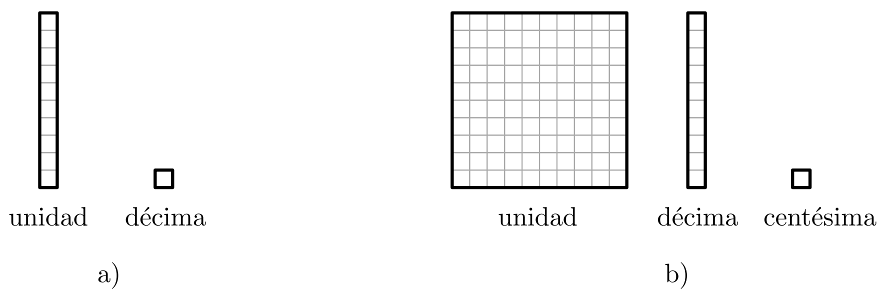


Figura 3.17: Décimas y centésimas.

La conocida notación de número decimal es una forma compacta de escribir la expresión con fracciones de denominadores 10, 100, etc. Por ejemplo,

$$2{,}45 = 2 + \frac{4}{10} + \frac{5}{100}. \tag{3.3}$$

Esta expresión es una generalización de la expresión de la parte entera como grupos de potencias de 10 a potencias de 10 con exponente negativo. Si recordamos que $10^{-1} = \frac{1}{10}$, $10^{-2} = \frac{1}{10^2}$, etc, entonces tenemos, la siguiente descomposición:

$$825{,}764 = 8 \times 10^2 + 2 \times 10^1 + 5 \times 10^0 + 7 \times 10^{-1} + 6 \times 10^{-2} + 4 \times 10^{-3}.$$

Una de las mejores herramientas para entender los decimales, y para situarlos en el contexto del resto de los números, es de nuevo la recta numérica. En la figura 3.18 representamos cómo los intervalos unitarios se dividen en 10 partes iguales, cada una de ellas una décima, y cómo luego cada uno de estos intervalos se puede dividir, a su vez, en 10 partes iguales, que serán las centésimas. Este proceso se puede interar indefinidamente.

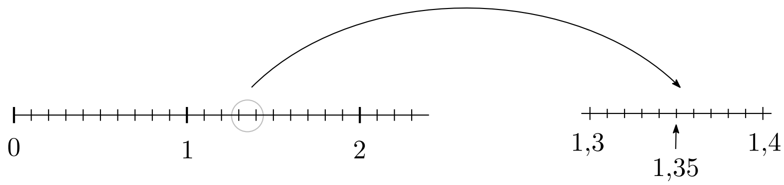


Figura 3.18: Decimales en la recta numérica.

3.6.1. Expresión decimal de fracciones

Un número decimal es una notación abreviada de una suma de fracciones cuyos denominadores son potencias de 10, como se muestra en la expresión (3.3). También podemos escribir $2{,}45 = \frac{245}{100}$, es decir, 2 unidades, 4 décimas y 5 centésimas son 245 centésimas. En general, cualquier número decimal (finito) se puede escribir como una fracción cuyo denominador es una potencia de 10. En el caso del número 2,45, una manera de verlo es decir que podemos multiplicar y dividir por 100. En el caso general, habría que multiplicar y dividir por la potencia de 10 correspondiente a la cantidad de cifras decimales del número que queremos escribir como fracción.

El algoritmo tradicional de la división nos permite obtener la expresión decimal de una fracción dada. ¿Conocemos en detalle el significado concreto de cada etapa de esa división? Vamos a analizar en detalle este procedimiento y el significado de cada etapa, hasta que obtenemos la expresión decimal finita $\frac{3}{8} = 0{,}375$.

1. Como 3 entre 8 tocan a 0, sobran 3 unidades.

   "Bajamos un cero", es decir, consideramos ahora 30 décimas, que divididas entre 8 nos dan 3 décimas. 3 décimas por 8 son 24 décimas, y 30 menos 24 son 6. Por tanto, nos sobran 6 décimas.

   $$\begin{array}{r|l} 3 & 8 \\ \cline{2-2} -\,0 & 0.3 \\ \cline{1-1} 3\,0 & \\ -\,2\,4 & \\ \cline{1-1} 6 & \end{array}$$

   En este momento tenemos estas dos expresiones equivalentes:

   $$3 = 0{,}3 \times 8 + 0{,}6 \qquad \rightarrow \qquad \frac{3}{8} = 0{,}3 + \frac{0{,}6}{8}$$

2. En el siguiente paso "bajamos un cero", es decir, las 6 décimas las vemos como 60 centésimas. Al dividirlas entre 8, tocan a 7, $7 \times 8 = 56$ centésimas, y al restarlas de 60 obtenemos un resto de 4 centésimas.

   $$\begin{array}{r|l} 3 & 8 \\ \cline{2-2} -\,0 & 0.3\,7 \\ \cline{1-1} 3\,0 & \\ -\,2\,4 & \\ \cline{1-1} 6\,0 & \\ -\,5\,6 & \\ \cline{1-1} 4 & \end{array}$$

   En este momento tenemos estas dos expresiones equivalentes:

   $$3 = 0{,}37 \times 8 + 0{,}04 \qquad \rightarrow \qquad \frac{3}{8} = 0{,}37 + \frac{0{,}04}{8}$$

3. Por último, de nuevo “bajamos un cero”, es decir, las 4 centésimas las vemos como 40 milésimas. Al dividirlas entre 8, tocan a 5 milésimas, $5 \times 8 = 40$, de forma que obtenemos resto 0 y hemos terminado la división.

   Obtenemos estas dos expresiones equivalentes:

$$3 = 0{,}375 \times 8 \qquad \to \qquad \frac{3}{8} = 0{,}375$$

$$\begin{array}{rrrr|l}
3 & & & & 8 \\ \cline{5-5}
-\,0 & & & & 0.3\;7\;5 \\ \cline{1-1}
3 & 0 & & & \\
-\,2 & 4 & & & \\ \cline{1-2}
 & 6 & 0 & & \\
 & -\,5 & 6 & & \\ \cline{2-3}
 & & 4 & 0 & \\
 & & -\,4 & 0 & \\ \cline{3-4}
 & & & 0 &
\end{array}$$

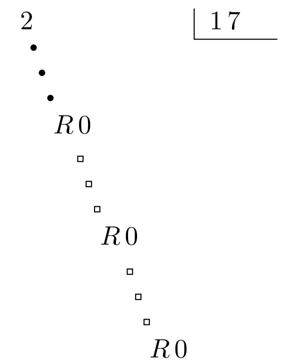
Como sabemos, hay situaciones en las que el resto nunca es 0, y por tanto la división se puede prolongar de manera indefinida. El caso más sencillo es la fracción 1/3, para la que se obtiene la expresión $\frac{1}{3} = 0{,}333\cdots$. Los puntos suspensivos significan que tenemos *infinitos* treses, y esta expresión es seguramente el primer momento en que aparece (de forma implícita) la idea de límite en la enseñanza de las matemáticas. No podemos entrar en detalles del significado preciso, y nos conformaremos con la idea intuitiva: el número decimal $0{,}333\cdots3$ (con una cantidad finita de cifras), se parece mucho a la fracción 1/3, y se parece más cuantos más decimales consideremos. De hecho, la diferencia la podemos hacer tan pequeña como queramos, a base de considerar más decimales. En ese sentido, se dice que si ponemos “infinitos decimales”, la expresión *es igual* a 1/3. Estos decimales, en los que se repite la parte decimal, se llaman decimales *periódicos*, y se usa la notación $0,\overset{\frown}{3}$ para expresar que el número 3 se repite indefinidamente. Así, por ejemplo, escribimos $1{,}\widehat{276}$ para representar al número $1{,}276276276\cdots$. Las cifras “276”, que se repiten indefinidamente, son el *periodo* del número decimal. Si antes del periodo hay una parte decimal que no se repite, como en el número $3{,}4\widehat{67} = 3{,}4676767\cdots$, decimos que el número decimal es *periódico mixto* (la parte decimal que no se repite se llama *anteperiodo*).

Vamos a ocuparnos ahora de determinar de forma precisa la relación entre las fracciones y los números decimales. En concreto, que las fracciones se corresponden con los números decimales finitos o periódicos, es decir, que la expresión decimal de una fracción es siempre finita o periódica y que cualquier decimal finito o periódico se puede expresar en forma de fracción. Este es el primer paso:

Proposición 3.1. La expresión decimal de cualquier fracción es o bien un número decimal finito, o bien un número decimal periódico.

Demostración. No vamos a ver una demostración completa de este resultado, sino un ejemplo que es suficiente para transmitir la idea de por qué el resultado es cierto. Supongamos que tenemos la fracción a/b y que queremos encontrar su expresión como número decimal. Si al hacer la división $a : b$ obtenemos en algún momento un resto igual a 0, la expresión decimal que obtenemos es finita, igual que con la fracción 3/8 del ejemplo anterior.

Supongamos que tenemos una fracción como $\frac{2}{17}$, y que repetimos los pasos de la división sin obtener nunca un 0. Lo que debe ocurrir es que en algún momento se repita el resto. ¿Por qué? Pues porque si dividimos entre 17 hay un total de 16 restos posibles, y cuando hemos calculado 17 restos ya debe haber, seguro, alguno repetido. ¿Qué ocurre entonces? En la figura tenemos el esquema de la división: si el resto que se repite es R, como "bajamos un 0" en los dos casos, al volver a salir resto R se vuelve a repetir la misma secuencia en la división, ya indefinidamente. En el esquema de la derecha, los puntos anteriores a la primera aparición de R corresponden al anteperiodo, los cuadrados que ya se repiten, corresponden a los pasos de la división donde se obtienen los decimales del periodo.



Obsérvese que no solo hemos demostrado que la expresión es periódica, sino que la longitud perido es como mucho, el denominador de la fracción, menos uno. En el caso del ejemplo, la repetición ocurre, como tarde, al haber hecho 17 pasos de la división. Por tanto, el periodo es de longitud, como mucho, 16. Y puede ser así de largo, como en este ejemplo. En concreto,

$$\frac{2}{17} = 0{,}\overline{1176470588235294}.$$

(El arco que denota el periodo se muestra como una línea por razones tipográficas). □

La expresión decimal de la fraccion 2/17 es periódica pura, el periodo empieza en la primera cifra decimal. Esto quiere decir que el resto que se repite es el primero que se obtiene. Además, como el periodo es de longitud 16, antes de la repetición se obtienen los 16 restos posibles (del 1 al 16). Este es el desarrollo completo de la división (escrito sin las restas, para abreviar), donde podemos apreciar de manera explícita estas observaciones:

$$\begin{array}{l|l}
2 & 17 \\ \cline{2-2}
20 & 0.1176470588235294 \\
\;\;30 & \\
\;\;130 & \\
\;\;\;\;110 & \\
\;\;\;\;\;\;\;\;80 & \\
\;\;\;\;\;\;\;\;120 & \\
\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;100 & \\
\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;150 & \\
\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;140 & \\
\;40 & \\
\;60 & \\
\;90 & \\
\;50 & \\
\;160 & \\
\;70 & \\
\;2 &
\end{array}$$

3.6.2. Fracciones decimales

¿Podríamos saber si la expresión como número decimal de una fracción es finita o periódica, sin necesidad de hacer una división como la anterior? La respuesta es que sí, y este es el siguiente punto en el que vamos a detenernos.

Observemos primero que decir que una fracción se puede expresar como un número decimal finito es lo mismo que decir que la fracción es equivalente a otra cuyo denominador es una potencia de 10. Por ejemplo, como $\frac{3}{8} = 0{,}375$, sabemos que $\frac{3}{8} = \frac{375}{1000}$. A estas fracciones se las conoce como *fracciones decimales*, de manera que lo que nos estamos preguntando es cómo podemos determinar si una fracción es decimal, sin necesidad de hacer la división.

Llegados a este punto, la siguiente observación es inmediata: si el denominador de la fracción es un divisor de una potencia de 10, entonces la fracción es decimal. En efecto, si dada la fracción a/b sabemos que b es un divisor de 10^k, sabemos que $10^k = b \times q$ y entonces

$$\frac{a}{b} = \frac{a \times q}{b \times q} = \frac{a \times q}{10^k}.$$

En el ejemplo anterior, de $3/8$, como $1000 = 8 \times 125$, esto quedaría

$$\frac{3}{8} = \frac{3 \times 125}{8 \times 125} = \frac{375}{1000}.$$

Sin embargo, es posible que el denominador de una fracción no sea divisor de una potencia de 10 y, sin embargo, que la fracción sea decimal. Consideremos por ejemplo la fracción $21/56$. Su denominador, 56, no es divisor de ninguna potencia de 10 (en un momento estudiaremos esto con más detalle). Sin embargo, la fracción $21/56$ es decimal. ¿Por qué? Pues porque $21/56$ es equivalente a $3/8$, que ya sabemos que es una fracción decimal. En resumen, si estamos estudiando si la fracción a/b es decimal, no nos debe preocupar su denominador, b, sino el denominador de la fracción irreducible equivalente a a/b.

El último ingrediente que nos falta es cómo estudiar si un número es divisor de una potencia de 10. Para ello, recordemos que ya sabemos que los divisores de un número n se obtienen combinando los diversos factores de la descomposición en factores primos de n. ¿Cómo se factoriza una potencia de 10? Claramente, $10^k = (2 \times 5)^k = 2^k \times 5^k$. Por tanto, un número será un divisor de una potencia de 10 si sus factores primos son solo doses y/o[3] cincos.

En resumen, si queremos averiguar si una fracción es decimal el procedimiento se reduce a lo siguiente:

1. Encontramos la fracción irreducible equivalente a la que nos dan (es decir, simplificamos la fracción).

2. Factorizamos el denominador de la fracción irreducible. Si los factores del denominador son solo doses y/o cincos, la fracción es decimal.

[3]Este y/o pretende aclarar que los factores pueden ser solo doses, solo cincos, o una mezcla de ambos.

3.6.3. Fracción generatriz

En la sección anterior hemos visto que la expresión en forma de número decimal de cualquier fracción es, o bien un número decimal finito, o bien un número decimal periódico (puro o mixto). En esta sección vamos a ver que todos los números decimales de estos tipos se pueden expresar en forma de fracción. Esto lo haremos encontrando la fracción de la que provienen, que se llama *fracción generatriz* del número decimal.

En el caso de un número decimal finito, la idea es muy sencilla, ya hemos visto algún ejemplo, y se puede resumir como "multiplicar y dividir por la potencia de 10 adecuada". Por ejemplo,

$$1{,}276 = \frac{1{,}276 \times 1000}{1000} = \frac{1276}{1000}.$$

Veamos ahora cómo proceder con un decimal periódico puro. Lo haremos con un ejemplo, pero quedará claro que el procedimiento es general. Consideremos el número $1{,}\widehat{69} = 1{,}696969\cdots$. Al ser el número decimal periódico, al mover la coma dos posiciones a la derecha obtenemos otro número con exactamente la misma parte decimal. Este es el detalle clave, obsérvese que esto solo es posible por ser el número periódico puro. Mover la coma dos posiciones a la derecha corresponde a multiplicar por 100. Por tanto, si llamamos $x = 1{,}696969\cdots$, tenemos $100x = 169{,}696969\cdots$ y al restar estas dos igualdades la parte decimal desaparece. En resumen,

$$\left.\begin{array}{rcr} 100x & = & 169{,}696969\cdots \\ x & = & 1{,}696969\cdots \end{array}\right\} \quad \to \quad 99x = 168 \quad \to \quad x = \frac{168}{99} = \frac{56}{33}.$$

Si analizamos este procedimiento en general, la fracción $\frac{168}{99}$ se puede describir en términos de esta "receta", que se suele memorizar en secundaria: "para el numerador, tomamos la parte entera y un periodo, y le restamos la parte entera. En el denominador, ponemos tantos nueves como cifras tenga el periodo". Por supuesto, no nos interesa la receta, sino entender el procedimiento.

¿Y qué ocurre con los números decimales periódicos mixtos? Consideremos el número $x = 1{,}7\widehat{69} = 1{,}7696969\cdots$. Lo que vamos a hacer es algo frecuente en matemáticas: como ya sabemos tratar los decimales periódicos puros, pues convirtamos el número dado en un decimal periódico puro moviendo la coma una posición a la derecha, es decir, multiplicando por 10. De esta forma, obtenemos el número $10x = 17{,}696969\cdots$. A partir de aquí, podemos ya proceder como en el caso anterior:

$$\left.\begin{array}{rcr} 1000x & = & 1769{,}696969\cdots \\ 10x & = & 17{,}696969\cdots \end{array}\right\} \quad \to \quad 990x = 1752 \quad \to \quad x = \frac{1752}{990} = \frac{292}{165}.$$

Obsérvese que el paso intermedio es imprescindible. El número original no tiene la misma parte decimal que $1000x$, y por tanto al calcular $1000x - x$ no desaparece la parte decimal.

Resumiendo, en la Proposición 3.1 demostramos que la expresión como números decimales de las fracciones son siempre números decimales finitos o periódicos. Lo que acabamos de ver es que todos los números decimales finitos o periódicos se pueden escribir como fracciones. Por tanto, estamos hablando de los mismos números: los números racionales (es decir, las fracciones) son exactamente los números decimales finitos o periódicos.

¿Cómo será entonces la expresión decimal del número $\sqrt{2}$? En el Teorema 3.1 demostramos que $\sqrt{2}$ no es un número racional; por tanto, su expresión decimal es *infinita y no periódica.*

3.6.4. Aritmética con números decimales

La suma y la resta de números decimales no deberían presentaar dificultades si tanto la introducción de los números decimales como la suma y la resta de números naturales se han trabajado de manera adecuada. Los reagrupamientos funcional igual: diez centésimas forman una décima, diez décimas forman una unidad, etc. Por supuesto, en el aula de primaria esto se debe tratar con el apoyo de materiales adecuados que representen centésimas, décimas, unidades, y que ya vimos al principio de esta sección.

En cuanto a la división, si el divisor es un número natural el significado del algoritmo de la división es el que ya vimos en detalle en el ejemplo de la sección 3.6.1, y no vamos a insistir en ello. En el caso de que el divisor sea también un número decimal, lo que hacemos es recurrir a la propiedad de que el cociente no cambia si multiplicamos dividendo y divisor por el mismo número (recordemos que el resto si cambia, pero en el contexto de números decimales la divión con resto pierde casi todo su sentido). Por tanto, si queremos calcular por ejemplo $45{,}27 : 2{,}6$ lo que hacemos es calcular $452{,}7 : 26$. Una dificultad que se puede observar en las aulas es que hay alumnos que se sorprenden cuando el cociente es mayor que el dividendo (cuando el divisor es menor que la unidad). Esto es una indicación de que hay alguna dificultad con la comprensión de la división, seguramente que se ha insistido mucho en la división como reparto, pero no en el otro sentido de la división, el de "cuántas veces cabe" el divisor en el dividendo.

Por último, para multiplicar números decimales, la famosa receta dice "los multiplicamos sin los decimales, y luego ponemos en el resultado la suma de las posiciones decimales que tenían los factores". La mejor forma de entender por qué esto es así es recurrir a la relación entre números decimales y fracciones. Supongamos que queremos calcular $2{,}47 \times 1{,}8$. Lo que hacemos se puede representar de esta forma:

$$2{,}47 \times 1{,}8 = \frac{247}{100} \times \frac{18}{10} = \frac{247 \times 18}{1000},$$

es decir, para calcular $2{,}47 \times 1{,}8$ hacemos la multiplicación sin la coma decimal, y luego ponemos en el resultado 3 cifras decimales.

3.6.5. Una observación final

Terminamos el estudio de los números decimales con una última observación, sobre los números periódicos con periodo 9. En concreto, por ejemplo, consideremos el número $0,\overset{\frown}{9} = 0{,}9999\cdots$. Si comparamos este número con el 1, podemos darnos cuenta de que algo raro está ocurriendo. Como vimos anteriormente, entre dos números racionales siempre hay infinitos números racionales. Sin embargo, ¿puede el lector encontrar algún número entre $0,\overset{\frown}{9}$ y 1? No, no es posible encontrar tal número, porque $0,\overset{\frown}{9} = 1$. Obsérvese que no estamos diciendo que nos números sean "muy parecidos"; lo que estamos diciendo es que, cuando consideramos infinitos nueves, la expresión $0{,}9999\cdots$ es *exactamente igual* a 1.

Intuitivamente, es claro que cuantos más nueves consideremos en la expresión $0{,}999\cdots 9$, más se parecerá a 1. Lo que sucede es lo mismo que ya vimos cuando nos encontramos con la igualdad $\frac{1}{3} = 0,\overset{\frown}{3}$: la expresión se puede parecer a 1 todo lo que queramos, a base de tomar cada vez más nueves. En ese sentido, decimos que cuando "hay infinitos nueves", tenemos la igualdad.

Finalmente, veamos otros dos argumentos que pueden servir para convencernos de esta igualdad.

- Si ya hemos aceptado que $\frac{1}{3} = 0,\overset{\frown}{3}$, multiplicando por tres tenemos que $1 = 3 \times \dfrac{1}{3} = 3 \times 0,\overset{\frown}{3} = 0,\overset{\frown}{9}$.
- Si utilizamos el procedimiento anterior para obtener la fracción generatriz del número $x = 0,\overset{\frown}{9}$, tenemos

$$\left.\begin{array}{rcl} 10\,x & = & 9{,}9999\cdots \\ x & = & 0{,}9999\cdots \end{array}\right\} \quad \longrightarrow \quad 9x = 9 \quad \longrightarrow \quad x = \frac{9}{9} = 1.$$

Este comportamiento se da siempre que el periodo es 9, no es exclusivo del número $0,\overset{\frown}{9}$. Así, por ejemplo, se tiene que $0{,}2\overset{\frown}{9} = 0{,}3$.

Capítulo 4

Proporcionalidad y porcentajes

4.1. Razones y proporciones

El tratamiento de la razón y la proporcionalidad es uno de los puntos más problemáticos del estudio de la aritmética en nuestra educación matemática básica. En particular, el concepto de *razón* (numérica) parece haber desaparecido de nuestras aulas, y solo aparece en el estudio de la proporcionalidad, como "razón de proporcionalidad". La situación ha llegado al extremo de que el lenguaje usual se ha desdibujado, y que muchas veces se usa el término "proporción" cuando realmente se está hablando de una razón, o de una fracción. Un ejemplo muy llamativo es cuando se habla del número de alumnos por aula en el sistema educativo, y se habla de la *ratio*: se trata exactamente de una razón, en el sentido que vamos a estudiar en esta sección, en este caso de la relación entre el número de estudiantes y el número aulas en cierta etapa educativa. Comencemos con la definición:

Definición 4.1. Una *razón* (numérica) es una *relación* entre dos cantidades.

Primeros ejemplos:

a) En una bolsa con bolas blancas y negras, la razón de bolas blancas a negras es de 2 a 7.

   Esto quiere decir que por cada 2 bolas blancas que hay en la bolsa, tenemos 7 bolas negras. Por tanto, del total de bolas de la bosa, $2/9$ son blancas y $7/9$ son negras.

b) En cierto examen, la razón entre aprobados y suspensos es de 4 a 3.

   Por cada 4 alumnos aprobados hay 3 suspensos. Por tanto, aprobaron $4/7$ del total de los alumnos, y suspendieron $3/7$ del total.

Una primera dificultad con la que nos encontramos es cómo denotar una razón. Como acabamos de ver en los ejemplos, el concepto de razón está relacionado con el de fracción. Pero hay alguna diferencia importante, que veremos enseguida, y que creo que hace poco aconsejable usar la notación de fracción para escribir una razón. La notación internacional para la razón "dos a tres" es $2:3$, pero nos encontramos con el problema de que en España el signo ":" se usa para denotar la división. Creemos que tendría muchas ventajas adherirnos a la práctica más extendida a nivel internacional, denotar la división con el signo "÷" y reservar el signo ":" para las razones. Mientras lleguemos a ese punto, en estas páginas trataremos de evitar la notación, usando el lenguaje usual o, en todo caso, escribiendo "la razón 2 : 3", para evitar confusiones.

Como acabamos de decir, el concepto de razón está relacionado con el de fracción. Sin embargo, existen al menos dos diferencias importantes:

a) En una fracción, el numerador y el denominador denotan cantidades *homogéneas* (es decir, con las mismas unidades). En una razón muchas veces esto no es así: cuando escribimos que el consumo de un coche es de 5 litros de combustible por cada 100 km, lo que estamos dando es una razón, la relación entre el combustible consumido y la distancia recorrida, es decir, con la notación de razón, podemos escribir el consumo como $5\ell : 100$ km.

b) Una fracción es siempre un número racional (de hecho, esa es la definición de los números racionales, aquellos que se pueden expresar como una fración).

   Si llamamos L a la longitud de una circunferencia y d a su diámetro, cuando consideramos el cociente $\frac{L}{d}$ nos encontramos con uno de los números más importantes en matemáticas, el número π, que *no es un número racional* (aunque la demostración de este hecho es más complicada que para $\sqrt{2}$, y se sale de los límites de este curso). Este es un ejemplo en el que la notación $\frac{L}{d}$ induce a error, y sería preferible escribir $L : d$.

Un argumento de peso para estudiar en profundidad el concepto de razón es que son muchos los conceptos de ciencias y tecnología que son razones numéricas. Por ejemplo, en física, la velocidad de un movimiento uniforme es la razón entre el espacio recorrido y el tiempo empleado, la densidad de una sustancia es la razón entre la masa y el volumen que ocupa, la intensidad de la corriente en un circuito eléctrico es la razón entre la diferencia de potencial y la resistencia y, en general, cualquier magnitud que se calcula como el cociente de otras dos magnitudes. En química, las medidas de concentración son también razones. Si el concepto de razón se trabajara de manera adecuada, los alumnos podrían manera estos conceptos conociendo simplmente su definición, sin necesidad de memorizar el mar de fórmulas entre las que muchas veces se pierden.

Una *proporción* es una igualdad entre dos razones. Si se conocen tres términos de una proporción se puede calcular el cuarto. Un ejemplo típico es el siguiente:

> **Ejercicio:** En cierto examen la razón entre aprobados y suspensos es 4 : 3. Si suspendieron 81 alumnos, ¿cuántos aprobaron?

Este problema se puede resolver con un enfoque algebraico, pero para ello es conveniente escribir las razones con la notación de fracción, y estar familiarizado con la propiedad de la multiplicación en cruz para determinar que dos razones (o fracciones) son equivalentes. Si hemos trabajado en esa dirección, podemos escribir

$$\frac{4}{3} = \frac{x}{81} \quad \rightarrow \quad 3x = 4 \times 81 \quad \rightarrow \quad x = \frac{4 \times 81}{3} = 108. \tag{4.1}$$

Por supuesto, esta forma de resolver el problema es equivalente a la más popular en nuestro país, la conocida *regla de tres*:

$$\left.\begin{array}{ccc} 3 & \rightarrow & 81 \\ 4 & \rightarrow & x \end{array}\right\} \quad \rightarrow \quad x = \frac{4 \times 81}{3} = 108. \tag{4.2}$$

No voy a entrar aquí en el debate de las ventajas e inconvenientes del procedimiento de la regla de tres para resolver problemas de proporcionalidad, aunque me parece que hay indicaciones suficientes para sospechar que es un procedimiento que muchos alumnos usan sin entender su funcionamiento, y eso provoca errores. Aunque los procedimientos que reflejan las expresiones (4.1) y (4.2) son formalmente equivalentes (y ambos difíciles de entender para un alumno de primaria), creo que el primero refleja mejor la propiedad que estamos usando para resolver el problema.

El modelo de barras nos permite representar la información del problema de manera que se refleja mejor el concepto de razón y esto nos proporciona una alternativa fácil de entender para resolver el problema. Que la razón entre aprobados y suspensos sea 4 : 3 quiere decir que podemos representar el total de alumnos con 7 rectángulos (todos iguales), donde 4 rectángulos representan a los alumnos aprobados y 3 rectángulos representan a los suspensos (como hemos representado en la figura 4.1). Pero como el total de alumnos suspensos es 81, cada rectángulo representa $81 \div 3 = 27$ alumnos, por lo que el total de alumnos aprobados será $4 \times 27 = 108$.

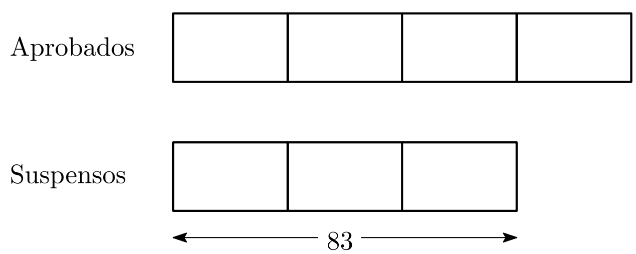


Figura 4.1: Representación de una proporción con el modelo de barras.

Para cerrar esta sección un ejemplo que se puede resolver usando el modelo de barras, y que no se trata nunca en España antes de disponer de la potencia de los métodos algebraicos. Sin embargo, creemos que plantear estos problemas en primaria, con métodos visuales como el modelo de barras, ayuda a profundizar en la comprensión de los conceptos de fracción y razón. La solución está en el capítulo final.

Ejercicio 4.1. Las cantidades de dinero que tenían dos amigos cumplían la razón 3 : 2. Cuando cada amigo se gastó 35 euros la razón pasó a ser 5 : 3. ¿Cuánto dinero tenían entre los dos al principio?

4.2. Proporcionalidad directa

El estudio de las magnitudes directamente proporcionales es el estudio de las magnitudes que cambian de manera que la razón entre ellas (el cociente) no cambia. El estudio de la proporcionalidad es muy importante, en particular, para dar sentido a muchas magnitudes que aparecen en las ciencias y la tecnología. Como se ha mencionado anteriormente, todas las magnitudes que vienen dadas por un cociente de otras dos lo que hacen es resumir el comportamiento de dos magnitudes directamente proporcionales, y cuya relación, la *razón de proporcionalidad* tienee un significado importante, como la velocidad en un movimiento de velocidad uniforme, $v = e/t$. Por ello, es importante comprender más en profundidad la relación y no limitarse a que "cuando una magnitud aumenta, la otra también lo hace". Si el espacio aumenta el tiempo necesario también lo hace, de acuerdo. Pero, ¿cuánto? Es muy intuitivo ver que si el espacio se duplica, el tiempo también lo hace. ¿Y si el espacio aumenta en $1/3$? Si el espacio es e y aumenta en $1/3$ (de su valor) su nuevo valor será $e + \frac{1}{3}e = \frac{4}{3}e$. Por tanto, si el cociente e/t permanece constante, el tiempo necesario será $\frac{4}{3}t$, es decir, el tiempo también aumenta en $1/3$. Esto puede parecer simple, pero es importante entenderlo bien para de esta forma estar preparados para el estudio de la proporcionalidad inversa, donde las cosas no serán tan inmediatas.

Hay muchos ejemplos de magnitudes en las que cuando una aumenta la otra también lo hace, pero que no son proporcionales, y para entender mejor la proporcionalidad son importantes ejercicios como el siguiente.

Ejercicio 4.2. Estudia si las siguientes magnitudes son directamente proporcionales:

1. El lado de un cuadrado y su área.
2. La masa de una sustancia y su volumen.
3. El tiempo que tarda en caer un objeto y la altura de la torre desde donde se lanza.
4. El lado de un cuadrado y su perímetro.

Como ya hemos mencionado anteriormente, la herramienta más usada en nuestro país para resolver problemas de proporcionalidad es la regla de tres, que tiene el inconveniente de que no muestra la "estructura profunda" de la situación. Consideremos el siguiente ejemplo:

> **Ejercicio:** Si en 5 semanas he ahorrado 95 euros, ¿cuánto conseguiré ahorrar en 17 semanas?

Para trabajar este problema en el contexto de la proporcionalidad estamos asumiendo (con este enunciado de manera implícita), que el dinero ahorrado y las semanas transcurridas son directamente proporcionales. La alternativa a la regla de tres es el método conocido como *reducción a la unidad*, que es el que se usa en la gran mayoría de los países y que consiste simplemente en determinar la razón de proporcionalidad: si ahorramos 95 euros en 5 semanas y las magnitudes son proporcionales, el cociente $\frac{95}{5} = 19$ no es más que los euros que ahorramos cada semana. Sabiendo que cada semana ahorramos 19 euros, el dinero que conseguimos ahorrar durante 17 semanas es simplemente $17 \times 19 = 323$ euros.

La gran ventaja de este enfoque, la reducción a la unidad, es que pone el acento en la razón de proporcionalidad, que es la idea fundamental, y en muchas situaciones lo más relevante para las aplicaciones prácticas: el salario por hora de trabajo es una razón de proporcionalidad, como también lo es la dosis de un medicamente por kg de peso del paciente. Algunos ejemplos de razones de proporcionalidad en ciencias: la velocidad es el espacio recorrido en la unidad de tiempo, la densidad de una sustancia es la masa de una unidad de volumen, la molaridad de una disolución es la cantidad de moles en 1 litro de disolución, etc.

4.3. Proporcionalidad inversa

Las limitaciones del enfoque usual en el estudio de la proporcionalidad directa se hacen evidentes en el estudio de la proporcionalidad inversa. ¿Qué son dos magnitudes inversamente proporcionales? Muchos lectores recordarán lo de “cuando una crece, la otra disminuye”. De acuerdo, pero, ¿cuánto disminuye?

> **Ejercicio:** Supongamos que hacemos dos viajes entre las ciudades A y B. En el primer viaje vamos a cierta velocidad (constante), y en el segundo viaje aumentamos la velocidad el 50 %. ¿Cuánto disminuye el tiempo de viaje?

Seguramente muchos lectores habrán pensado que el tiempo disminuye el 50 %, pero es fácil poner un ejemplo para convencerse de que esto no es cierto. Por ejemplo, supongamos que la distancia entre las ciudades es de 480 km, y que el primer viaje lo hacemos a una velocidad de 80 km/h, con lo que tardamos 6 horas. Cuando la velocidad aumenta el 50 %, pasa a ser de 120 km/h, y el tiempo que tardamos será entonces de 4 horas. Si el tiempo ha pasado de 6 horas a 4 horas, la dismunición es de 1/3, no del 50 %. ¿Por qué?

Necesitamos la definición de magnitudes inversamente proporcionales:

Definición 4.2. Dos magnitudes son inversamente proporcionales cuando *su producto es constante*.

Cuando la velocidad aumenta, el tiempo de viaje disminuye, eso es muy intuitivo. Pero, ¿cuánto disminuye? Pues lo necesario para que el producto $v \times t$ permanezca constante, ya que ese producto es igual al espacio recorrido. En términos simbólicos, como v ha aumentado el 50 %, ha pasado de valer v a $\frac{3}{2}v$ y podemos escribir

$$e = v \times t = \frac{3}{2} v \times \boxed{}\, t. \tag{4.3}$$

El cambio en t corresponde con el número que tenemos que poner en el recuadro para que la ecuación se cumpla, que resulta ser la fracción inversa de 3/2, es decir, 2/3. Por tanto, si la velocidad cambia de v a $\frac{3}{2}v$, el tiempo cambia de t a $\frac{2}{3}t$, es decir, disminuye en 1/3 de su valor.

Un comentario sobre el lenguaje: las expresiones “una cantidad disminuye a un tercio de su valor” y “una cantidad disminuye en un tercio de su valor” son, desde el punto de vista del lenguaje, muy parecidas. Hay que estar atento a este detalle, pues su significado matemático es diferente. Si la cantidad al principio era K, su valor tras el cambio será $\frac{1}{3}K$ en el primer caso y $\frac{2}{3}K$ en el segundo.

La proporcionalidad inversa también es importante en ciencias y tecnología. Aparece cuando el producto de dos magnitudes es constante, como en el ejemplo de la velocidad y el tiempo en un movimiento uniforme. Un caso importante es la ley de los gases ideales, que afirma que, a temperatura es constante, la presión y el volumen de un gas son magnitudes inversamente proporcionales, es decir, su producto se mantiene constante.

4.4. Porcentajes

Los porcentajes son seguramente el concepto matemático más utilizado en la vida cotidiana, por su utilidad para proporcionar información de manera que se facilita su comprensión. Veamos un ejemplo. Supongamos que nos dicen que en los colegios públicos españoles hay aproximadamente 245 000 maestros de primaria, y que 186 500 de ellos son mujeres. En los institutos, en la etapa de ESO, hay aproximadamente 174 000 docentes y 104 700 de ellos son mujeres. No es fácil comparar a primera vista los datos de las dos etapas. Sin embargo, si nos dicen que en la etapa de Educación Primaria el 76,1 % de los docentes son mujeres, mientras que en la ESO el porcentaje es del 60,2 %, es mucho más sencillo hacerse una idea de la situación. Precisamente por su uso en nuestra vida cotidiana, todos tenemos claro el significado de estos porcentajes: de cada 100 maestros de primaria, 76,1 son mujeres, mientras que en la ESO las docentes son 60,2 de cada 100.

Muchas veces se define un porcentaje como una fracción, interpretando $76{,}1\,\% = \frac{76{,}1}{100}$, pero esto tiene un pequeño problema, y es que en la definición de fracción el numerador y el denominador son números *enteros*. Es un detalle sin demasiada importancia, desde luego, pero es una indicación de que un porcentaje no es realmente una fracción. ¿Qué es entonces? Una *razón*, en estos casos la relación que hay entre la cantidad de docentes mujeres y el total de docentes. Sin embargo, como hemos dicho las razones y las fracciones están muy relacionadas, y pensar el porcentaje como una fracción nos va a permitir manejarlos usando los procedimientos que ya hemos desarrollado para las fracciones.

4.4.1. Porcentajes: problemas básicos

En esta sección veremos los dos problemas básicos de porcentajes, calcular un porcentaje de una cantidad y expresar una relación en forma de porcentaje. Lo haremos mediante un ejemplo de cada tipo, explorando en cada caso varias alternativas para resolver el problema y centrándonos en las que nos parecen más adecuadas para las aulas de primaria.

Porcentaje de una cantidad: calcular el 67 % de 350.

1. Pensando en el porcentaje como una fracción, y usando lo que ya sabemos de las fracciones, podemos sencillamente proceder de esta forma:

   $$67\,\% \text{ de } 350 \quad \rightarrow \quad \frac{67}{100} \times 350 = \frac{67 \times 350}{100} = 234{,}5.$$

   Representando la fracción en forma de decimal, nos podemos dar cuenta de que calcular el 67 % de 350 se reduce a la multiplicación $0{,}67 \times 350$.

2. Podemos utilizar la idea de la “reducción a la unidad”, calculando el 1 % de 350. En la figura 4.2 vemos la representación de esta idea. Uno de los rectángulos pequeños representa $\frac{350}{100} = 3{,}5$, y el 67 % pedido se puede obtener multiplicando este valor por 67:

   $$67\,\% \text{ de } 350 \quad \rightarrow \quad 67 \times \frac{350}{100} = 67 \times 3{,}5 = 234{,}5.$$

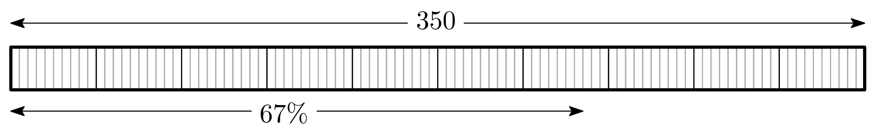


Figura 4.2: Porcentaje de una cantidad y modelo de barras.

La receta clásica de "se multiplica por el tanto, y se divide por el ciento", que se sigue oyendo en nuestras aulas, nos parece menos adecuada, porque no ayuda a ver el significado del cálculo que estamos haciendo. Lo mismo se puede decir, evidentemente, de usar la regla de tres para calcular el porcentaje de una cantidad.

El modelo de barras de la figura anterior es también la mejor opción para resolver el problema en el que nos piden el total, como en el siguiente ejemplo:

> Ejercicio: En cierta elección se han contado un total de 5494 votos y nos han dicho que la participación ha sido del 67 %. ¿Cuántos votantes hay en el censo?

Lo que nos piden es calcular el total, sabiendo que el 67 % de ese total son 5494. El 1 % será $5494 : 67 = 82$ y, por tanto, el total de votantes será 8200.

Expresar una relación como un porcentaje: En cierta empresa 1356 de los 7532 trabajadores ganan más de 30 000 euros al año. ¿Qué porcentaje de los trabajadores de la empresa gana más de 30 000 euros al año?

1. Lo que nos están pidiendo es expresar la relación 1356 : 7532 como un porcentaje. Este problema es menos intuitivo que el anterior, y en el aula de primaria es importante comenzar con ejemplos sencillos, como 4 : 8 o 14 : 16, más sencillos de entender.

   El cociente $14 : 16 = 0{,}875$ nos dice qué fracción de 16 es 14, en concreto, que 14 es igual a $0{,}875 \times 16$. Esta división nos está dando la razón en forma de *tanto por uno*. Para expresarla como porcentaje, no hay más que multiplicar por 100:

   $$1356 : 7532 = 0{,}18 \quad \to \quad 1356 \text{ es el } 18\,\% \text{ de } 7532.$$

2. Con un poco de álgebra, y lo conocido de fracciones equivalentes, podemos escribir la proporción y encontrar el valor de x:

   $$\frac{1356}{7532} = \frac{x}{100} \quad \to \quad x = \frac{1356 \times 100}{7532} = 18\,\%.$$

   Escribir esta proporción es similar a la regla de 3, pero creemos que tiene la ventaja de que muestra mejor el significado de lo que estamos haciendo.

4.4.2. Aumentos y disminuciones porcentuales

En muchas situaciones tenemos una cantidad que sube o baja un cierto porcentaje. Consideremos las siguientes preguntas:

1. Un vestido cuesta 70 euros. ¿Cuál será su precio si lo rebajan un 40 %?

2. Un traje está rebajado el 30 % y su precio de venta es 56 euros. ¿Cuál era su precio antes de la rebaja?

3. Luis gana 1200 euros al mes y para un nuevo puesto le ofrecen una subida del 8 %. ¿Cuál será su sueldo en el nuevo puesto?

4. Lucía ha obtenido recientemente una subida de suelto del 6 % y ahora gana 1400 euros al mes. ¿Cuál era su sueldo mensual antes de la subida?

Sería muy útil que el lector se detuviera aquí en la lectura y resolviera estos problemas. Ya sabemos lo suficiente para ello, pero cuidado, hay algunas situaciones en las que se producen errores muy comunes. Recomendamos hacer los problemas con los procedimientos de la sección anterior, evitando las reglas de tres.

Veamos las respuestas a estas cuatro preguntas. Vamos a aprovechar estas respuestas para presentar alternativas al cálculo siguiendo los pasos elementales. Estas alternativas serán últiles para tratar problemas más complicados.

1. Para ver cuánto cuesta el vestido podemos ver cuánto se ha rebajado, y restar esa rebaja: el 40 % de 70 es $\frac{40}{100} \times 70 = 0{,}4 \times 70 = 28$ euros. Por tanto, el precio del vestido rebajado será de 42 euros.

   Directamente, podemos razonar diciendo que si nos ha rebajado el 40 %, lo que pagamos será el 60 % del precio del vestido, es decir, $\frac{60}{100} \times 70 = 0{,}6 \times 70 = 42$ euros.

2. Sabemos que el precio del traje, con una rebaja del 30 %, ha sido de 56 euros. Un error común en este problema es obtener el precio antes de la rebaja subiendo el 30 % a 56 euros. Esto no es correcto, ya que la rebaja ha sido el 30 % sobre el precio inicial, no sobre el precio rebajado. Se trata, una vez más, de un error causado por confundir el total al que hacemos referencia al trajar con una fracción, o con una razón.

   Veamos cómo expresar la situación de manera algebraica, no con la idea de resolverlo así, pues no es necesario, sino con la idea de tratar de aclarar del todo la situación. Si llamamos x al precio inicial del traje, lo que sabemos es que

$$x - \frac{30}{100}x = 56. \tag{4.4}$$

   La forma más sencilla de resolver esta cuestión es, igual que en apartado anterior, darse cuenta de que si nos han rebajado el 30 % del precio, lo que hemos pagado ha sido el 70 %. Por tanto, buscamos el total sabiendo que el 70 % de ese total son 56 euros, un problema que ya hemos tratado anteriormente. Por ejemplo, podemos razonar así: si el 70 % son 56 euros, el 10 % serán 8 euros y el total serán 80 euros.

   También con un poco de álgebra, si $0{,}7 \times P = 56$, $P = 56 : 0{,}7 = 80$.

3. Para responder a esta pregunta podemos calcular el 8 % de 1200 y sumarlo al sueldo para obtener la solución. En otras palabras, estamos calculando

$$1200+\frac{8}{100}\times 1200 = 1200+0{,}08\times 1200 = (1+1{,}08)\times 1200 = 1{,}08\times 1200 = 1296 \text{ euros.} \quad (4.5)$$

   En el segundo de las igualdades lo que hemos hecho ha sido aplicar la propiedad distributiva (sacar factor común).

   Lo que nos dice esta forma de organizar los cálculos, que naturalmente se puede repetir en otros casos similares, es que, para calcular el valor de una cantidad cuando se aumenta el 8 % podemos, sencillamente, multiplicar esa cantidad por 1,08. Siguiendo la costumbre extendida de darle nombre a casi todo, esta observación tiene nombre propio, y se suele conocer como aplicar el "índice de variación". El problema de darle este nombre es que algunos alumnos no identifican que lo que se está haciendo es un sencillo cálculo con porcentajes.

4. Sabemos que, después de una subida del 6 %, el salario es de 1400 euros al mes. Un error común es obtener el sueldo antes de la subida quitándole el 6 % al sueldo actual, y la causa del error es la misma que en el caso 2, confundir la base sobre la que se calcula el 6 %, que no son los 1400 euros del salario actual, sino el salario antes de la subida, que no es conocido.

   Veamos dos alternativas para resolver el problema:

   a) El salario después de la subida será el 106 % del salario anterior (el total, mas el 6 % de subida. Por tanto, el 1 % será $1400 : 106 \approx 13{,}20$ y, por tanto, el salario anterior era de aproximadamente 1320 euros.

   b) Usando solo un poco de álgebra, y llamando S al salario antes de la subida, sabemos que multiplicar por 1,06 corresponde a aumentar el 6 %. Por tanto,

$$1{,}06\times S = 1400 \quad \rightarrow \quad S = \frac{1400}{1{,}06} \approx 1320 \text{ euros.}$$

Una ventaja de entender que los aumentos y disminuciones porcentuales se reducen a una simple multiplicación es que facilita ejercicios como los siguientes:

Ejercicio 4.3. Dos acciones en la bolsa cotizan al mismo precio hoy. La acción de la empresa A primero sube un 15 % y luego baja un 8 %, mientras que la acción de la empresa B primero baja 8 % y luego sube un 15 %. ¿Cuál de las dos acciones tiene mayor valor al final?

Llamando V_A al valor inicial de la acción A, sabemos que una subida del 15 % se reduce a multiplicar por 1,15 y el valor tras una bajada del 8 % se calcula multiplicando por 0,92. Por tanto, tras los dos cambios el valor de la acción de la empresa A será $V_A \times 1{,}15 \times 0{,}92$. Una vez escrito de esta forma, para la empresa B vemos que el valor tras sus cambios se obtiene con las mismas multiplicaciones, en distinto orden. Como la multiplicación es conmutativa, los valores finales son iguales.

Ejercicio 4.4. El salario de un empleado al entrar en cierta empresa es de 1200 euros mensuales. Si consigue una subida del 3 % anual, ¿cuál será su salario al cabo de 10 años?

El salario después de una subida del 3 % será 1200 × 1,03, que se convertirá en (1200 × 1,03) × 1,03 = 1200 × $1{,}03^2$ después de dos subidas. Subir 10 veces el 3 % corresponde a multiplicar 10 veces por 1,03, es decir, el salario tras las 10 subidas será 1200 × $1{,}03^{10}$ ≈ 1612 euros.

Para terminar esta sección, un ejemplo tomado de la prensa donde aparece el error que hemos mencionado varias veces, de confundir el total. En un artículo[1] se menciona que el número total de nacimientos en la provincia de Córdoba durante la primera mitad del año 2017 fue de 2980, mientras que el de defunciones fue de 4288, para deducir que "Córdoba contabiliza ya un 70 % más de fallecimientos que de nacimientos". El cálculo del cociente 2980 : 4288 nos dice que el número de nacimientos es (aproximadamente) el 70 % del número de defunciones. Pero si queremos ver la relación contraria, la que dice el titular, habría que calcular el otro cociente, 4288 : 2980 = 1,44, es decir, el número de fallecimientos es un 44 % superior al número de nacimientos.

4.4.3. El IVA y el IRPF

Terminamos el estudio de los porcentajes con dos situaciones muy relevantes en la vida cotidiana, correspondientes al pago de impuestos. En el impuesto sobre la renta, cuando se paga un tipo impositivo de, por ejemplo, el 18 %, esto quiere decir que Hacienda recauda el 18 % del sueldo completo (que se conoce como *sueldo bruto*). Por tanto, por cada 100 euros que la empresa paga al trabajador, 18 corresponden al impuesto y 82 son los que ingresa el trabajador en lo que se conoce como *sueldo neto*. Una vez aclarado esto, las preguntas sobre este impuesto se reducen a sencillos problemas sobre porcentajes.

Veamos con un poco más de detalle el caso del IVA, porque es más complicado. Cuando pagamos un IVA del 21 %, el impuesto que pagamos corresponde al 21 % del precio de venta, ya que la base del IVA no es el precio de venta, sino el precio sin IVA, al que no le prestamos atención como consumidores. La situación se muestra en la figura 4.3. Dado un precio base(sin IVA), se calcula el 21 % de ese precio sin impuesto, y se suma al precio base para obtener el precio que pagamos como consumidores. Dicho de otra forma, el precio de venta al público corresponde con el 121 % del precio sin IVA.

Ejercicio 4.5. El precio de venta usual de un ordenador es de 1300 euros, y lo compramos en el día sin IVA de la tienda. ¿Cuál será ese día el precio de venta?

Confiando en que los lectores ya tengan clara la solución, nos conformamos con observar que el resultado **no** es 1027 euros, sino 1074 euros.

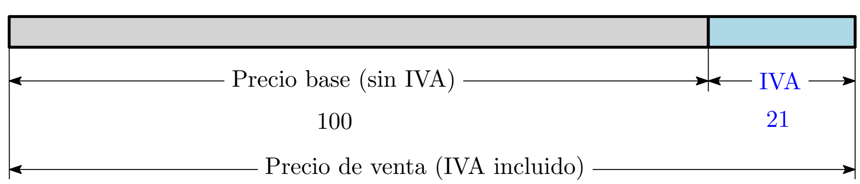


Figura 4.3: Representación del IVA.

[1] https://twitter.com/juvenal_tw/status/1073922586222968834

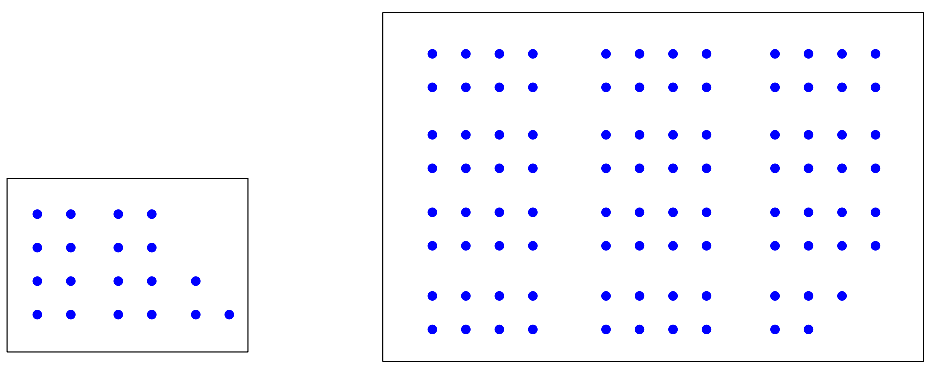
Capítulo 5

Ejercicios resueltos

Ejercicio 2.1. En este ejercicio tenemos que expresar la cantidad de puntos de los conjuntos de la figura en base 8, es decir, haciendo grupos de 8 y de potencias de 8. Los puntos están agrupados para facilitar el recuento.

En el apartado a) tenemos dos grupos de 8 y 3 unidades (las unidades son unidades en cualquier base, por supuesto). Esto lo expresamos escribiendo $23_{(8}$.

En el apartado b) tenemos 11 grupos de 8. Con 8 de esos grupos hacemos un grupo de 8^2. Por tanto, lo que tenemos son un grupo de 8^2, tres grupos de 8 y cinco unidades. Esto lo expresamos escribiendo $135_{(8}$.



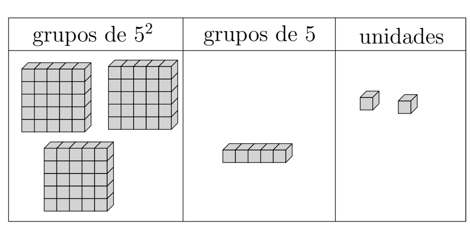
a) b)

Ejercicio 2.3. Calcula

$$\begin{array}{rrr} 3 & 1 & 2_{(5} \\ -1 & 4 & 3_{(5} \\ \hline \end{array}$$

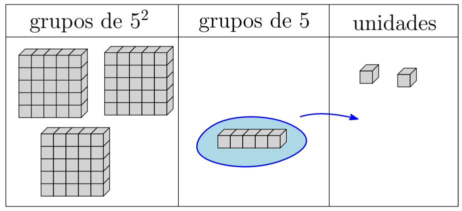
representando los reagrupamientos necesarios en tablas de valor posicional y explicándolos con detalle. Puedes ayudarte para ello con los bloques de base 5 que puedes encontrar en el archivo materiales.pdf

A la derecha tenemos la representación del minuendo, el número $312_{(5}$, con los bloques de base 5.

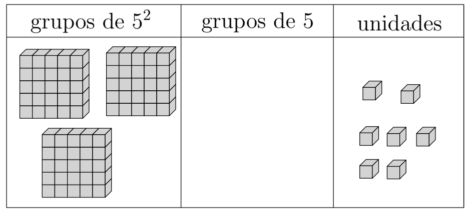


$$\begin{array}{rrr} 3 & 1 & 2_{(5} \\ -1 & 4 & 3_{(5} \\ \hline \end{array}$$

Como de 2 unidades no se pueden quitar 3, recurrimos a los grupos de 5. Vamos a mover un grupo de 5 con las unidades, desagrupándolo.

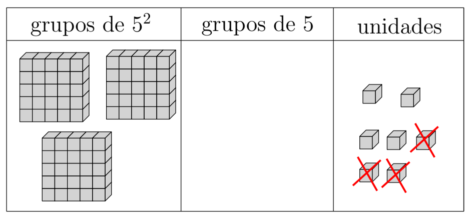


Ahora tenemos 3 grupos de 5^2 (esto no ha cambiado), ningún grupo de 5 y 7 unidades.



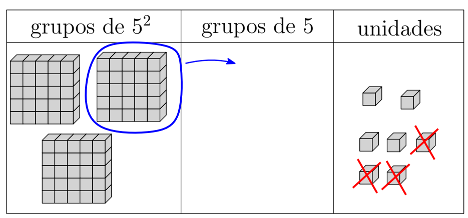
$$\begin{array}{rrrl} & 0 & 7 & \\ 3 & \cancel{1} & \cancel{2} & _{(5} \\ -\ 1 & 4 & 3 & _{(5} \\ \hline \end{array}$$

De las 7 unidades quitamos 3, y ya tenemos la cifra de las unidades del resultado.



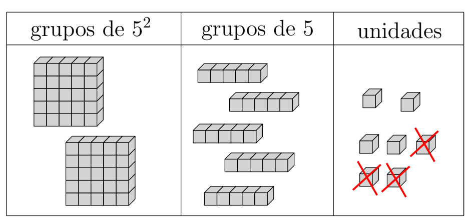
$$\begin{array}{rrrl} & 0 & 7 & \\ 3 & \cancel{1} & \cancel{2} & _{(5} \\ -\ 1 & 4 & 3 & _{(5} \\ \hline & & 4 & _{(5} \end{array}$$

En el lugar de los grupos de 5 volvemos a encontrarnos el problema: no hay ninguno, y por tanto no podemos quitar 4. Vamos a tomar un grupo de 5^2, y desagruparlo en 5 grupos de 5.



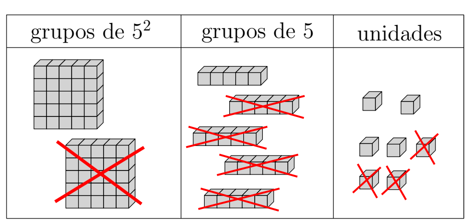
$$\begin{array}{rrrl} & 0 & 7 & \\ 3 & \cancel{1} & \cancel{2} & _{(5} \\ -\ 1 & 4 & 3 & _{(5} \\ \hline & & 4 & _{(5} \end{array}$$

Tenemos ahora 2 grupos de 5^2 y 5 grupos de 5.



$$\begin{array}{rrrl} & 5 & & \\ 2 & \cancel{0} & 7 & \\ \cancel{3} & \cancel{1} & \cancel{2} & _{(5} \\ -\ 1 & 4 & 3 & _{(5} \\ \hline & & 4 & _{(5} \end{array}$$

Ahora ya podemos terminar la resta sin ninguna dificultad.



$$\begin{array}{rrrl} & 5 & & \\ 2 & \cancel{0} & 7 & \\ \cancel{3} & \cancel{1} & \cancel{2} & _{(5} \\ -\ 1 & 4 & 3 & _{(5} \\ \hline 1 & 1 & 4 & _{(5} \end{array}$$

Ejercicio 2.5. Explica, recurriendo a las propiedades básicas de la multiplicación, estas propiedades:

1. Para multiplicar cualquier número por 10, es suficiente con añadir un 0.

Vamos a verlo con un ejemplo. Si tenemos que calcular 826×10, aplicando la propiedad distributiva tenemos que

$$826 \times 10 = (800 + 20 + 6) \times 10 = 800 \times 10 + 20 \times 10 + 6 \times 10$$

Es decir, tenemos 8 centenas multiplicadas por 10, mas 2 decenas multiplicadas por 10, mas 6 unidades multiplicadas por 10. Al multiplicar una unidad por 10 se obtiene una decena, al multiplicar una decena por 10 se obtiene una centena, y al multiplicar una centena por 10 se obtiene un millar. Dicho de otra forma: al multiplicar por 10 las unidades pasan a decenas, las decenas a centenas, las centenas a millares, etc. ¿Y cómo se puede hacer ese cambio teniendo en cuenta la notación posicional? Simplemente, añadiendo un 0 a la derecha.

2. Para multiplicar cualquier número por la unidad seguida de ceros, es suficiente añadir el número de ceros correspondiente.

   Una vez que sabemos que para multiplicar por 10 es suficiente añadir un 0, es suficiente con darnos cuenta de que multiplicar por 100 es equivalente a multiplicar por 10 dos veces (multiplicar por 1000 es multiplicar por 10 tres veces, etc). Esto es consecuencia de la propiedad asociativa. Por ejemplo:

$$826 \times 100 = 826 \times (10 \times 10) = (826 \times 10) \times 10$$

3. Si tengo que multiplicar un número que termina en uno o más ceros, por otro, puedo olvidarme de los ceros, hacer la multiplicación, y luego añadirlos. Por ejemplo, $400 \times 8 = 3200$.

   Esto es consecuencia de nuevo de la propiedad asociativa y de lo que ya hemos deducido en el apartado anterior:

$$400 \times 8 = (100 \times 4) \times 8 = 100 \times (4 \times 8)$$

♢

Ejercicio 2.6. Un astronauta empezó su viaje un martes a las 9 de la mañana. Si el viaje duró 281 horas, ¿qué día de la semana y a qué hora aterrizó?

En este caso me voy a limitar a una indicación y a la respuesta.

Una división nos dice cuántos días han pasado, y cuántas horas.

Respuesta: aterriza un domingo, a las 2 de la noche. ♢

Ejercicio 2.9. En una división sabemos que resto es 15 y el cociente 37, y sabemos además que el dividendo es menor que 650. ¿Cuáles pueden ser el dividendo y el divisor?

La relación entre dividendo, divisor, cociente y resto nos asegura que

$$D = 37 \times d + 15.$$

Como el resto debe ser menor que el divisor, con $d = 16$ se obtiene $D = 607$. Existe una segunda solución, $d = 17$ y $D = 644$. ♢

Ejercicio 2.10. Usa la igualdad $21320 = 65 \times 328$ para calcular el cociente y el resto de dividir 213301 entre 65.

Indicación: averigua qué operaciones hay que hacerle al número 21320 para obtener 213301. No se trata de "sumarle la diferencia", porque esto no será útil para el cálculo de la división.

Es más útil darse cuenta de que $213200 = 21320 \times 10$, y ya estamos cerca ...

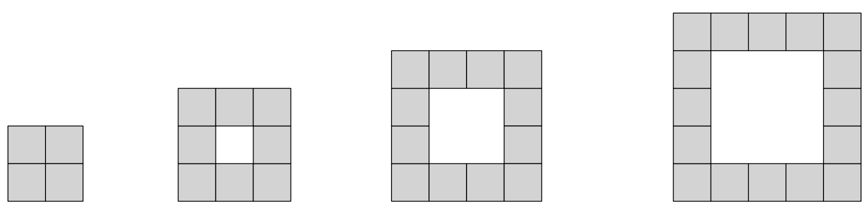
Luego, considera estas operaciones en la igualdad (2.10).

En ejercicios como este, donde la respuesta es una operación fácilmente comprobable, no voy a dar la solución. Por ejemplo, en http://www.wolframalpha.com se puede teclear la expresión 213301/65 y obtener el resultado en varios formatos, entre ellos el que se pide en este ejercicio,

$$213301 = \boxed{} \times 65 + \boxed{}.$$

♢

Ejercicio 2.11. ¿Cuántos cuadrados sombreados tiene la figura n de esta serie?



1 2 3 4

Esta serie es interesante porque la figura que ocupa la posición n se puede describir de varias formas. Lo que voy a hacer es dar varios ejemplos de esa descripción, añadiendo la forma de contar correspondiente. Si tienes dificultades para seguir el razonamiento con n, lo que debes hacer es empezar sustituyendo n por los valores 3, o 4, ver cómo funciona, y luego tratar de hacer la abstracción necesaria para pensar en términos de n. Vamos a llamar C_n al número de cuadrados sombreados que tiene la figura n.

1. Podemos descomponer a la figura n en dos filas (horizontales) con $n+1$ cuadrados, y dos columnas (verticales) con $n-1$ cuadrados. Por tanto, $F_n = 2(n+1) + 2(n-1) = 4n$.

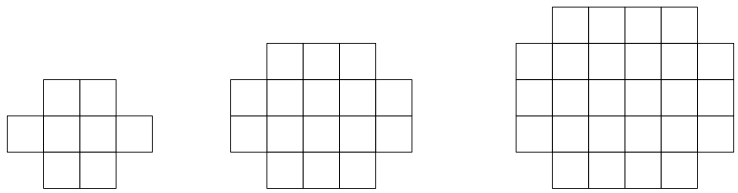
2. Podemos contar los 4 lados, con $n+1$ cuadrados cada uno, pero en ese caso estamos contando dos veces los cuadrados de las esquinas, por lo que hay que restarlos. Tenemos entonces $F_n = 4(n+1) - 4 = 4n$.

3. Si asignamos las esquinas de alguna forma, también se puede ver la figura como formada por 4 tiras con n cuadrados cada una. Por tanto, $F_n = 4n$.

4. Finalmente, se puede ver la figura como un cuadrado con un total de $(n+1)^2$ cuadrados, del que hemos quitado los $(n-1)^2$ cuadrados interiores. Por tanto, $F_n = (n+1)^2 - (n-1)^2 = 4n$.

$\diamondsuit$

Ejercicio 2.12. ¿Cuántos cuadrados tiene la figura n de esta serie?



1 2 3

En este ejercicio vamos a hacer varias descripciones de la figura 3 de la serie, y a dar la respuesta final para la figura n. Queda para el lector el trabajo de rellenar este salto con la descripción de la figura n.

Si contamos los cuadrados de los tres primeros términos, obtenemos la serie 8, 16, 26, en la que la diferencia entre dos términos consecutivos ya no es siempre la misma.

1. La figura 3 se puede ver como un rectángulo de tamaño 4×5, con dos columnas de tamaño 3 al los lados.

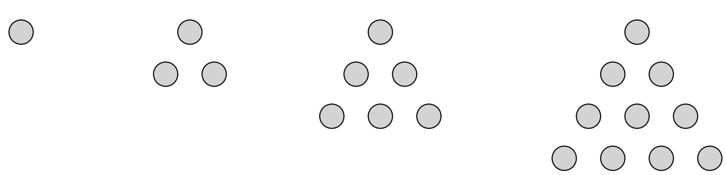
2. También se puede ver como un rectángulo de tamaño 6×3, con dos filas de tamaño 4, una arriba y otra abajo.

3. Se puede ver también como un rectángulo de tamaño 6×5 al que le hemos quitado las 4 esquinas.

Hay otras descripciones posibles, desde luego. El número de cuadrados de la figura n es $n^2 + 5n + 2$.

$\diamondsuit$

Ejercicio 2.13. El número de círculos en cada una de las siguientes figuras se conoce como *número triangular*. Si llamamos T_n al número triangular *n-ésimo*, vemos que $T_1 = 1$, $T_2 = 3$, $T_3 = 6$ y $T_4 = 10$. ¿Puedes obtener diferentes expresiones para el número T_n?



1 2 3 4

Vemos que $T_4 = 1+2+3+4$ y, por ejemplo, $T_5 = 1+2+3+4+5 = 15$. Por tanto, el número triangular n-ésimo, T_n, no es más que la suma de los n primeros números naturales. En lenguaje algebraico,

$$T_n = 1+2+3+\cdots+(n-2)+(n-1)+n.$$

Podríamos recurrir a la fórmula para la suma de términos de una progresión aritmética, pero no es necesario, hay una manera de calcular esta suma que no requiere fórmulas adicionales.

Supongamos que n es un número par. Vamos a emparejar los términos de esta suma, el primero con el último, el segundo con el penúltimo, y así sucesivamente. Hemos hecho así las parejas porque la suma es en todos los casos la misma: $n+1$. Como hay $n/2$ parejas, ya tenemos cuánto vale la suma:

$$T_n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Si n es impar, podemos hacer esto mismo dejando fuera el último término, y sumarlo luego. La expresión que se obtiene es la misma.

♢

Ejercicio 2.16.

1. ¿Es 119 un número primo?
2. ¿Es 883 un número primo?

1. Tenemos que ir probando posibles divisores. La primera observación es que es suficiente probar con divisores primos: si 3 no es un divisor de un número, ningún múltiplo de 3 puede serlo. Merece la pena que dediques un minuto a convencerte de por qué es cierto esto. Para 119, probamos sin éxito el 2, el 3 y el 5. Pero vemos que $119 \div 7 = 17$. Por tanto, 119 no es un número primo.

2. Para 883, empezamos a probar los posibles divisores primos, pero no encontramos ninguno, ¿hasta dónde? ¿Es necesario probar con 881, el último número primo menor que 883?

   No, es fácil ver que podemos parar mucho antes. Primero, observemos que $\sqrt{883} < 30$. Como siempre que aparece algo sin explicación, el por qué es sencillo, y deberías convencerte de ello por ti mismo. Pues bien, si no hemos encontrado ningún divisor cuando llegamos a 30, podemos estar seguros de que 883 no tiene divisores (propios).

   Este es el argumento, de nuevo basado en el emparejamiento de los divisores: si a fuera un divisor, para el cociente $b = 883 \div a$ se cumpliría que $a \times b = 883$. Pero es imposible que a y b sean mayores que 30, pues en ese caso $a \times b$ sería mayor que 900. ♢

Ejercicio 2.19.

Tenemos una habitación rectangular, de 6,30 m de largo y 4,50 m de ancho. Queremos poner un suelo de baldosas cuadradas, todas iguales, sin tener que partir ninguna baldosa.

1. ¿de qué tamaños podrían serán las baldosas?
2. ¿cuántas baldosas necesitaremos en cada caso?

1. Como debemos trabajar con números naturales, lo haremos en centímetros (también podríamos trabajar en decímetros).

   Para que no haya que partir ninguna baldosa cuando las ponemos en el lado de 630 cm, el lado de la baldosa debe ser un divisor de 630. Lo mismo debe ocurrir cuando las ponemos en el lado de 450 cm. Como las baldosas con cuadradas, el lado de la baldosa debe ser un divisor tanto de 630 como de 450.

   El cálculo del máximo común divisor de 630 y 450 es sencillo y no vamos a entrar en esos detalles: $\text{mcd}(630, 450) = 90$. Por tanto, las dimensiones posibles para las baldosas son los divisores de 90: 90, 45, 30, 18, 15, 10, 9, 6, 5, 3, 2, 1.

2. Para ver las baldosas que necesitaríamos en cada caso, es suficiente ver cuántas harían falta para cada lado de la habitación. Por ejemplo, en el caso de usar baldosas de lado 18, en el lado de 630 cm tendríamos $630 \div 18 = 35$ y en el lado de 450 tendríamos $450 \div 18 = 25$. El total de baldosas sería, por tanto, $35 \times 25 = 875$. ♢

Ejercicio 2.22. Dos faros emiten una señal especial cada 16 y 12 minutos, respectivamente. Sabiendo que emiten la señal a la vez a las 0 horas y que empezamos a contemplarlos a las 5 de la tarde:

1. ¿a qué hora coinciden por primera vez después de la medianoche?
2. ¿cuántas veces han emitido la señal a la vez antes de que llegáramos?
3. ¿a qué hora los veremos coincidir por primera vez?

1. El primer faro emite la señal cada 16 minutos, y el segundo cada 12. Por tanto, coincidirán en el primer múltiplo común. Como $\text{mcm}(16, 12) = 48$, coinciden a las $00 : 48$.
2. Coinciden cada 48 minutos, y entre la medianoche y las 5 de la tarde han pasado un total de 17 horas, que son 1020 minutos. Como $1020 \div 48 = 21\, R\, 12$, han coincidido un total de 21 veces (22 si contamos la primera, a medianoche).
3. Escribiendo la división del apartado anterior como $1020 = 21 \times 48 + 12$, vemos que han coincidido por última vez, antes de que llegáramos, 12 minutos antes de las 5, es decir, a las $4 : 48$. Como coinciden cada 48 minutos, coincidirán de nuevo a las $5 : 36$. ♢

Ejercicio 4.1. Las cantidades de dinero que tenían dos amigos cumplían la razón $3 : 2$. Cuando cada amigo se gastó 35 euros la razón pasó a ser $5 : 3$. ¿Cuánto dinero tenían entre los dos al principio?

Un bosquejo de la solución: Representamos con un modelo de barras el dinero que tenían al principio, con la razón $3 : 2$ (3 rectángulos uno de ellos, 2 rectángulos el otro). Ahora debemos quitarle la misma cantidad a cada uno, y que la razón se convierta en 5 : 3. Por tanteo[1], vemos que si quitamos medio rectángulo a cada uno la razón pasa a ser 5 : 3. Por tanto, ese medio rectángulo son los 35 euros que han gastado cada uno y el total pedido son 350 euros.

Ejercicio 4.2. Estudia si las siguientes magnitudes son directamente proporcionales:

1. El lado de un cuadrado y su área.

   Si el lado de un cuadrado se duplica, su área se multiplica por 4, no por 2. Por tanto, el lado de un cuadrado y su área no son magnitudes directamente proporcionales.

2. La masa de una sustancia y su volumen.

   La razón entre masa y volumen de una sustancia es la densidad. Sí son magnitudes directamente proporcionales.

3. El tiempo que tarda en caer un objeto y la altura de la torre desde donde se lanza.

   Si se lanza un objeto desde una torre va acelerando. Esto quiere decir que si cae desde una torre de 200 m de altura no tarda el doble que si cae desde una torre de 100 m de altura. Por tanto, el tiempo de caída y la altura no son magnitudes directamente proporcionales.

4. El lado de un cuadrado y su perímetro.

   El perímetro de un cuadrado es 4 veces su lado. Por tanto, P/ℓ es siempre 4. El perímetro de un cuadrado y su lado sí son magnitudes directamente proporcionales.

[1] La resolución por tanteo tiene mala fama en nuestro país. Sin embargo, creemos que en algunas situaciones puede ser muy formativa, ya que ayuda a entender la estructura del problema.