Tema 1: Los números naturales

* ¿Qué vamos a estudiar en este tema?

1. Sistemas numéricos. La notación posicional.
2. Aritmética elemental. Algoritmos y propiedades.
3. El lenguaje algebraico y el razonamiento abstracto.
4. Divisibilidad. Números primos. Máximo común divisor y mínimo común múltiplo.

Los números naturales

* $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5 \ldots\}$

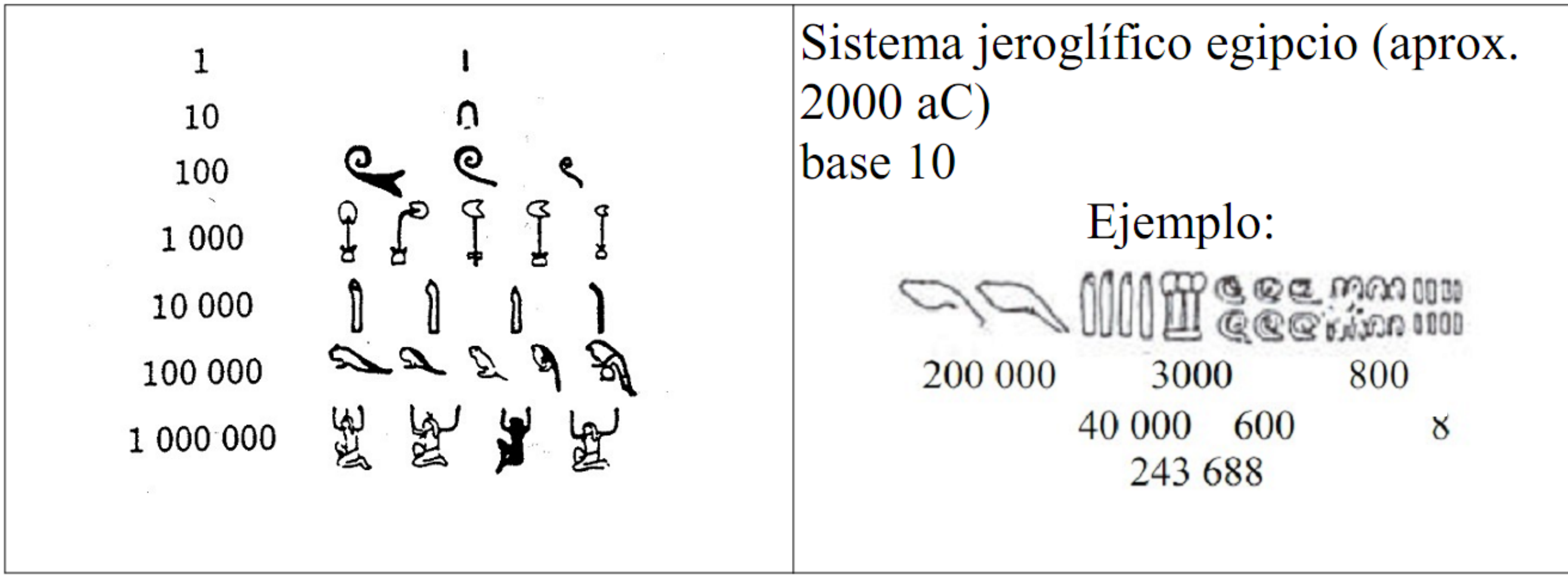
* Origen: necesidad de "contar".

* Problema: representación (oral y escrita) de números "grandes".

Tipos de sistemas de numeración

1. Sistemas aditivos

* El número se obtiene sumando el valor de los símbolos que lo componen.



Imágenes de http://www.ugr.es/ jgodino/edumat-maestros/welcome.htm

* Numeración griega: I $= 1$, $\Pi = 5$, $\Delta = 10$, H $=$ 100, X $=$ 1000 y M $=$ 10000 (la romana procede de ella).

2. Sistemas aditivo-multiplicativos

* Si hay que repetir varias veces un número, eso se indica con otro número.

  Un ejemplo: el sistema chino

一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	百	千	萬
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	100	1 000	10 000

De esta manera se evitan repeticiones fastidiosas pues los números que preceden a las potencias de la base indican cuántas veces deben repetirse éstas. Por ejemplo, el número 79564 se escribiría:

七 萬 九 千 五 百 六 十 四

qī wàn jiǔ qiān wǔ bǎi liù shí sì

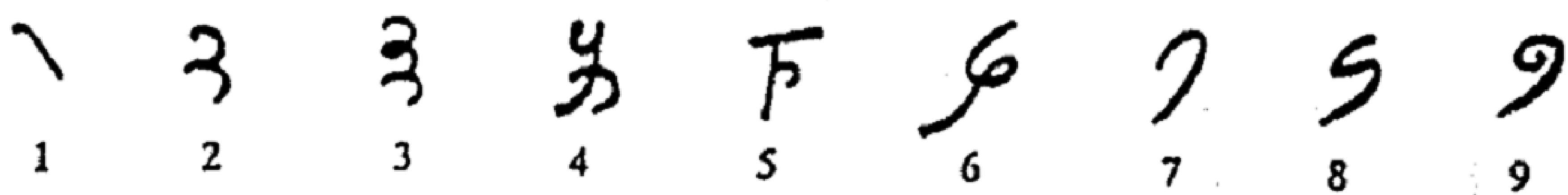
7 × 10000 + 9 × 1000 + 5 × 100 + 6 × 10 + 4

79 564

Sistemas de numeración

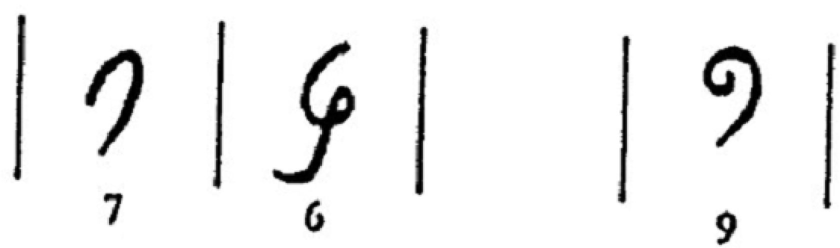
3. Sistemas multiplicativos (como el nuestro)

* Tiene su origen en el sistema hindú. Los símbolos del sistema hindú eran



(y unos símbolos adicionales para las potencias de 10).

* Entre los siglos V y VIII se prescinde de los símbolos para las potencias de 10, pero se utilizan unas barras:



Sistemas de numeración

* El cero.

  El nombre proviene del sánscrito shunya (vacío), en árabe se llamó sifr Nuestra palabra cifra viene de ahí.

  Nuestro sistema de numeración llega a Europa a través de los árabes. Al-Jwarizmi escribió el libro "Acerca de los cálculos con los números de la India" alrededor del año 825.

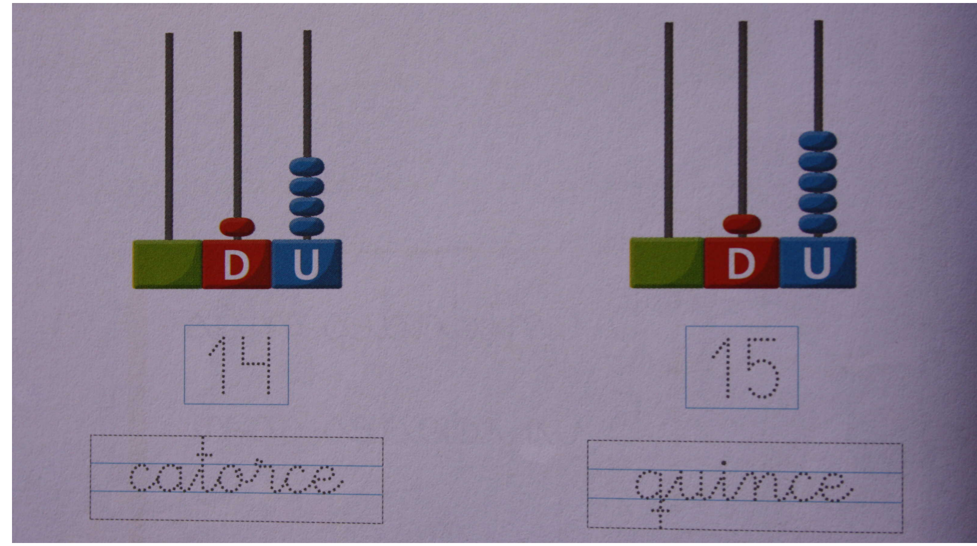
* A partir de la introducción del nuevo sistema de numeración, la aritmética se desarrolla de forma muy rápida.

La introducción del número de dos cifras

* Enfoque tradicional (1º de primaria):
  - Tema 0: repaso de los números del 0 al 9.
  - Tema 1: los números del 10 al 19.
  - Tema 2: los números del 20 al 29.
  - . . .
* Inconveniente: Falta de sentido numérico.

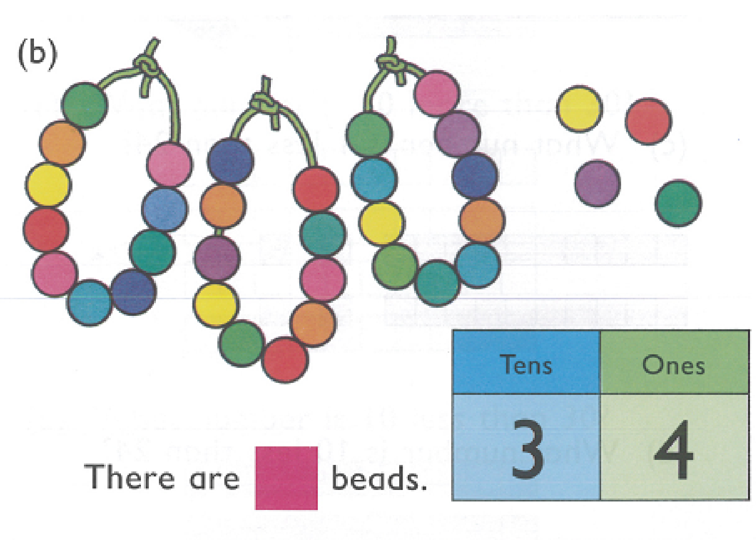
Decenas y unidades en nuestros libros de texto

* Casi siempre, el enfoque de la figura:



* Es mejor, durante un tiempo, mostrar las decenas como grupos de diez, explícitamente, como en la figura:

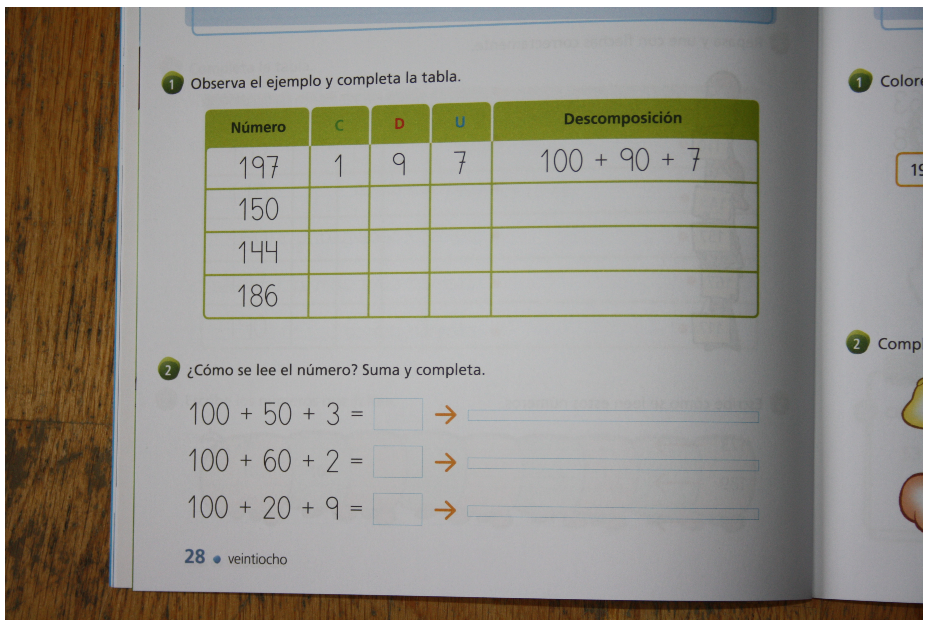
  (El ejemplo es de la segunda mitad del primer curso de un libro de Singapur).



Una comparación

* Comparemos estos dos ejemplos:

Un libro español de 2º



1 Observa el ejemplo y completa la tabla.

Número	C	D	U	Descomposición
197	1	9	7	100 + 90 + 7
150				
144				
186				

2 ¿Cómo se lee el número? Suma y completa.

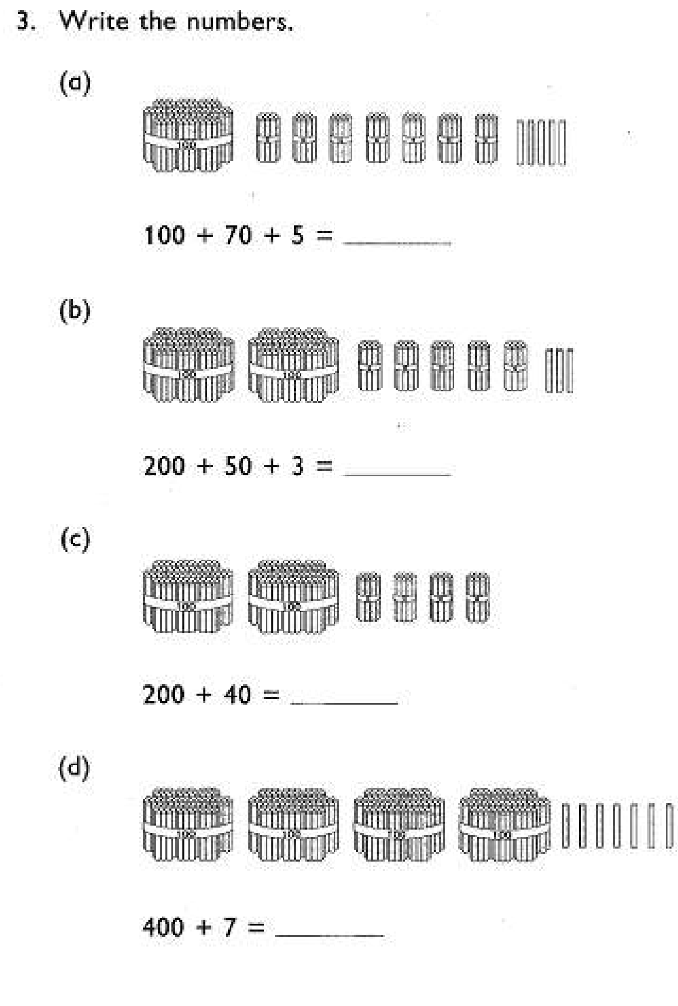
100 + 50 + 3 = ☐ → ______

100 + 60 + 2 = ☐ → ______

100 + 20 + 9 = ☐ → ______

28 • veintiocho

Un libro de Singapur de 3º



3. Write the numbers.

(a) 100 + 70 + 5 = ______

(b) 200 + 50 + 3 = ______

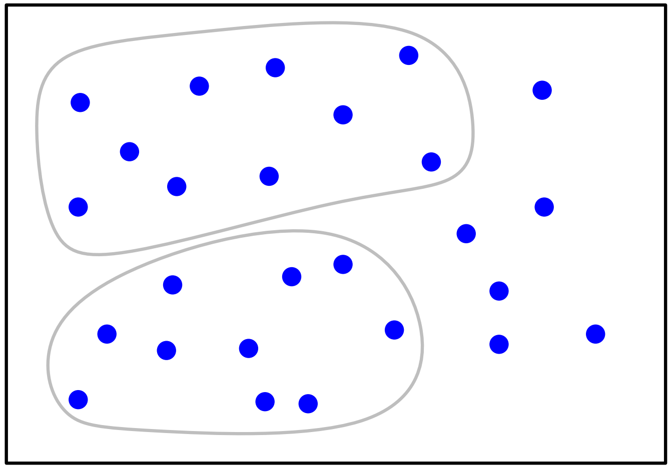
(c) 200 + 40 = ______

(d) 400 + 7 = ______

15

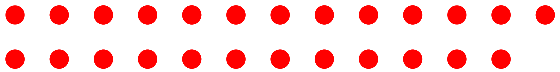
La introducción del número de dos cifras

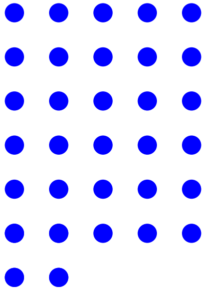
* Enfoque alternativo: contamos "haciendo grupos de diez".



Hay dos "grupos de diez" y 6 (o diez, diez y 6).

* Además, se puede practicar el recuento con ejemplos que ayudan a profundizar en ese sentido numérico.





La introducción del número de dos cifras

* Una vez practicado el recuento de manera intensiva, ya se puede:
  - 3 grupos de diez y 5 se escribe 35.
  - el grupo de diez se llama decena.
  - introducir el cero.

* Un alumno que ha seguido este proceso está en condiciones de contestar a la pregunta:

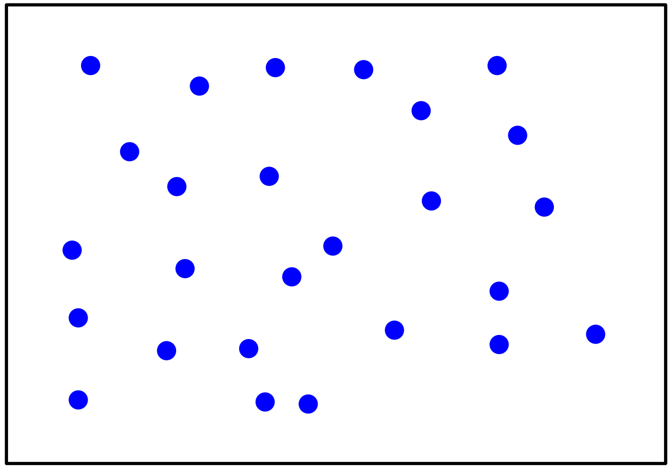
  ¿cuántas son $32 + 20$?

* Estos temas (y su relación con la introducción de los algoritmos de suma y resta) serán ampliados en la asignatura de didáctica de las matemáticas (3º).

La base b

- ¿Por qué contamos en base diez (haciendo “grupos de diez”)?

- ¿Cómo representaríamos la cantidad de la figura si tuviéramos 8 dedos?



- Como $26 = 3 \times 8 + 2$, en base 8 el número 26 se representa como $32_{(8}$.

- Ejercicio: Piensa ahora cómo escribirías el número 26 en base 5.

La base b

* Expresión de un número en base b: dado un número natural $b > 1$ (la base), cualquier número n se puede expresar de forma única como

$$n = a_k \cdot b^k + a_{k-1} \cdot b^{k-1} + \cdots + a_1 \cdot b + a_0.$$

donde los dígitos a_i toman los valores $0, 1, \ldots, b-1$.

n se representa en base b como $a_k a_{k-1} \cdots a_1 a_{0(b}$.

* ¿Por qué estudiar la base b?
  - Interés didáctico.
  - Conexión de las matemáticas con el mundo más próximo: informática.

Base b: ejercicios

* Ejercicios:

1. Escribe los cinco primeros números naturales en base 2.
2. Escribe (en base 4) los 10 números siguientes a $223_{(4}$.
3. ¿Cómo se pasa de base 10 a base b, y al revés?
   a) Escribe $354_{(7}$ en base 10.
   b) Escribe 92 en base 3.

El sistema de numeración oral

* Números cardinales.

  Escribe en letra
  * $87\,065\,006$.
  * $72\,080\,023\,002\,305\,006$.

  Expresa en forma numérica veintitres mil cuarenta y tres billones, doscientos cuatro mil dos millones, veinte mil cuatro.

  Más información, por ejemplo, aquí:

  http://goo.gl/XJiZo (Wikipedia)

* Números ordinales.

  Escribe en letra los ordinales 37^{o}, 76^{o}, 85^{o}, 94^{o}, 101^{o}.

La recta numérica

* Una ayuda excelente para desarrollar el sentido numérico (a todos los niveles).

* Por ejemplo: al final de 1º, o en 2º.

  Sitúa (de forma aproximada) los números 87, 6, 25, 48.

* Hacia el final de primaria: sitúa (de forma aproximada) los números 870100, 6005, 250037, 48025.

La suma - Concepto y algoritmos

* Demasiadas veces se identifica el estudio de la suma con el estudio del algoritmo tradicional para su cálculo.

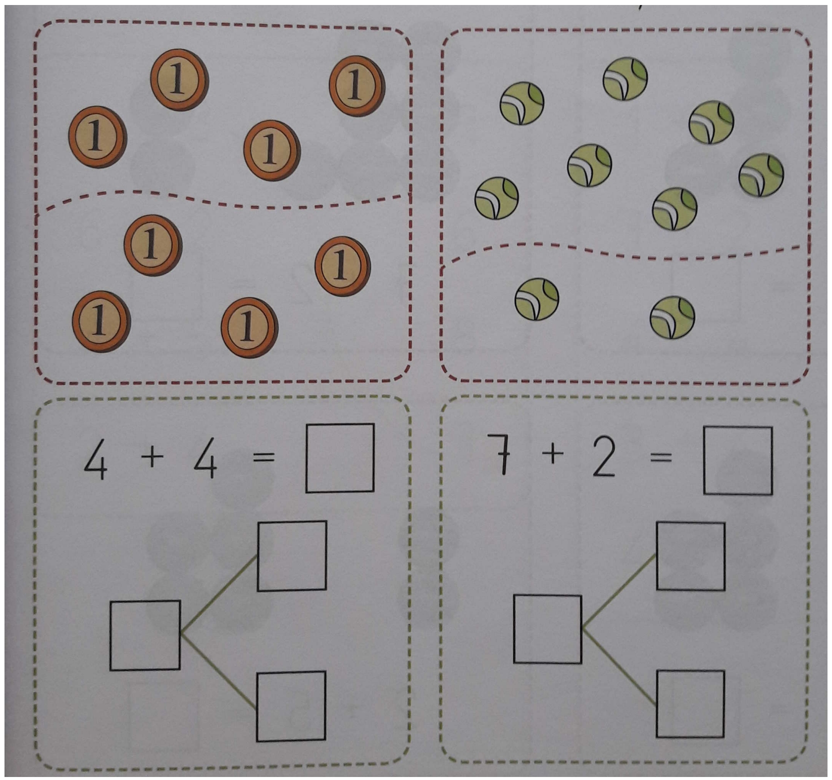
$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1} \\ 37 \\ +\;25 \\ \hline 62 \end{array} \qquad \begin{array}{r} {\scriptstyle 11} \\ 813674 \\ +\;452895 \\ \hline 1266569 \end{array}$$

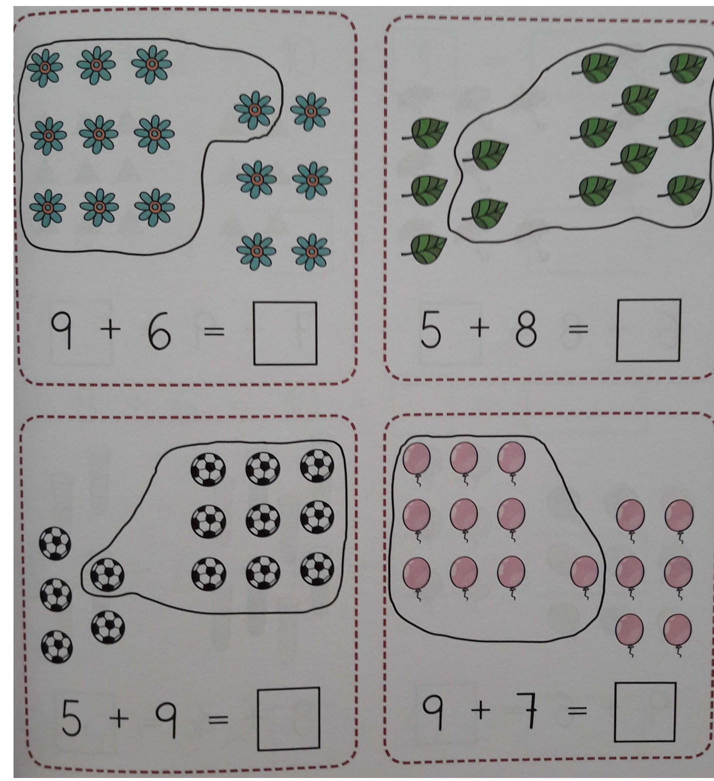
* Antes de continuar, merecería la pena reflexionar sobre el papel de la aritmética tradicional en la educación primaria del siglo XXI.

Mas ideas, menos cuentas: La aritmética en primaria

Un comentario sobre didáctica

- Antes de trabajar el algoritmo de la suma, es importante haber desarrollado el suficiente sentido numérico.

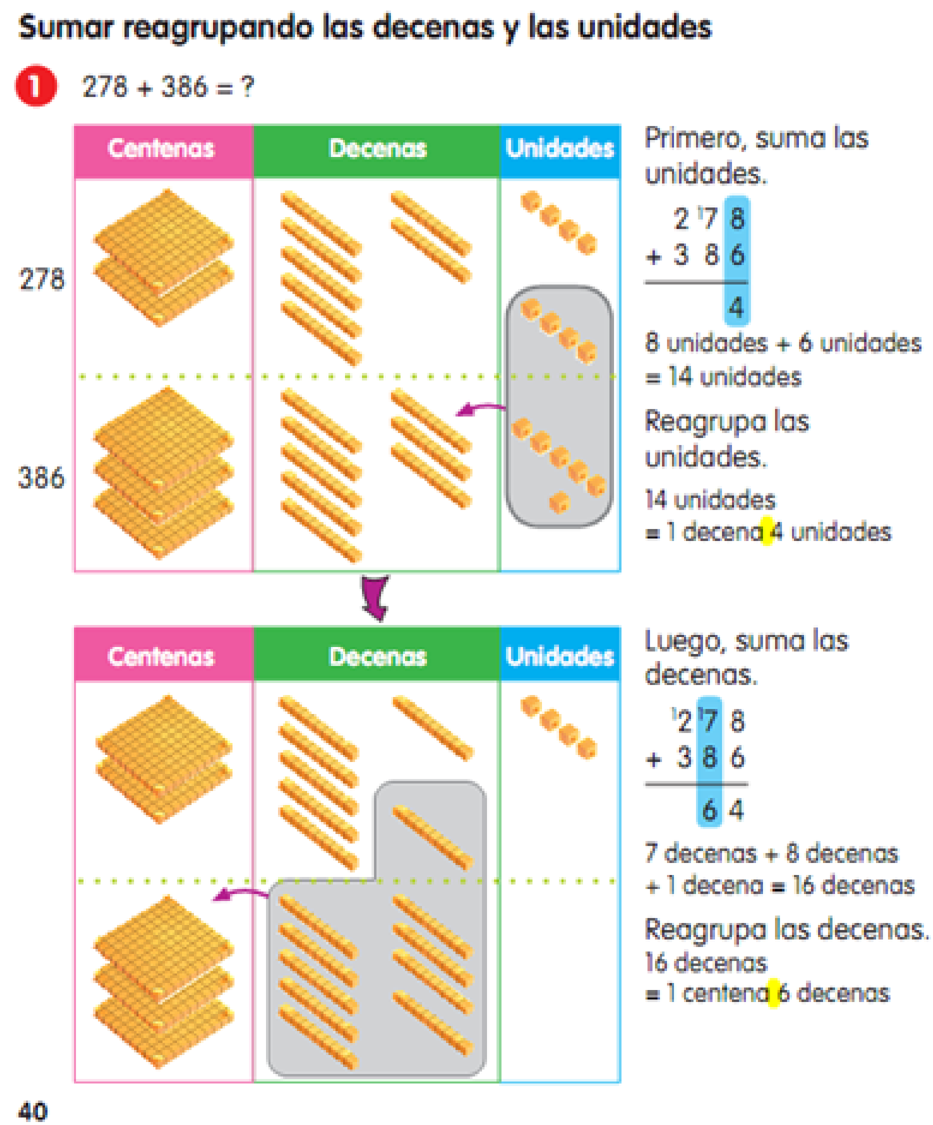




- El principal error en España: introducir demasiado pronto los algoritmos en columna (los tradicionales).

Algoritmos para la suma

$$
\begin{array}{rccccccc}
 & 1 & 1 & 1 & 1 & & 1 & \\
 & 2 & 8 & 3 & 7 & 4 & 4 & 6 \\
+ & & 9 & 8 & 3 & 7 & 4 & 5 \\
\hline
 & 3 & 8 & 2 & 1 & 1 & 9 & 1
\end{array}
$$



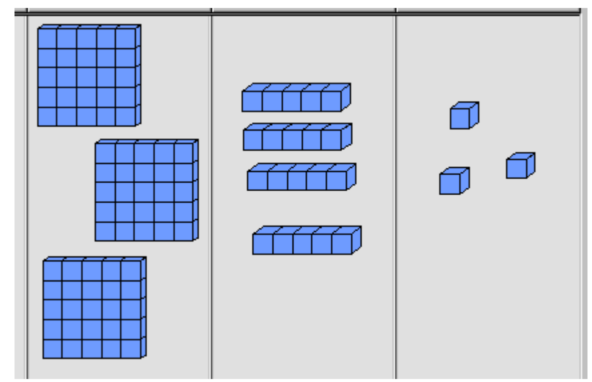
Una obviedad: no se trata solo del algoritmo, sino de cómo se presenta.

Sumar en base b

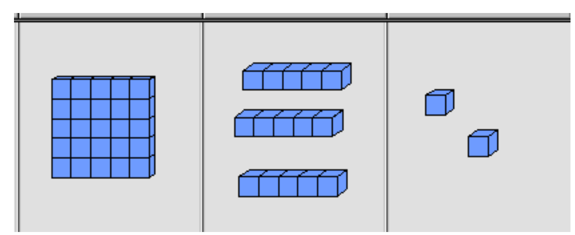
* Una buena forma de comprobar si entendemos las "llevadas" (reagrupamientos es un término más adecuado) es hacer esta suma en base 5.

$$
\begin{array}{cccc}
 & 3 & 4 & 3_{(5} \\
+ & 1 & 3 & 2_{(5} \\
\hline
\end{array}
$$

$3 \quad 4 \quad 3 \quad _{(5}$



$1 \quad 3 \quad 2 \quad _{(5}$



Imágenes obtenidas de National library of virtual manipulatives:
http://nlvm.usu.edu/en/nav/vlibrary.html

Numbers and operations → Base blocks

(Necesita Java)

Ejercicios

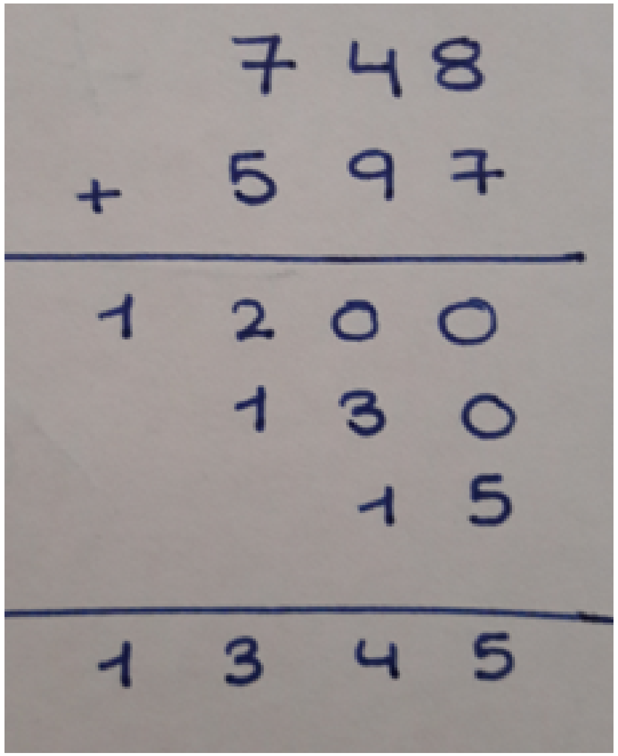
* Calcula esta suma en base 6, poniendo especial cuidado en comprobar que entiendes los reagrupamientos que haces.

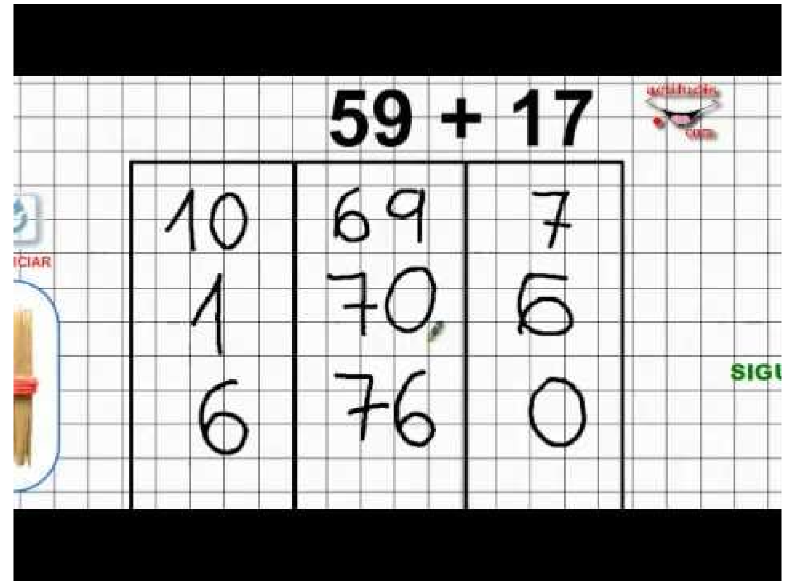
$$\begin{array}{rccccc} & 5 & 4 & 3 & 2 & 3_{(6} \\ + & 2 & 1 & 5 & 1 & 4_{(6} \\ \hline \end{array}$$

* Completa los recuadros en la siguiente suma de dos números en base 8.

$$\begin{array}{ccccccc} & 5 & \square & 2 & 6 & \square & _{(8} \\ + & \square & 2 & \square & 3 & 4 & _{(8} \\ \hline 1 & 3 & 0 & 4 & \square & 1 & _{(8} \end{array}$$

Algunas alternativas





Algoritmo ABN

* Calcula las siguientes sumas con estos dos algoritmos, y analiza sus ventajas e inconvenientes.

a) $89 + 75$ b) $528 + 849$

Aritmética elemental: suma y resta

* La suma es una operación interna en $\mathbb{N}$.

Aritmética elemental: suma y resta

- La suma es una operación interna en $\mathbb{N}$.

- Propiedades: conmutativa, asociativa.

- Una vez definida la suma, la resta es fácil:

  Se dice que $a - b = c$ si $b + c = a$.

  Comentario: entender la resta así desde el principio tiene importantes ventajas didácticas. Por ejemplo, deja claro el papel análogo de b y c ("sustraendo" y "diferencia"). Más en didáctica.

- La resta no es una operación interna en $\mathbb{N}$.

- La resta nos permite definir un orden en $\mathbb{N}$:

  diremos que $a < b$ si $b - a \in \mathbb{N}$.

Algoritmos para la resta

* ¿Cómo funciona nuestro algoritmo tradicional?

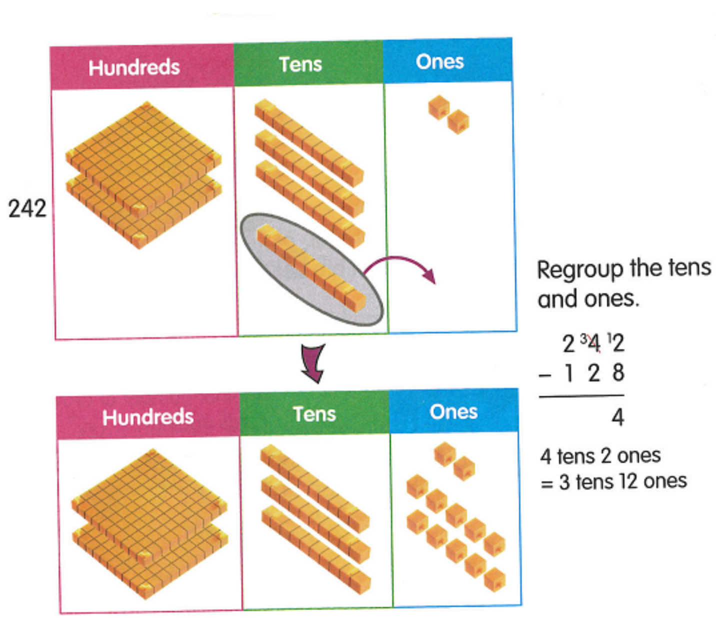
$$\begin{array}{r} 2\ 4\ 2 \\ -\quad 1\ 2\ 8 \\ \hline \end{array}$$

Algoritmos para la resta

* ¿Cómo funciona nuestro algoritmo tradicional?

$$\begin{array}{r} 2\ 4\ 2 \\ -\ 1\ 2\ 8 \\ \hline \end{array}$$

* Una alternativa (Asia, mundo anglosajón, llegando a algunos de nuestros coles)



$$\begin{array}{r} 2\ 4\ 2 \\ -\ 1\ 2\ 8 \\ \hline \end{array}$$

Restar en base b

* De nuevo, restar en base b es una buena forma de reflexionar sobre nuestro algoritmo tradicional.

$$\begin{array}{r} 3\quad 1\quad 2_{(5} \\ -\ 1\quad 3\quad 4_{(5} \\ \hline \end{array}$$

* Un pequeño inconveniente del algoritmo "internacional": los ceros en el minuendo.

$$\begin{array}{r} 3\quad 0\quad 1_{(4} \\ -\ 1\quad 2\quad 3_{(4} \\ \hline \end{array}$$

* Calcula esta resta en base 6, usando los dos algoritmos, y poniendo especial cuidado en comprobar que entiendes los reagrupamientos que haces.

$$\begin{array}{r} 5\quad 0\quad 2\quad 5\quad 3_{(6} \\ -\ 2\quad 3\quad 5\quad 1\quad 4_{(6} \\ \hline \end{array}$$

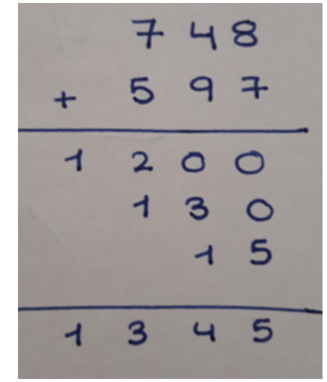
Ejercicio

* Rellena los huecos en la siguiente resta en base 9:

$$
\begin{array}{cccccc}
 & 7 & \square & 8 & 0 & 2_{(9} \\
- & 5 & 5 & \square & \square & 4_{(9} \\
\hline
 & 1 & 8 & 0 & 2 & \square_{(9}
\end{array}
$$

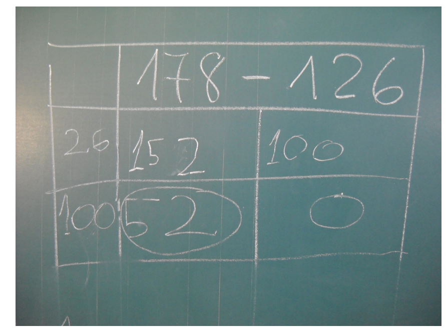
¿Algoritmos alternativos?

* ¿Existe para la resta un análogo de este algoritmo para la suma?



* Algoritmo ABN para la resta.

437 - 248		
QUITO	QUEDAN POR QUITAR	RESTAN
235	13	202
10	3	192
3	0	189



* Calcula estas dos restas usando algoritmos ABN.

a) $104 - 49$ b) $824 - 347$

* ¿Crees que tiene sentido hacer restas en base b usando algoritmos ABN? ¿Por qué?

Cálculo mental – ¿Cálculo natural?

* Está en el currículo.

  En general, se trabaja poco en las aulas.

* Es muy importante para desarrollar el sentido numérico.

* Lo practicaremos en clase, con ejemplos como estos:

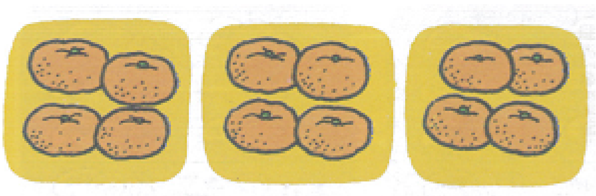
a) $89 + 43$ b) $56 + 35$ c) $83 - 28$ d) $79 - 42$

* No se trata de aprender de memoria trucos, sino de desarrollar técnicas propias.

* El error que no se puede cometer: tratar de imitar mentalmente los algoritmos tradicionales.

La multiplicación

* ¿Cómo introducirla en primaria?

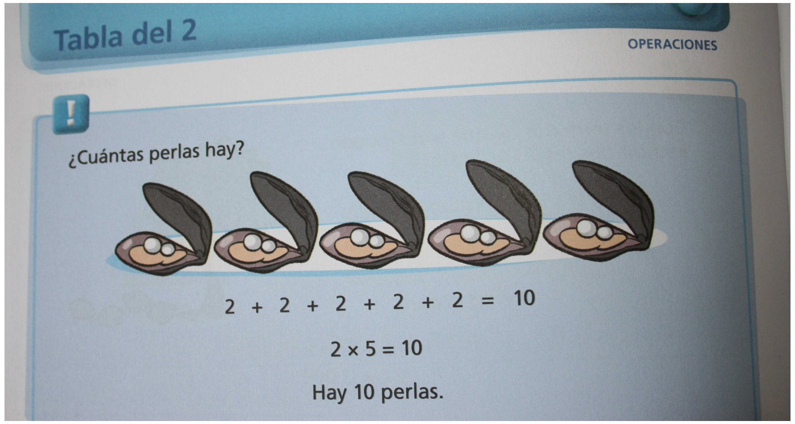


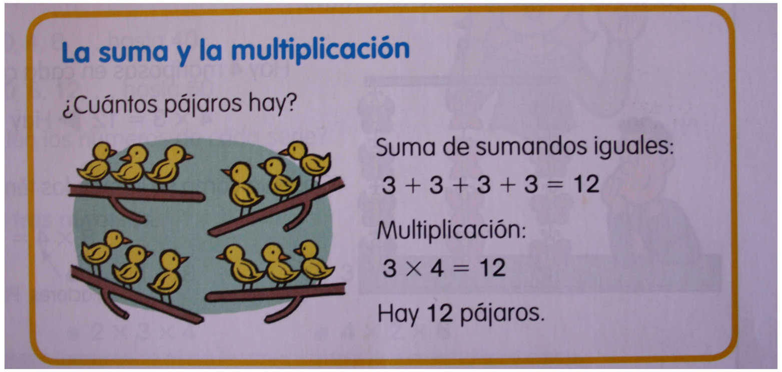
Tenemos 3 platos con 4 rosquillas en cada plato. ¿Cuántas rosquillas tenemos en total?

* Tenemos $4+4+4$ rosquillas, es decir, 3 veces 4 rosquillas.

¿ 3 veces 4 $\leftrightarrow$ 3×4 ?

* En los libros de texto





La multiplicación

- Veamos qué ocurre si asumimos que:
  a) 3×4 significa 3 veces 4.
  b) en la tabla del 2, “contamos de dos en dos”.

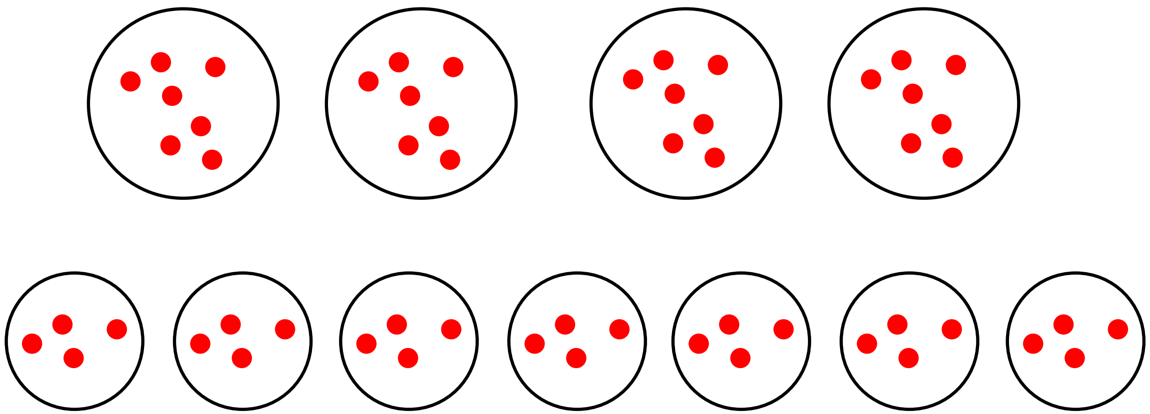
- La tabla del 2, con “veces” en vez de “por”, quedaría ...

- Conclusión: el orden tradicional de las tablas no concuerda con la introducción natural de la multiplicación.

- Más en didáctica.

Propiedades de la multiplicación

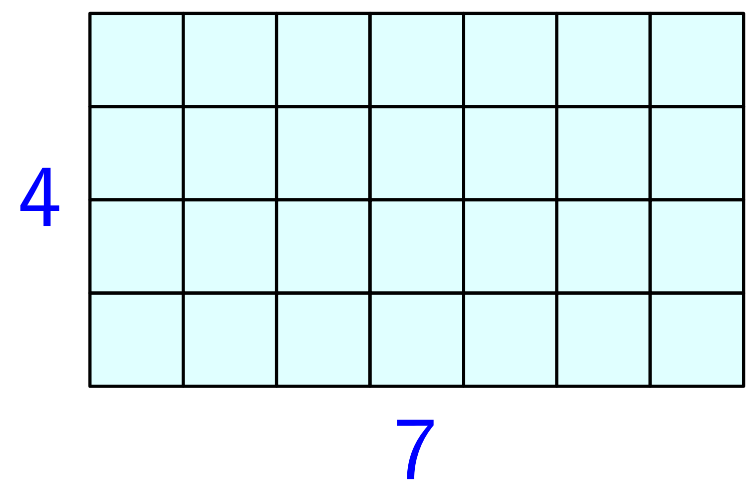
- Conmutativa: $a \times b = b \times a$.
- Ojo: no es nada intuitivo que 4 veces 7 sea igual que 7 veces 4 ....



4 veces 7 $\leftrightarrow 4 \times 7$

7 veces 4 $\leftrightarrow 7 \times 4$

- La geometría puede ayudar en la introducción y comprensión de las propiedades.



Propiedad distributiva

* Propiedad distributiva:

$$a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$$
$$(a + b) \times c = (a \times c) + (b \times c)$$

* ¿Qué sentido tiene en primaria?

* En los libros de texto ...

$$7 \times (3 + 5) \quad = \quad 7 \times 3 + 7 \times 5$$

$$7 \times 8 \qquad\qquad 21 \; + \; 35$$

$$56 \qquad\qquad\qquad 56$$

¿Para qué?

Propiedad distributiva

* Sirve para dos cosas:
  i) manipulaciones algebraicas: $2(x+3) = 2x+6$

  ii) cálculo natural (pensado, mental):

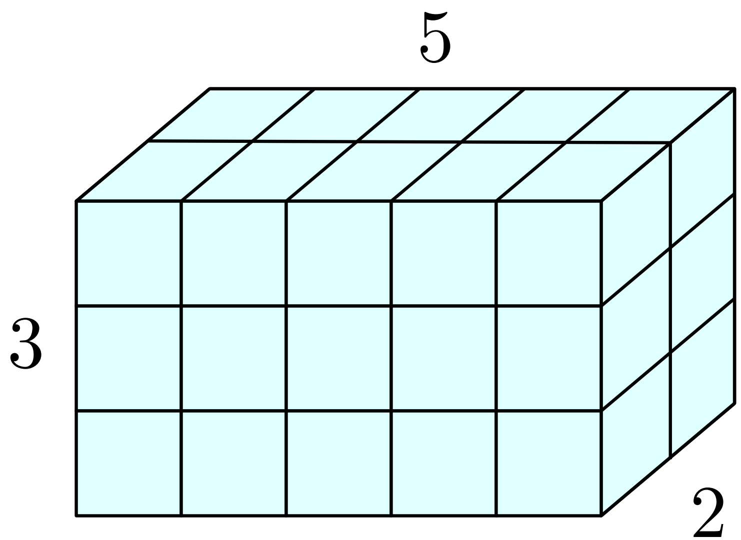
$$13 \times 8 = (10+3) \times 8 = 80 + 24 = 104$$

* ¿Sabéis por qué funciona el algoritmo tradicional?

$$\begin{array}{r} 3\,8\,2 \\ \times \quad 2\,6 \\ \hline 2\,2\,9\,2 \\ +\ 7\,6\,4 \\ \hline 9\,9\,3\,2 \end{array}$$

Una última propiedad

- Propiedad asociativa: $a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$



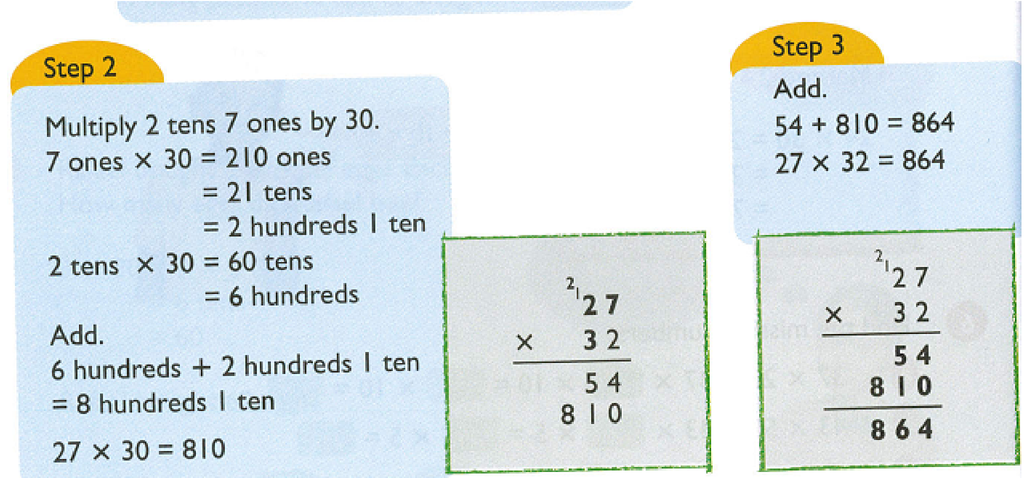
$$2 \times (3 \times 5) = (2 \times 3) \times 5$$

- Un ejemplo en forma de problema de primaria: Tenemos dos sacos, en cada saco hay tres bolsas, y en cada bolsa hay cuatro caramelos. ¿Cuántos caramelos hay en total?

- Un error frecuente: $2 \times (3 \times 5) =$

Otros algoritmos para la multiplicación

* El tradicional "explicado" (Singapur, 4º de Primaria)



Step 2

Multiply 2 tens 7 ones by 30.
7 ones × 30 = 210 ones
= 21 tens
= 2 hundreds 1 ten
2 tens × 30 = 60 tens
= 6 hundreds
Add.
6 hundreds + 2 hundreds 1 ten
= 8 hundreds 1 ten
27 × 30 = 810

$$\begin{array}{r} {}^{2}{}_{1}27 \\ \times\ \ 32 \\ \hline 54 \\ 810 \end{array}$$

Step 3

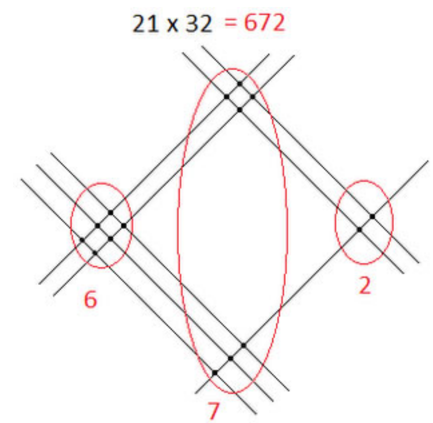
Add.
54 + 810 = 864
27 × 32 = 864

$$\begin{array}{r} {}^{2}{}_{1}27 \\ \times\ \ 32 \\ \hline 54 \\ 810 \\ \hline 864 \end{array}$$

MULTIPLICANDO DESCOMPUESTO EN UNIDADES	MULTIPLICADOR POR DECENAS	MULTIPLICADOR POR UNIDADES	PRODUCTOS PARCIALES	PRODUCTO ACUMULADO
	70	4		
200	14000	800	14800	
80	5600	320	5920	20720
5	350	20	370	21090

Algoritmo ABN

285×74



Algoritmo maya

21×32

Ejercicios

* Analiza por qué funcionan el algoritmo ABN y el maya.

* Haz esta multiplicación con estos dos algoritmos, y piensa en sus ventajas e inconvenientes (comparándolos entre ellos, y con respecto al tradicional).

$$45 \times 36 =$$

* Sabiendo que $652 \times 68 = 44336$, usa la propiedad distributiva para calcular esta otra multiplicación sin hacer más cuentas de las necesarias:

$$662 \times 68 =$$

* ¿Sabrías comparar el resultado de estas dos multiplicaciones, sin necesidad de calcular los resultados?

$$835 \times 374 \quad \begin{matrix} < \\ > \end{matrix} \quad 834 \times 375$$

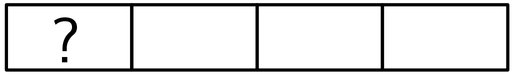
La división

- Un primer comentario: es importante distinguir la idea de división y el algoritmo de la división.

- Si un niño de 6 años lleva 8 caramelos al cole y quiere repatirlos (por igual) con un amigo, ¿sabe hacerlo?

- Esta idea de reparto es la mejor para introducir la división: se trata de la división partitiva.

  - Si repartimos 20 caramelos en 4 bolsas iguales, ¿cuántos caramelos habrá en cada bolsa?



La división

* Existe otra interpretación de la división: Si repartimos 20 caramelos en bolsas con 5 caramelos cada una, ¿cuántas bolsas necesitaremos?

5	. . . ? . . .

* Esta es la división cuotativa o división de “hacer grupos” (No se trabaja lo suficiente en nuestras aulas).
  Relación con medida: ¿cuántas veces “cabe” 5 en 20?

La división - Dos significados

* Dos observaciones:
  i) Una forma sencilla de distinguirlas: piensa en cómo resolvería el problema una persona sin conocimientos matemáticos.

  ii) En la división cuotativa, el divisor puede ser un número no entero: Un grupo de amigos compra 6 pizzas, y se las reparten por igual. Si cada amigo come $2/3$ de pizza, ¿cuántos amigos son en el grupo?

1. Contesta la pregunta anterior recurriendo a tus conocimientos sobre fracciones.

2. Busca un argumento que se pueda usar para explicar la solución a un alumno que empieza 4º de primaria. (Solo conoce el concepto de fracción, no la aritmética).

La división

* Un buen ejercicio para proponer en clase (en primaria), para entender los dos tipos de divisiones:

  Inventa dos problemas (uno de cada tipo) cuya solución contenga la división $72 \div 6$.

* Otra idea importante, que hay que trabajar con calma, es la división como inversa de la multiplicación:

  Como $5 \times 4 = 20$, $20 \div 5 = 4$ y $20 \div 4 = 5$.

* ¿Por qué no se puede definir la división por 0?

$$5 \div 0 = ? \quad \leftrightarrow \quad ? \times 0 = 5 \qquad \text{no hay solución}$$

$$0 \div 0 = ? \quad \leftrightarrow \quad ? \times 0 = 0 \qquad \text{infinitas soluciones}$$

* Más en didáctica.

División con resto

* División entera (con resto, o euclídea)

  Dados dos números naturales D (dividendo) y d (divisor), existen unos únicos números naturales q (cociente) y r (resto) tales que

$$D = q \times d + r \quad \text{y} \quad 0 \leq r \leq d - 1$$

  .

* Idea de cualquier algoritmo de división:

  Aproximar por defecto el dividendo por múltiplos del divisor.

$$16 = \boxed{} \times 3 + \underset{\substack{\wedge \\ 3}}{\boxed{}}$$

Problemas

* Piensa dos problemas donde los datos sean 27 y 4. En uno de ellos, la solución debe ser 6, y en el otro debe ser 7.

* Un aspecto que no se trabaja lo suficiente: problemas donde el resto sea lo importante.

  Un astronauta hizo un viaje de 505 horas. Si despegó a las 8 de la mañana, ¿qué hora era cuando aterrizó?

* Sabiendo que $635 \times 97 = 61595$, explica cómo podrías calcular el cociente y el resto que resulta de dividir 61695 entre 97 sin necesidad de ninguna operación larga.

* Si te dicen que al dividir 64757 entre 439 el cociente es 147 y el resto es 224, ¿cuál es el cociente y el resto que resulta de dividir 64757 entre 147?

Algoritmos de división

- Algoritmos tradicionales para la división:

Algoritmo “extendido”

$$
\begin{array}{rrr|rr}
6 & 4 & 0 & 2 & 3 \\ \cline{4-5}
-4 & 6 & & 2 & 7 \\ \cline{1-2}
1 & 8 & 0 & & \\
-1 & 6 & 1 & & \\ \cline{1-3}
 & 1 & 9 & &
\end{array}
$$

Algoritmo “usual” (“comprimido”)

$$
\begin{array}{rrr|rr}
6 & 4 & 0 & 2 & 3 \\ \cline{4-5}
1 & 8 & 0 & 2 & 7 \\
 & 1 & 9 & &
\end{array}
$$

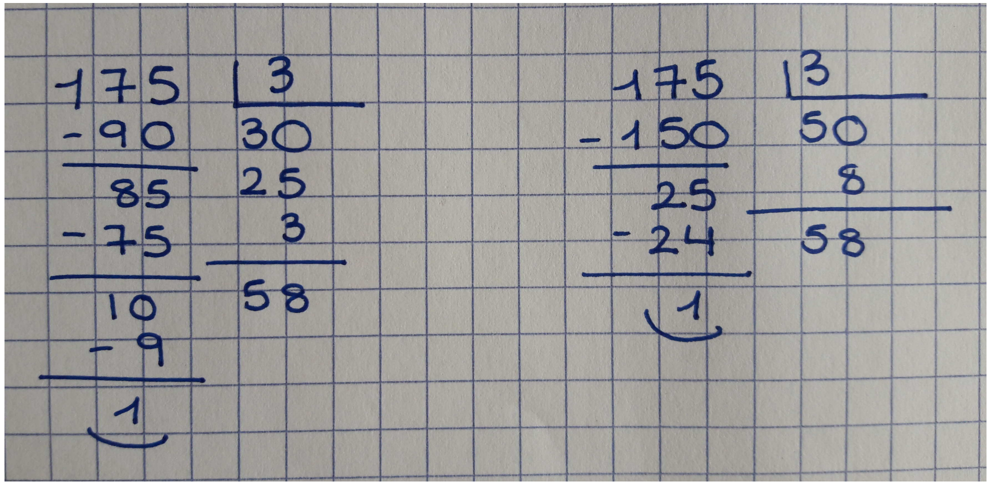
¿Otros algoritmos?

ABN

DIVIDENDO	DIVIDENDO RESULTANTE	COCIENTES PARCIALES
		6
7899	6000	1000
1899	1800	300
99	60	10
39	36	6
3		
7896 : 6 =		1316

		: 57
19.368	17.100	300
2.268	1.710	30
558	513	9
45		339

Una propuesta



Ejercicios

* Haz estas dos divisiones usando el último algoritmo propuesto. Asegúrate de entender el significado de cada etapa del cálculo

$$97 \div 4 \qquad\qquad 835 \div 37$$

* Un tema para la reflexión: Además de pensar en qué algoritmo enseñar, habría que reflexionar sobre el valor formativo de los algoritmos de división.

  En muchos países los divisores de dos (o más) cifras han desaparecido del currículo de primaria.

Ejercicios

1. ¿Qué ocurre con cociente y resto cuando dividendo y divisor se multiplican (o dividen) por el mismo número?

2. Sabiendo que $4185 = 45 \times 93$, encuentra de manera razonada el cociente y el resto de dividir 41862 entre 930.

3. Escribe 3 números de 4 cifras que tengan resto 7 al dividir entre 19.

4. Encuentra el menor número que es mayor que 300 y que tiene resto 7 al dividirlo entre 29.

La calculadora (y otros dispositivos)

* Está en el currículo, y habría que integrarla en el aula.

  aunque solo sea para que no ocurra esto:
  https://www.youtube.com/watch?v=zclITKd4ivQ

* Usa tu calculadora para averiguar tu índice de masa corporal.

  (La estatura es en metros)

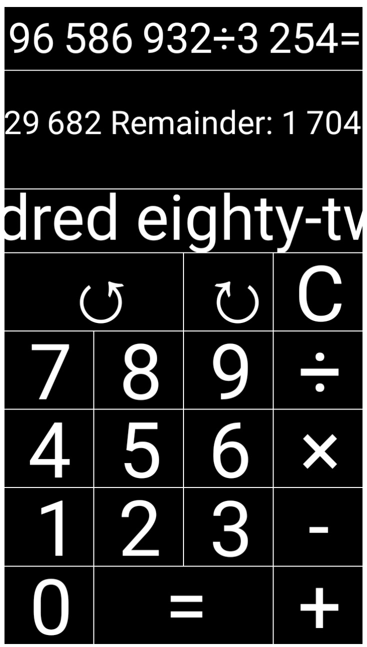
* Dos aspectos distintos:
  (1) su uso para hacer operaciones “complicadas”, o para comprobar resultados.
  (2) su utilidad en el diseño de actividades de aprendizaje.

La calculadora (y otros dispositivos)

* División con resto en una calculadora “usual”.

$$29374 \div 387 \approx 75{,}902$$

* Otras alternativas:



Whole calculator (gratis)

Calculadora natural (73 c)

(Android)

https://www.wolframalpha.com/

Un ejemplo de actividad de aprendizaje

* Calculadoras estropeadas.

Instituto Freudenthal:
http://www.fisme.science.uu.nl/toepassingen/03363/