

Tema 1: Los números naturales

- * ¿Qué vamos a estudiar en este tema?
 1. Sistemas numéricos. La notación posicional.
 2. Aritmética elemental. Algoritmos y propiedades.
 3. El lenguaje algebraico y el razonamiento abstracto.
 4. Divisibilidad. Números primos. Máximo común divisor y mínimo común múltiplo.


Los números naturales

- * $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5 \dots\}$
- * Origen: necesidad de “contar” .
- * Problema: representación (oral y escrita) de números “grandes” .

Tipos de sistemas de numeración

1. Sistemas aditivos

- * El número se obtiene sumando el valor de los símbolos que lo componen.

| | | |
|-----------|--------|-------------------------------------------------------------------------------------|
| | | Sistema jeroglífico egipcio (aprox. 2000 aC) base 10 |
| 1 | - | |
| 10 | ∩ | |
| 100 | ∩∩ | |
| 1 000 | ∩∩∩ | Ejemplo: |
| 10 000 | ∩∩∩∩ |  |
| 100 000 | ∩∩∩∩∩ | 200 000 3000 80 |
| 1 000 000 | ∩∩∩∩∩∩ | 40 000 600 8 |
| | | 243 688 |

Imágenes de <http://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/welcome.htm>

- * Numeración griega: I = 1, II = 5, Δ = 10, H = 100, X = 1000 y M = 10000 (la romana procede de ella).

Sistemas de numeración

2. Sistemas aditivo-multiplicativos

- * Si hay que repetir varias veces un número, eso se indica con otro número.

Un ejemplo: el sistema chino

| | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|-----|-------|--------|
| 一 | 二 | 三 | 四 | 五 | 六 | 七 | 八 | 九 | 十 | 百 | 千 | 萬 |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 100 | 1 000 | 10 000 |

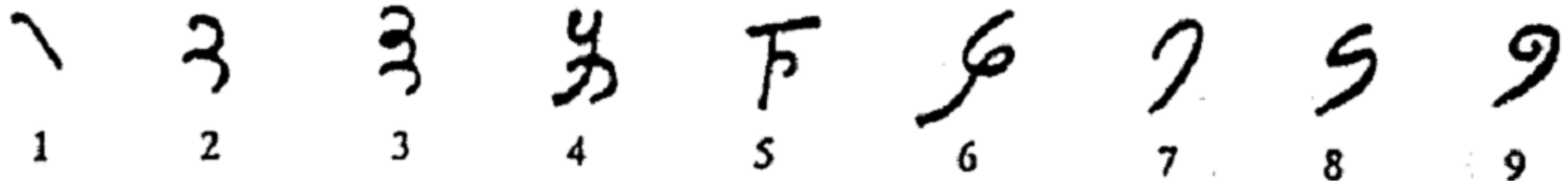
De esta manera se evitan repeticiones fastidiosas pues los números que preceden a las potencias de la base indican cuántas veces deben repetirse éstas. Por ejemplo, el número 79564 se escribiría:

$$\begin{array}{l} \text{七 萬 九 千 五 百 六 十 四} \\ \text{qī wàn jiǔ qiān wǔ bǎi liù shí sì} \\ \hline 7 \cdot 10000 + 9 \cdot 1000 + 5 \cdot 100 + 6 \cdot 10 + 4 \\ \hline \mathbf{79\ 564} \end{array}$$

Sistemas de numeración

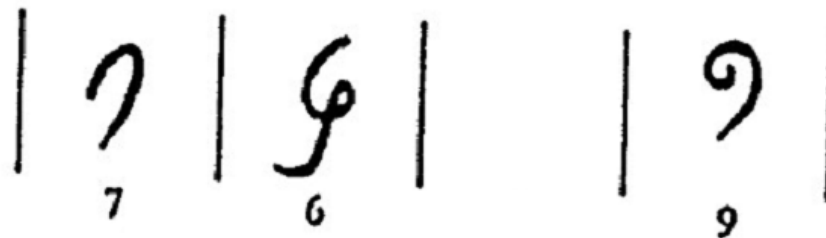
3. Sistemas multiplicativos (como el nuestro)

- * Tiene su origen en el **sistema hindú**. Los símbolos del sistema hindú eran



(y unos símbolos adicionales para las potencias de 10).

- * Entre los siglos V y VIII se prescindía de los símbolos para las potencias de 10, pero se utilizan unas barras:



Sistemas de numeración

- * El **cero**.

El nombre proviene del sánscrito **shunya** (vacío), en árabe se llamó **sifr** Nuestra palabra **cifra** viene de ahí.

Nuestro sistema de numeración llega a Europa a través de los árabes. **Al-Jwarizmi** escribió el libro “**Acerca de los cálculos con los números de la India**” alrededor del año 825.

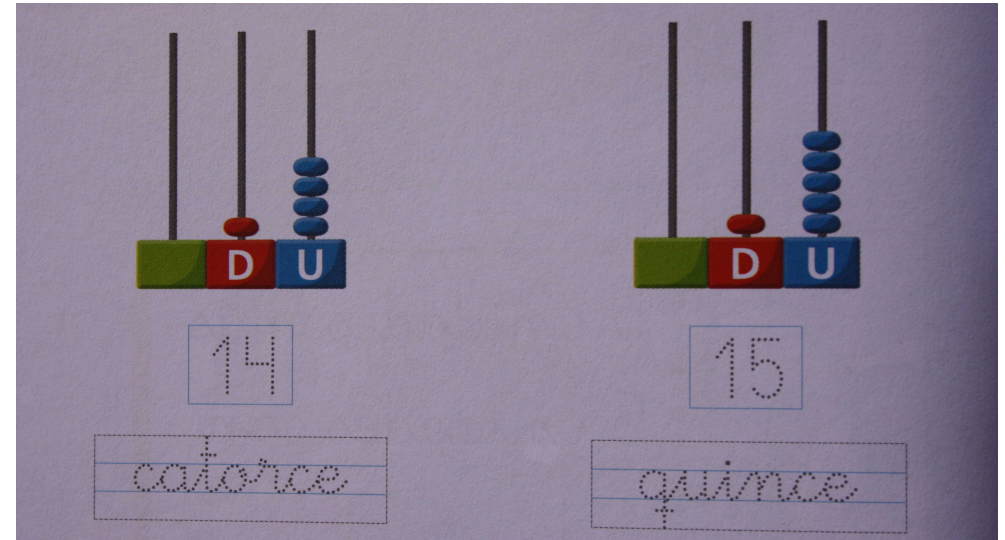
- * A partir de la introducción del nuevo sistema de numeración, la **aritmética** se desarrolla de forma muy rápida.

La introducción del número de dos cifras

- * Enfoque tradicional (1º de primaria):
 - Tema 0: repaso de los números del 0 al 9.
 - Tema 1: los números del 10 al 19.
 - Tema 2: los números del 20 al 29.
 - ...
- * Inconveniente: Falta de **sentido numérico**.

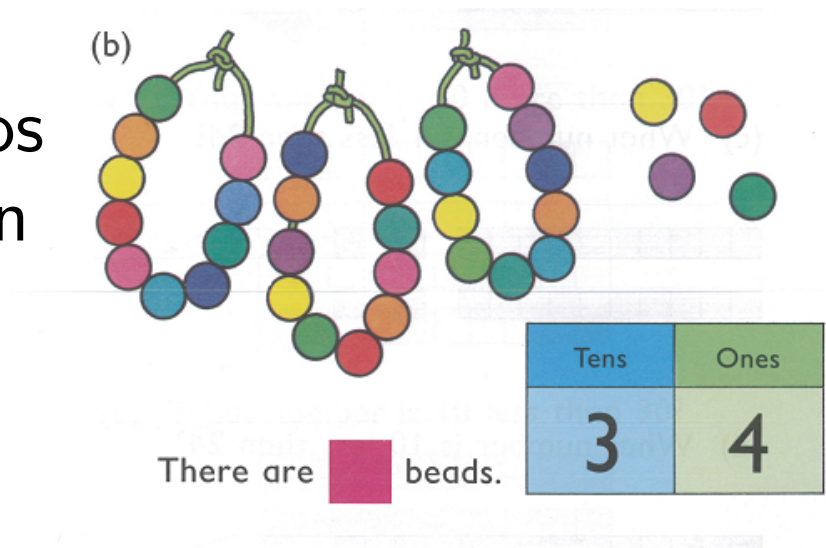
Decenas y unidades en nuestros libros de texto

- * Casi siempre, el enfoque de la figura:



- * Es mejor, durante un tiempo, mostrar las decenas como grupos de diez, explícitamente, como en la figura:

(El ejemplo es de la segunda mitad del primer curso de un libro de Singapur).



Una comparación

* Comparemos estos dos ejemplos:

Un libro español de 2º

1 Observa el ejemplo y completa la tabla.

| Número | C | D | U | Descomposición |
|--------|---|---|---|----------------|
| 197 | 1 | 9 | 7 | $100 + 90 + 7$ |
| 150 | | | | |
| 144 | | | | |
| 186 | | | | |

2 ¿Cómo se lee el número? Suma y completa.

$100 + 50 + 3 = \square \rightarrow$ _____

$100 + 60 + 2 = \square \rightarrow$ _____

$100 + 20 + 9 = \square \rightarrow$ _____

28 • veintiocho

Un libro de Singapur de 3º

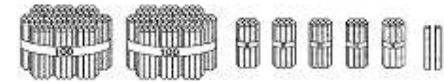
3. Write the numbers.

(d)



$$100 + 70 + 5 = \underline{\hspace{2cm}}$$

(b)



$$200 + 50 + 3 = \underline{\hspace{2cm}}$$

(c)



$$200 + 40 = \underline{\hspace{2cm}}$$

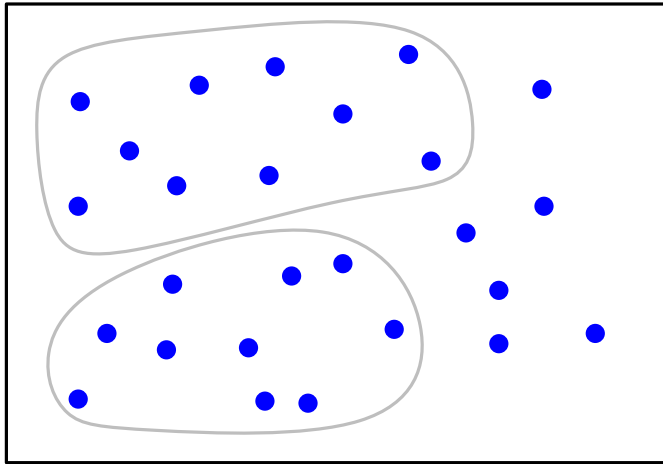
(d)



$$400 + 7 = \underline{\hspace{2cm}}$$

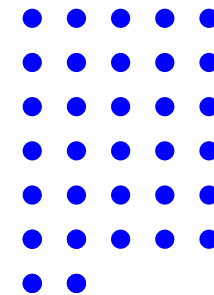
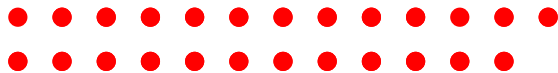
La introducción del número de dos cifras

- * Enfoque alternativo: contamos “haciendo grupos de diez” .



Hay dos “grupos de diez” y 6 (o diez, diez y 6).

- * Además, se puede practicar el recuento con ejemplos que ayudan a profundizar en ese **sentido numérico**.



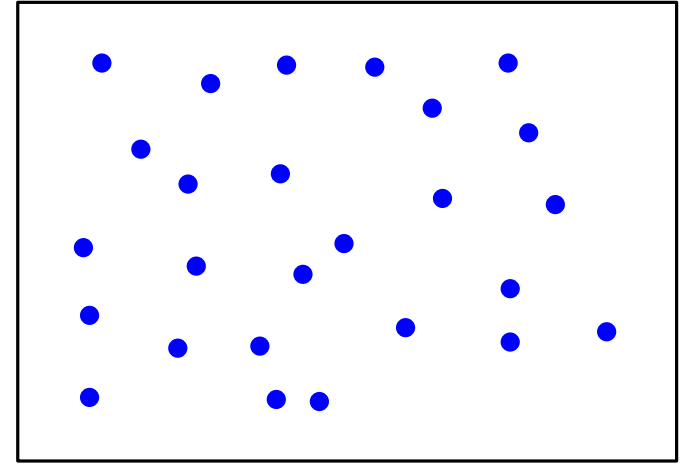
La introducción del número de dos cifras

- * Una vez practicado el recuento de manera intensiva, ya se puede:
 - 3 grupos de diez y 5 unidades (unos) se escribe **35**.
 - el grupo de diez se llama **decena**.
 - introducir el **cero**.
- * Un alumno que ha seguido este proceso está en condiciones de contestar a la pregunta:
¿cuántas son $32 + 20$?
- * Estos temas (y su relación con la introducción de los algoritmos de suma y resta) serán ampliados en la asignatura de didáctica de las matemáticas (3°).

La base b

* ¿Por qué contamos en base diez (haciendo “grupos de diez”)?

* ¿Cómo representaríamos la cantidad de la figura si tuviéramos 8 dedos?



* Como $26 = 3 \times 8 + 2$, en base 8 el número 26 se representa como $32_{(8)}$.

* **Ejercicio:** Piensa ahora cómo escribirías el número 26 en base 5.

Base b : ejercicios

* ¿Por qué estudiar la base b ?

- Interés didáctico.
- Conexión de las matemáticas con el mundo más próximo: informática.

* Ejercicios:

1. Escribe los cinco primeros números naturales en base 2.
2. Escribe (en base 4) los 10 números siguientes a $223_{(4)}$.
3. ¿Cómo se pasa de base 10 a base b , y al revés?
 - a) Escribe $354_{(7)}$ en base 10.
 - b) Escribe 92 en base 3.

El sistema de numeración oral

* Números cardinales.

Escribe en letra

★ 87 065 006.

★ 72 080 023 002 305 006.

Expresa en forma numérica **veintitres mil cuarenta y tres billones, doscientos cuatro mil dos millones, veinte mil cuatro.**

Más información, por ejemplo, aquí:

<http://goo.gl/XJiZo> (Wikipedia)

* Números ordinales.

Escribe en letra los ordinales 37° , 76° , 85° , 94° , 101° .

La recta numérica

- * Una ayuda excelente para desarrollar el sentido numérico (a todos los niveles).
- * Por ejemplo: al final de 1º, o en 2º.

Sitúa (de forma aproximada) los números 87, 6, 25, 48.



- * Hacia el final de primaria: sitúa (de forma aproximada) los números 870100, 6005, 250037, 48025.



La suma - Concepto y algoritmos

- * Demasiadas veces se identifica el estudio de la suma con el estudio del algoritmo tradicional para su cálculo.

$$\begin{array}{r} 1 \\ + 37 \\ \hline 25 \\ \hline 62 \end{array}$$

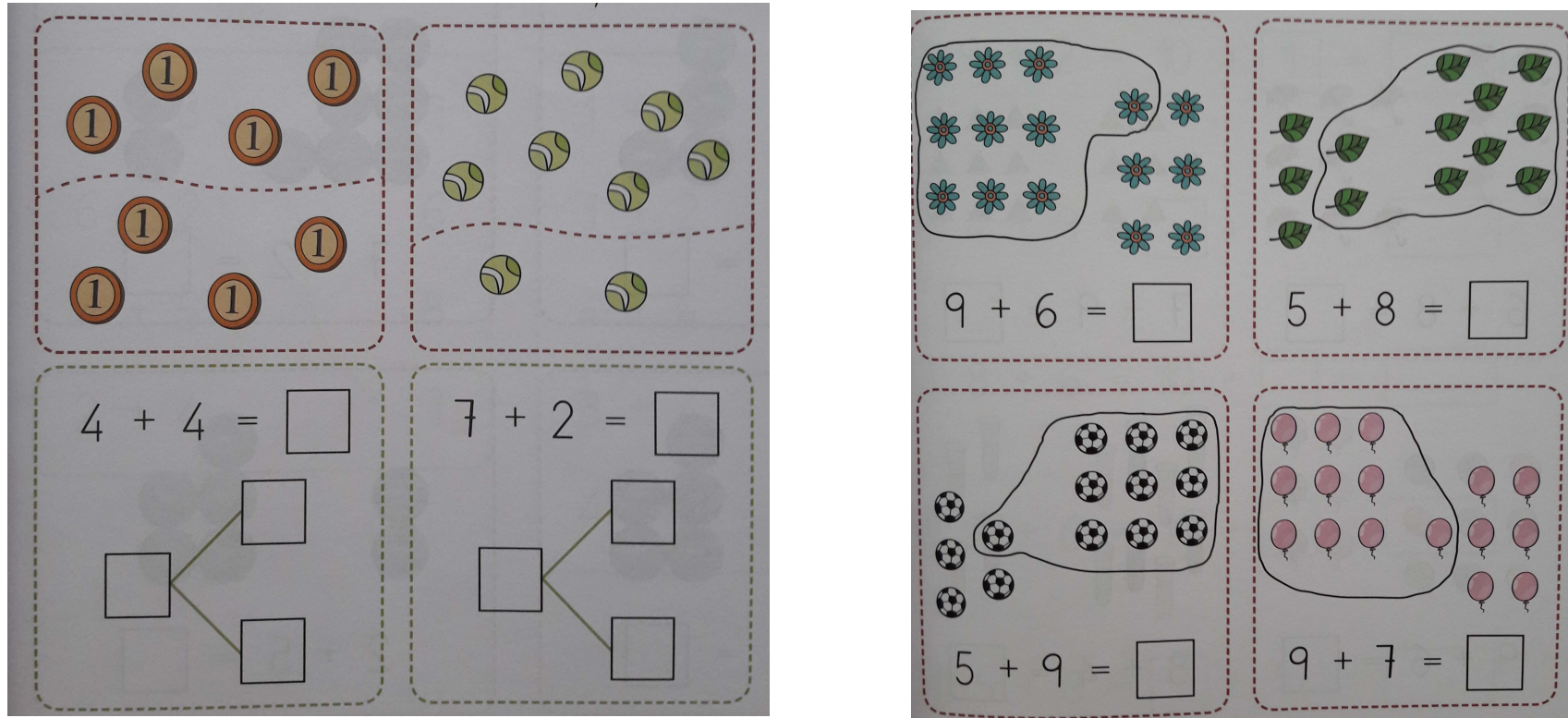
$$\begin{array}{r} 11 \\ + 813674 \\ \hline 452895 \\ \hline 1266569 \end{array}$$

- * Antes de continuar, merecería la pena reflexionar sobre el papel de la aritmética tradicional en la educación primaria del siglo XXI.

Más ideas, menos cuentas: La aritmética en primaria

Un comentario sobre didáctica

- * Antes de trabajar el algoritmo de la suma, es importante haber desarrollado el suficiente **sentido numérico**.



- * El principal error en España: introducir demasiado pronto los **algoritmos en columna** (los tradicionales).

Algoritmos para la suma

$$\begin{array}{r} 1\ 1\ 1\ 1\ 1 \\ 2\ 8\ 3\ 7\ 4\ 4\ 6 \\ +\ 9\ 8\ 3\ 7\ 4\ 5 \\ \hline 3\ 8\ 2\ 1\ 1\ 9\ 1 \end{array}$$

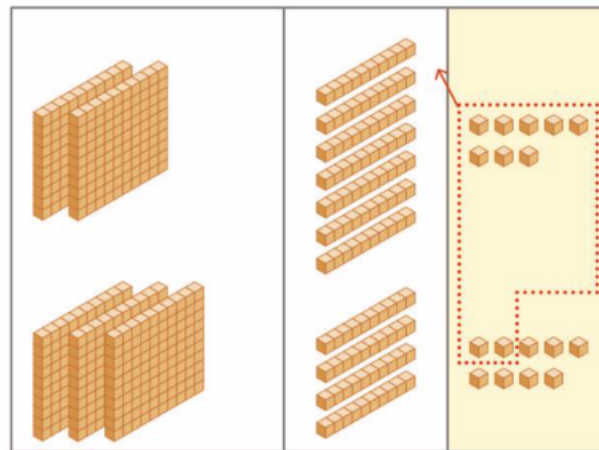
Una obviedad: no se trata solo del algoritmo, sino de cómo se presenta.

Paso 1. Suma las unidades.

8 unidades + 9 unidades = 17 unidades

Reagrupa las unidades.

17 unidades = 1 decena + 7 unidades

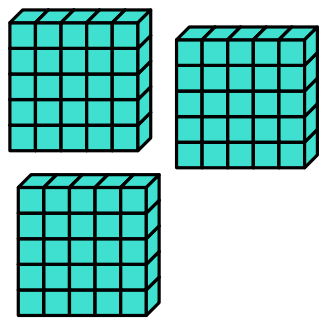
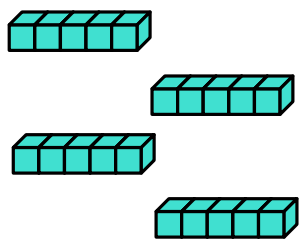
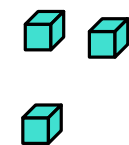
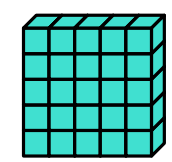
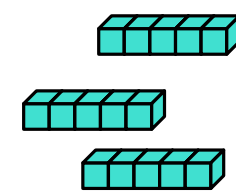



| C | D | U |
|-----|---|----|
| 2 | 7 | 8 |
| + 3 | 4 | 9 |
| | | 17 |

Imagen tomada del libro "Piensa Infinito", 2.ºP, Ed. SM

Sumar en base b

- * Una buena forma de comprobar si entendemos las “llevadas” (**reagrupamientos** es un término más adecuado) es hacer esta suma en base 5.

| grupos de 5^2 | grupos de 5 | unidades |
|-------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------|
|  |  |  |
|  |  |  |

$$\begin{array}{r}
 3 \quad 4 \quad 3 \quad (5 \\
 + \quad 1 \quad 3 \quad 2 \quad (5 \\
 \hline
 \end{array}$$

Tabla de **valor posicional**

<https://mathsbot.com/manipulatives/blocks>

Ejercicios

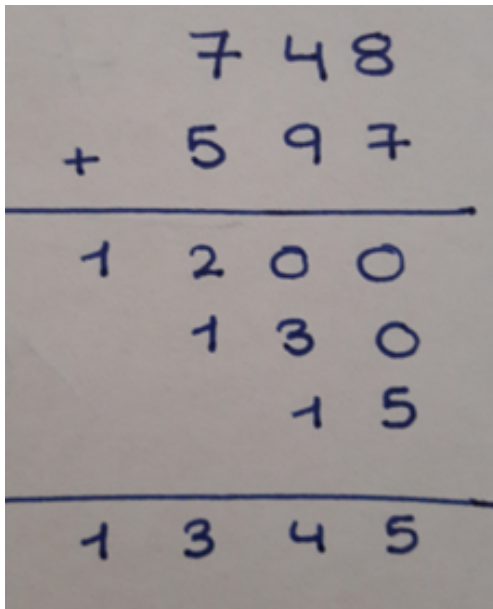
- * Calcula esta suma en base 6, poniendo especial cuidado en comprobar que entiendes los reagrupamientos que haces.

$$\begin{array}{r} 5 \quad 4 \quad 3 \quad 2 \quad 3 \quad (6 \\ + \quad 2 \quad 1 \quad 5 \quad 1 \quad 4 \quad (6 \\ \hline \end{array}$$

- * Completa los recuadros en la siguiente suma de dos números en base 8.

$$\begin{array}{r} 5 \quad \square \quad 2 \quad 6 \quad \square \quad (8 \\ + \quad \square \quad 2 \quad \square \quad 3 \quad 4 \quad (8 \\ \hline 1 \quad 3 \quad 0 \quad 4 \quad \square \quad 1 \quad (8 \end{array}$$

Algunas alternativas



| 36 + 43 | | |
|---------|--------|------|
| | Quedan | Suma |
| | 36 | 43 |
| 6 | 30 | 49 |
| 1 | 29 | 50 |
| 9 | 20 | 59 |
| 20 | 0 | 79 |

| 36 + 43 | | |
|---------|--------|------|
| | Quedan | Suma |
| | 36 | 43 |
| 10 | 26 | 53 |
| 16 | 10 | 69 |
| 10 | 0 | 79 |

Algoritmo ABN

* Calcula las siguientes sumas con estos dos algoritmos, y analiza sus ventajas e inconvenientes.

a) $89 + 75$

b) $528 + 849$

Aritmética elemental: suma y resta

- * La suma es una **operación interna** en \mathbb{N} .

Aritmética elemental: suma y resta

- * La suma es una **operación interna** en \mathbb{N} .
- * Propiedades: **conmutativa**, **asociativa**.
- * Una vez definida la suma, la resta es fácil:

Se dice que $a - b = c$ si $b + c = a$.

Comentario: entender la resta así desde el principio tiene importantes ventajas didácticas. Por ejemplo, deja claro el papel análogo de b y c (“sustraendo” y “diferencia”). Más en didáctica.

- * La resta **no es una operación interna** en \mathbb{N} .
- * La resta nos permite definir un **orden** en \mathbb{N} :
diremos que $a < b$ si $b - a \in \mathbb{N}$.

Algoritmos para la resta

- * ¿Cómo funciona nuestro algoritmo tradicional?

$$\begin{array}{r} 242 \\ - 128 \\ \hline \end{array}$$

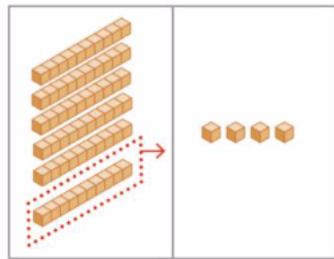
Algoritmos para la resta

- * ¿Cómo funciona nuestro algoritmo tradicional?

$$\begin{array}{r} 242 \\ - 128 \\ \hline \end{array}$$

- * Una alternativa (Asia, mundo anglosajón, llegando a nuestras aulas)

Paso 1. Desagrupa 1 diez en 10 unos.



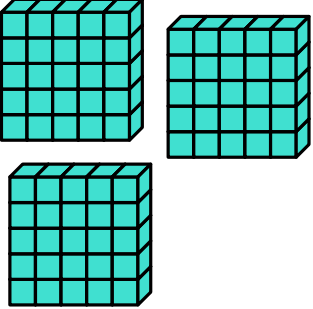


| dieces | unos |
|--------------|--------------|
| 5 | 14 |
| 6 | 4 |
| - 4 | 8 |

$$\begin{array}{r} 64 \\ - 48 \\ \hline \end{array}$$

Imagen tomada del libro "Piensa Infinito", 1.ºP, Ed. SM

Restar en base b

- * De nuevo, restar en base b es una buena forma de reflexionar sobre nuestro algoritmo tradicional.

| grupos de 5^2 | grupos de 5 | unidades |
|-----------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|
|  |  |  |

$$\begin{array}{r} 312_{(5)} \\ - 134_{(5)} \\ \hline \end{array}$$

Restar en base b

- * Un pequeño inconveniente del algoritmo “internacional”: los ceros en el minuendo.

$$\begin{array}{r} 3 \quad 0 \quad 1 \quad (4 \\ - 1 \quad 2 \quad 3 \quad (4 \\ \hline \end{array}$$

- * Calcula esta resta en base 6, usando los dos algoritmos, y poniendo especial cuidado en comprobar que entiendes los reagrupamientos que haces.

$$\begin{array}{r} 5 \quad 0 \quad 2 \quad 5 \quad 3 \quad (6 \\ - 2 \quad 3 \quad 5 \quad 1 \quad 4 \quad (6 \\ \hline \end{array}$$

Ejercicio

* Rellena los huecos en la siguiente resta en base 9:

$$\begin{array}{r} 7 \square 8 0 2_{(9)} \\ - 5 5 \square \square 4_{(9)} \\ \hline 1 8 0 2 \square_{(9)} \end{array}$$

¿Algoritmos alternativos?

- * ¿Existe para la resta un análogo de este algoritmo para la suma?

A handwritten addition problem on a piece of paper. The numbers 748 and 597 are aligned vertically with a plus sign to the left. A horizontal line is drawn below the numbers. The sum 1345 is written below the line, with carry-over digits (1, 1, 1) written above the corresponding digits of the sum.

- * Algoritmo ABN para la resta.

| 437 - 248 | | |
|-----------|--------|------------|
| Quito | Quedan | Restan |
| 8 | 240 | 429 |
| 29 | 211 | 400 |
| 100 | 111 | 300 |
| 11 | 100 | 289 |
| 100 | 0 | 189 |

| 437 - 248 | |
|-----------|------------|
| Tengo | Pongo |
| 260 | 12 |
| 360 | 100 |
| 400 | 40 |
| 430 | 30 |
| 437 | + 7 |
| | 189 |

¿Algoritmos alternativos?

* Calcula estas dos restas usando algoritmos ABN.

a) $104 - 49$

b) $824 - 347$

* ¿Crees que tiene sentido hacer restas en base b usando algoritmos ABN? ¿Por qué?

Cálculo mental – ¿Cálculo pensado/natural?

- * Está en el currículo.

En general, se trabaja poco en las aulas.

- * Es muy importante para desarrollar el **sentido numérico**.

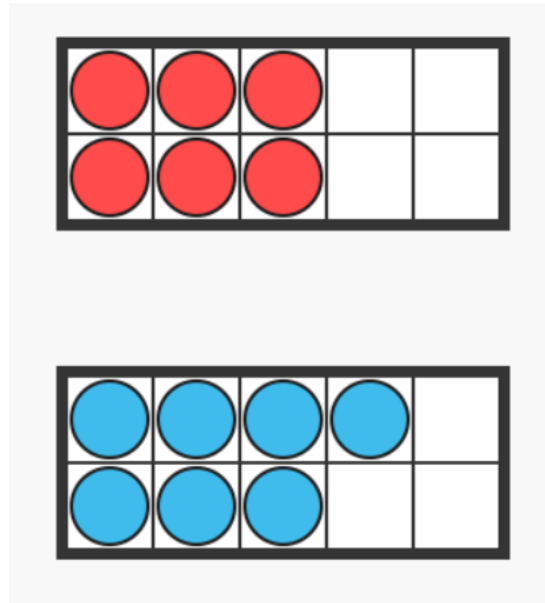
- * No se trata de aprender de memoria trucos, sino de desarrollar técnicas propias.

- * El error que no se puede cometer: tratar de imitar mentalmente los algoritmos tradicionales.

Algunos ejemplos

- * En 1.º Primaria: de sumar contando a sumar sin contar.

$$6 + 7 =$$



<https://apps.mathlearningcenter.org/number-frames/>

- * Importante: explicar cómo se ha hecho el cálculo, no solo el resultado.

“Number talks”

* $36 + 15 =$

* $97 + 25 =$

* $76 - 23 =$

* $64 - 29 =$

* $103 - 37 =$

La multiplicación

- * ¿Cómo introducirla en primaria?

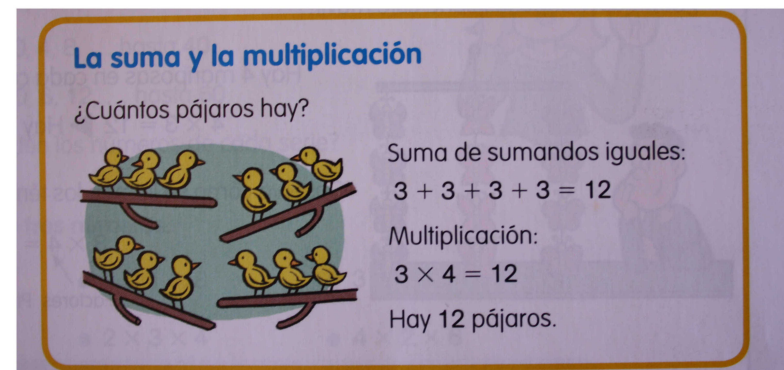
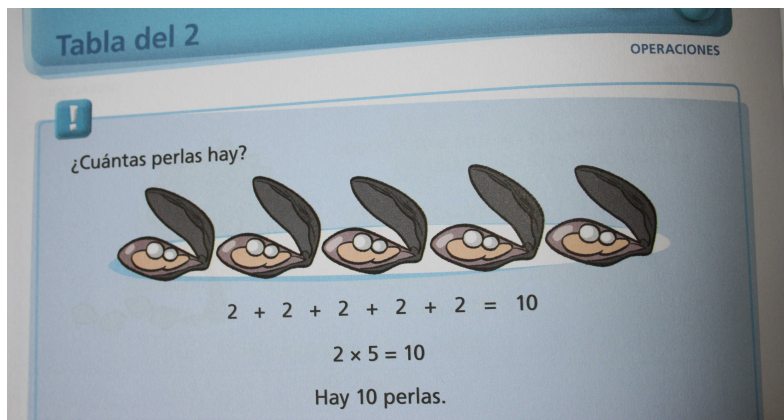


Tenemos 3 platos con 4 rosquillas en cada plato. ¿Cuántas rosquillas tenemos en total?

- * Tenemos $4 + 4 + 4$ rosquillas, es decir, 3 veces 4 rosquillas.










$$¿ 3 \text{ veces } 4 \leftrightarrow 3 \times 4 ?$$

- * En los libros de texto



La multiplicación

- * Veamos qué ocurre si asumimos que:
 - a) 3×4 significa 3 veces 4.
 - b) en la tabla del 2, “contamos de dos en dos”.
- * La tabla del 2, con “veces” en vez de “por”, quedaría ...
- * Conclusión: el orden tradicional de las tablas no concuerda con la introducción natural de la multiplicación.

| | |
|-------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------|
|  | $2 \times 2 = \square$ |
|  | $3 \times 2 = \square$ |
|  | $4 \times 2 = \square$ |
|  | $5 \times 2 = \square$ |
|  | $6 \times 2 = \square$ |
|  | $7 \times 2 = \square$ |
|  | $8 \times 2 = \square$ |
|  | $9 \times 2 = \square$ |
|  | $10 \times 2 = \square$ |

Un comentario:

¿Qué significa memorizar?

Modelos de la multiplicación

1. Suma repetida.



$$3 \times 4 = 4 + 4 + 4$$

tres grupos de cuatro
tres veces cuatro

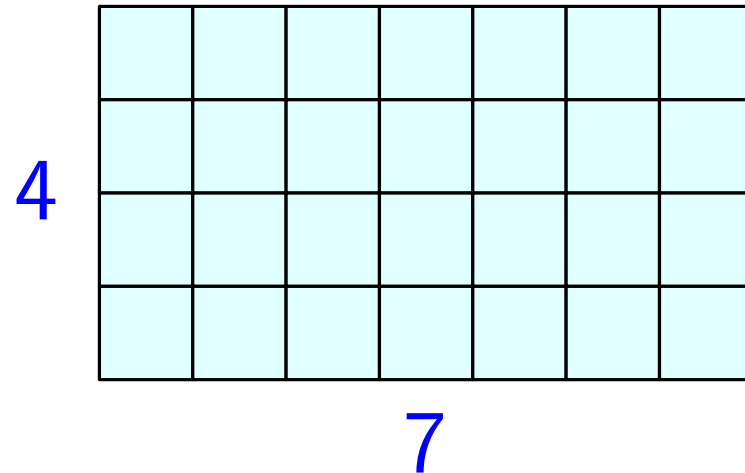
- * Es el significado más adecuado para la introducción de la multiplicación.
 - intuitivo
 - conexión con la suma, ya conocida

Modelos de la multiplicación

2. Modelo de área.

$$4 \times 7$$

$$7 \times 4$$



- a) Muy útil para entender varias propiedades de la multiplicación.
- b) Conexión con la geometría.

Modelos de la multiplicación

3. Modelo de proporcionalidad, escalado.

Multiplicado por: si leemos 5×2 como “cinco multiplicado por dos”, ¿qué significa?

- a) Útil para extender el concepto de multiplicación a números racionales: ¿qué significa “1,6 veces algo”?
- b) Conexión con la división: multiplicar por 3, operación inversa a dividir entre 3.

Modelos de la multiplicación

4. Modelo combinatorio.

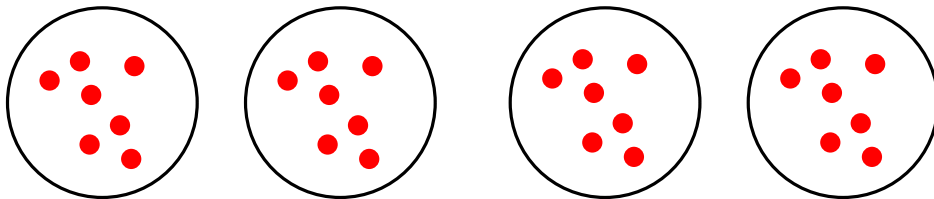
Si tengo 3 pantalones y 4 camisetas, ¿de cuántas formas distintas puedo vestirme?

- a) Es un modelo importante en resolución de problemas y con varias aplicaciones.
- b) Accesible a los alumnos desde el principio de primaria.
- c) Poco trabajado en España.

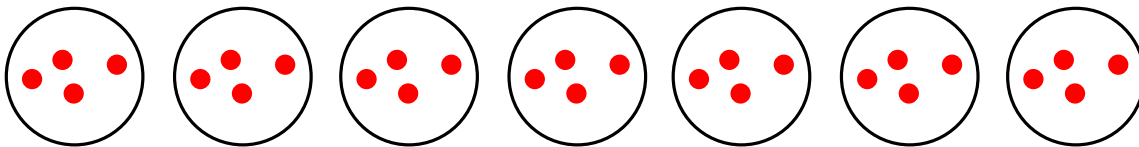
Propiedades de la multiplicación

* Conmutativa: $a \times b = b \times a$.

* Ojo: no es **nada** intuitivo que 4 veces 7 sea igual que 7 veces 4



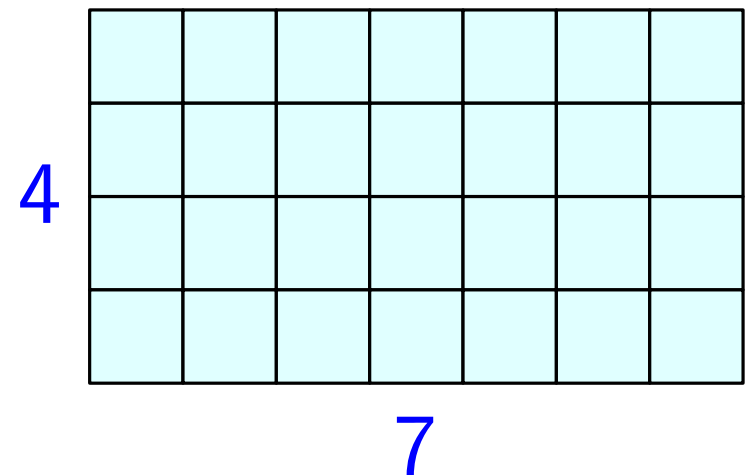
$$4 \text{ veces } 7 \leftrightarrow 4 \times 7$$



$$7 \text{ veces } 4 \leftrightarrow 7 \times 4$$

* La **geometría** puede ayudar en la introducción y comprensión de las propiedades.

Modelo de área



Propiedad distributiva

* Propiedad distributiva:

$$a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$$

$$(a + b) \times c = (a \times c) + (b \times c)$$

* ¿Qué sentido tiene en primaria?

* En los libros de texto ...

$$7 \times (3 + 5) = 7 \times 3 + 7 \times 5$$

$$7 \times 8$$

$$56$$

$$7 \times 3 + 7 \times 5$$

$$21 + 35$$

$$56$$

¿Para qué?

Propiedad distributiva

* Fundamental para:

i) manipulaciones algebraicas: $2(x + 3) = 2x + 6$

ii) cálculo **natural** (pensado, mental):

$$13 \times 8 = (10 + 3) \times 8 = 10 \times 8 + 3 \times 8 = 80 + 24 = 104$$

$$7 \times 16 = 7 \times (10 + 6) = 7 \times 10 + 7 \times 6 = 70 + 42 = 112$$

iii) algoritmo tradicional (y otras variantes) de la multiplicación.

* Lo ideal es trabajarla junto con sus aplicaciones.

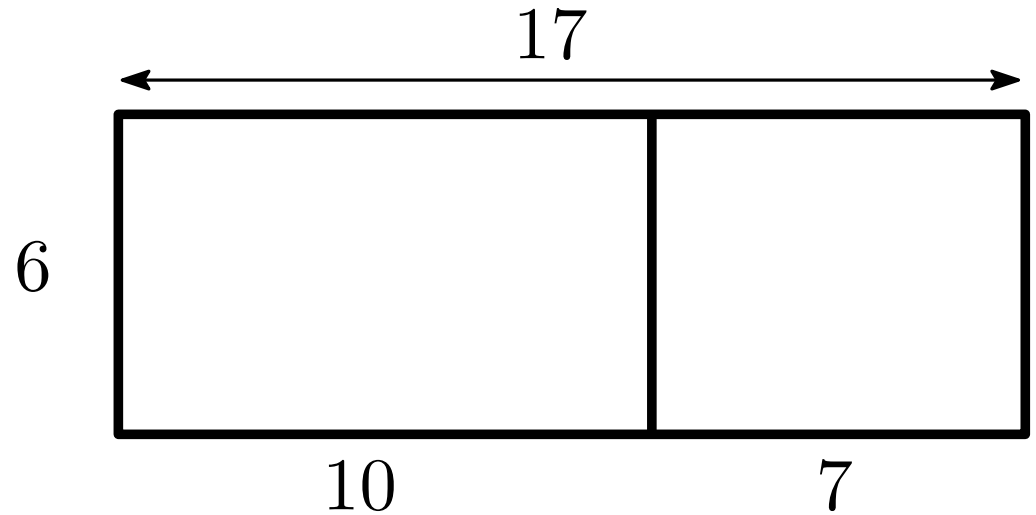
* Una cuestión previa: $10 \times 8432 = 84320$

¿Por qué?

El modelo de áreas

- * Una excelente ayuda para la comprensión de las propiedades y para la introducción del algoritmo.

$$6 \times 17 = 6 \times 10 + 6 \times 7$$



$$\begin{array}{r} 17 \\ \times 6 \\ \hline 60 \\ + 42 \\ \hline 102 \end{array}$$

Algoritmos de la multiplicación

- * El tradicional “explicado” (Singapur, 4º de Primaria)

Step 2

Multiply 2 tens 7 ones by 30.
7 ones \times 30 = 210 ones
= 21 tens
= 2 hundreds 1 ten
2 tens \times 30 = 60 tens
= 6 hundreds

Add.
6 hundreds + 2 hundreds 1 ten
= 8 hundreds 1 ten
 $27 \times 30 = 810$

Step 3

Add.
 $54 + 810 = 864$
 $27 \times 32 = 864$

The diagram illustrates the traditional multiplication algorithm for 27×32 . It is divided into two steps:

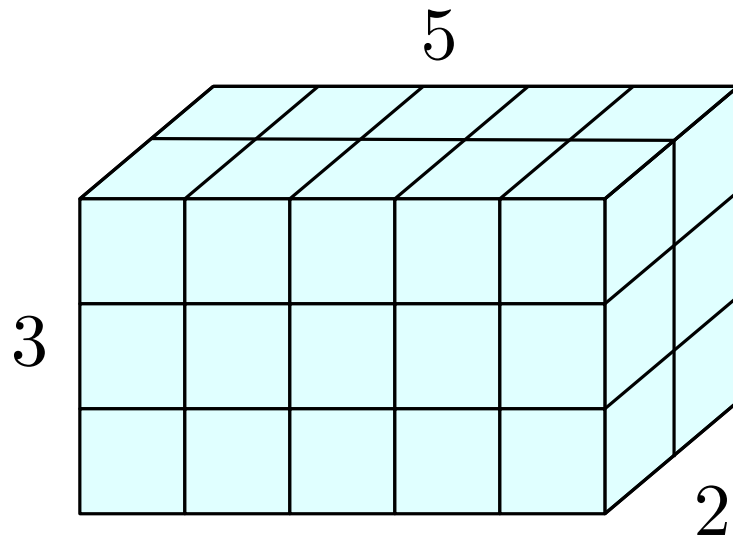
Step 2: This step involves multiplying 27 by 30. It shows the calculation $7 \times 30 = 210$ (which is 21 tens or 2 hundreds and 1 ten) and $2 \times 30 = 60$ (which is 6 hundreds). These are then added together to get $6 \text{ hundreds} + 2 \text{ hundreds } 1 \text{ ten} = 8 \text{ hundreds } 1 \text{ ten}$, which is 810 . The final result of this step is $27 \times 30 = 810$.

Step 3: This step involves adding the result from Step 2 to the product of 27 and 2. It shows the calculation $54 + 810 = 864$ and $27 \times 32 = 864$.

The diagram also includes two vertical multiplication problems. The first problem shows 27×32 with a red box around the 0 in the result 810 and a red arrow pointing to it. The second problem shows the same multiplication 27×32 with the final result 864.

Una última propiedad

* Propiedad asociativa: $a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$



$$2 \times (3 \times 5) = (2 \times 3) \times 5$$

* Un ejemplo en forma de problema de primaria: Tenemos dos sacos, en cada saco hay tres bolsas, y en cada bolsa hay cuatro caramelos. ¿Cuántos caramelos hay en total?

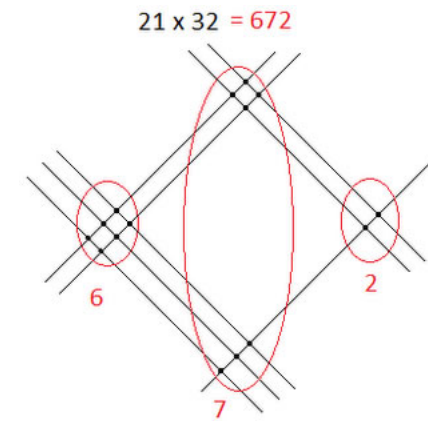
* Un error frecuente: $2 \times (3 \times 5) =$

Otros algoritmos para la multiplicación

| MULTIPLICANDO DESCOMPUESTO EN UNIDADES | MULTIPLICADOR POR DECENAS | MULTIPLICADOR POR UNIDADES | PRODUCTOS PARCIALES | PRODUCTO ACUMULADO |
|----------------------------------------|---------------------------|----------------------------|---------------------|--------------------|
| | 70 | 4 | | |
| 200 | 14000 | 800 | 14800 | |
| 80 | 5600 | 320 | 5920 | 20720 |
| 5 | 350 | 20 | 370 | 21090 |

Algoritmo ABN

$$285 \times 74$$



Algoritmo maya

$$21 \times 32$$

* Analiza por qué funcionan el algoritmo ABN y el maya.

Ejercicios

1. Haz esta multiplicación con estos dos algoritmos, y piensa en sus ventajas e inconvenientes (comparándolos entre ellos, y con respecto al tradicional).

$$45 \times 36 =$$

2. Sabiendo que $652 \times 68 = 44336$, usa la propiedad distributiva para calcular esta otra multiplicación sin hacer más cuentas de las necesarias:

$$662 \times 68 =$$

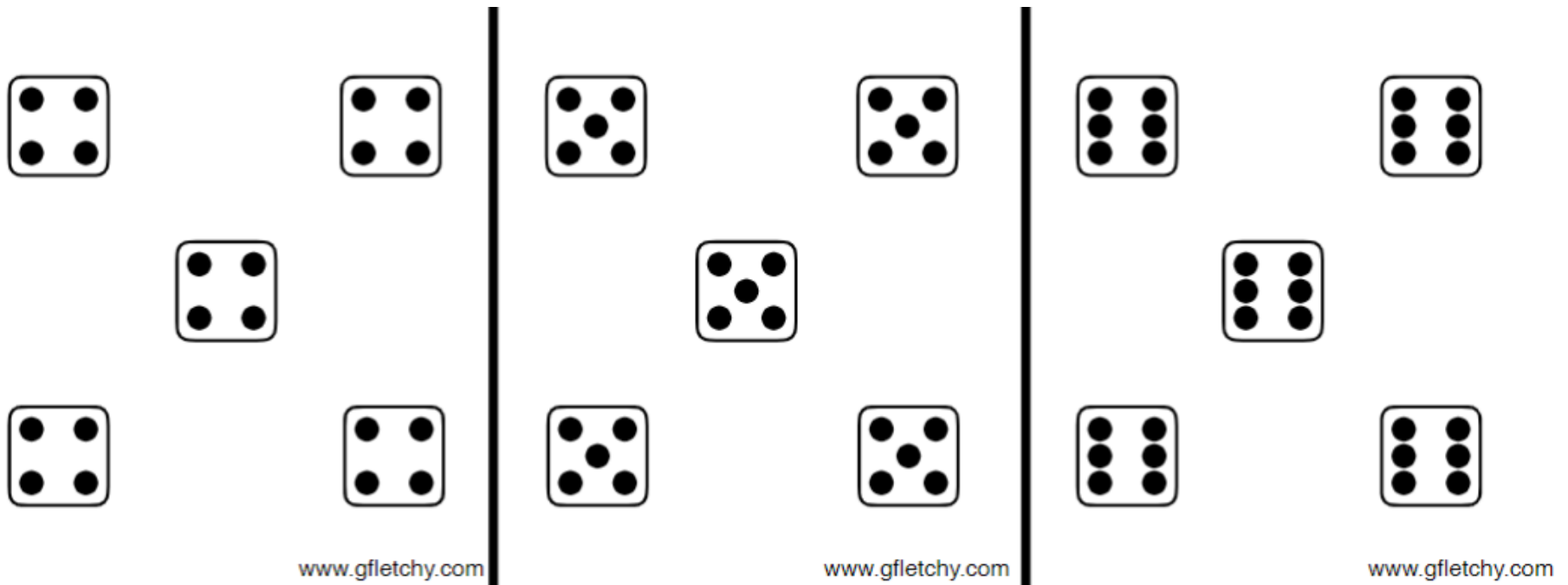
3. Dibuja un modelo de área para comparar el resultado de estas dos multiplicaciones sin necesidad de calcularlas.

$$24 \times 21 \begin{matrix} < \\ > \end{matrix} 23 \times 22$$

Ejercicios

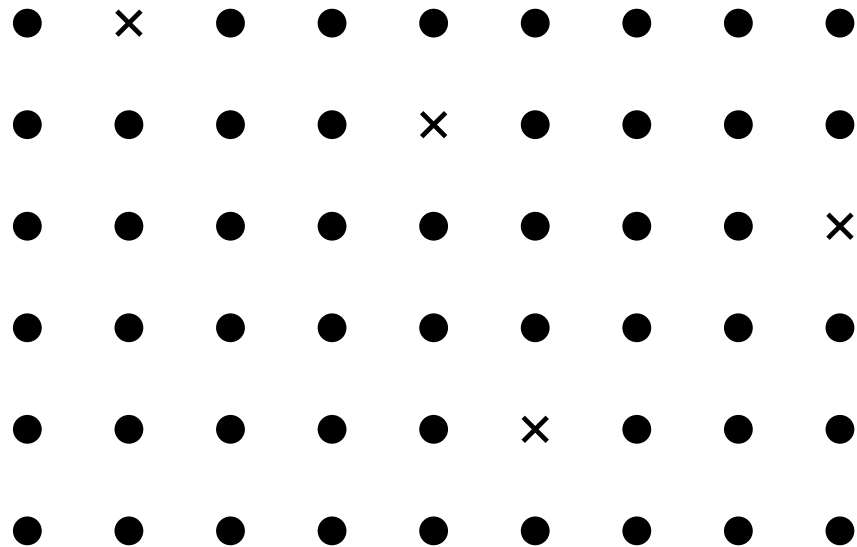
- * Una página con ideas muy interesantes para trabajar el pensamiento multiplicativo:

<https://gfletchy.com/2019/03/17/multiplication-subitizing-cards/>



Ejercicios

* ¿Cuántos puntos hay en la figura?



1. Conéctate a <https://b.socrative.com/login/student/> (o busca “Socrative student”).
2. En nombre de clase, teclea [matemagiuah](#).
3. Sigue las instrucciones.

La división

- * Un primer comentario: es importante distinguir la **idea de división** y el **algoritmo de la división**.
- * Si un niño de 6 años lleva 8 caramelos al cole y quiere repartirlos (por igual) con un amigo, ¿sabe hacerlo?
- * Esta idea de **reparto** es la mejor para **introducir** la división: se trata de la **división de reparto, o partitiva**.
- * Si repartimos 20 caramelos en 4 bolsas iguales, ¿cuántos caramelos habrá en cada bolsa?

| | | | |
|---|--|--|--|
| ? | | | |
|---|--|--|--|

La división

- * Existe otra interpretación de la división: Si repartimos 20 caramelos en bolsas con 5 caramelos cada una, ¿cuántas bolsas necesitaremos?



- * Esta es la **división de agrupamiento, o cuotativa**.

Tiene el sentido de “hacer grupos iguales”.

(No se trabaja lo suficiente en nuestras aulas).

Relación con **medida**: ¿cuántas veces “cabe” 5 en 20?

La división - Dos significados

* Dos observaciones:

- i) Una forma sencilla de distinguirlas: piensa en cómo resolvería el problema una persona sin conocimientos matemáticos.
- ii) En la división cuotativa, el divisor puede ser un número no entero: Un grupo de amigos compra 6 pizzas, y se las reparten por igual. Si cada amigo come $\frac{2}{3}$ de pizza, ¿cuántos amigos son en el grupo?
 1. Contesta la pregunta anterior recurriendo a tus conocimientos sobre fracciones.
 2. Busca un argumento que se pueda usar para explicar la solución a un alumno que empieza 4º de primaria. (Solo conoce el concepto de fracción, no la aritmética).

La división

- * Un buen ejercicio para proponer en clase (en primaria), para entender los dos tipos de divisiones:

Inventa dos problemas (uno de cada tipo) cuya solución contenga la división $72 \div 6$.

- * Otra idea importante, que hay que trabajar con calma, es la división como inversa de la multiplicación:

Como $5 \times 4 = 20$, $20 \div 5 = 4$ y $20 \div 4 = 5$.

- * ¿Por qué no se puede definir la división por 0?

$$5 \div 0 = ? \quad \Leftrightarrow \quad ? \times 0 = 5 \quad \text{no hay solución}$$

$$0 \div 0 = ? \quad \Leftrightarrow \quad ? \times 0 = 0 \quad \text{infinitas soluciones}$$

- * Más en didáctica.

División con resto

- * **División entera** (con resto, o euclídea)

Dados dos números naturales D (dividendo) y d (divisor), existen unos únicos números naturales q (cociente) y r (resto) tales que

$$D = q \times d + r \quad \text{y} \quad 0 \leq r < d$$

.

- * Idea de cualquier algoritmo de división:

Aproximar por defecto el dividendo por múltiplos del divisor.

Notación:

$$16 \div 3 = 5 R 1$$

$$16 = \square \times 3 + \square$$

^
3

Problemas

- * Piensa dos problemas donde los datos sean 27 y 4. En uno de ellos, la solución debe ser 6, y en el otro debe ser 7.
- * Un aspecto que no se trabaja lo suficiente: problemas donde **el resto** sea lo importante.

Un astronauta hizo un viaje de 505 horas. Si despegó a las 8 de la mañana, ¿qué hora era cuando aterrizó?

- * Sabiendo que $635 \times 97 = 61595$, explica cómo podrías calcular el cociente y el resto que resulta de dividir 61695 entre 97 sin necesidad de ninguna operación larga.
- * Si te dicen que al dividir 64757 entre 439 el cociente es 147 y el resto es 224, ¿cuál es el cociente y el resto que resulta de dividir 64757 entre 147?

Algoritmos de división

* Algoritmos tradicionales para la división:

Algoritmo “extendido”

$$\begin{array}{r} 6 \quad 4 \quad 0 \quad | \quad 2 \quad 3 \\ -4 \quad 6 \quad \quad | \quad 2 \quad 7 \\ \hline 1 \quad 8 \quad 0 \\ -1 \quad 6 \quad 1 \\ \hline 1 \quad 9 \end{array}$$

Algoritmo “usual”
(“comprimido”)

$$\begin{array}{r} 6 \quad 4 \quad 0 \quad | \quad 2 \quad 3 \\ 1 \quad 8 \quad 0 \quad | \quad 2 \quad 7 \\ \hline 1 \quad 9 \end{array}$$

¿Otros algoritmos?

ABN

$$427 \div 15$$

| | | |
|-----|-----|----|
| | | 15 |
| 427 | 150 | 10 |
| 277 | 150 | 10 |
| 127 | 120 | 8 |
| 7 | | |

Algoritmo de los
cocientes parciales

$$\begin{array}{r}
 4 \quad 2 \quad 7 \quad | \quad 15 \\
 \hline
 -1 \quad 5 \quad 0 \quad | \quad 10 \\
 \hline
 2 \quad 7 \quad 7 \quad | \quad 10 \\
 -1 \quad 5 \quad 0 \quad | \quad +8 \\
 \hline
 1 \quad 2 \quad 7 \quad | \quad 28 \\
 -1 \quad 2 \quad 0 \quad | \\
 \hline
 \quad \quad 7 \quad | \\
 \hline
 \quad \quad \quad | \quad 7
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 4 \quad 2 \quad 7 \quad | \quad 15 \\
 \hline
 -3 \quad 0 \quad 0 \quad | \quad 20 \\
 \hline
 1 \quad 2 \quad 7 \quad | \quad +8 \\
 \hline
 -1 \quad 2 \quad 0 \quad | \quad 28 \\
 \hline
 \quad \quad 7 \quad | \\
 \hline
 \quad \quad \quad | \quad 7
 \end{array}$$

Ejercicios

- * Haz estas dos divisiones usando el último algoritmo propuesto. Asegúrate de entender el significado de cada etapa del cálculo

$$97 \div 4$$

$$835 \div 37$$

- * Un tema para la reflexión: Además de pensar en qué algoritmo enseñar, habría que reflexionar sobre el valor formativo de los algoritmos de división.

En muchos países los divisores de dos (o más) cifras han desaparecido del currículo de primaria.

Ejercicios

1. ¿Qué ocurre con cociente y resto cuando dividendo y divisor se multiplican (o dividen) por el mismo número?
2. Sabiendo que $4185 = 45 \times 93$, encuentra de manera razonada el cociente y el resto de dividir 41862 entre 930.
3. Escribe 3 números de 4 cifras que tengan resto 7 al dividir entre 19.
4. Encuentra el menor número que es mayor que 300 y que tiene resto 7 al dividirlo entre 29.

La calculadora (y otros dispositivos)

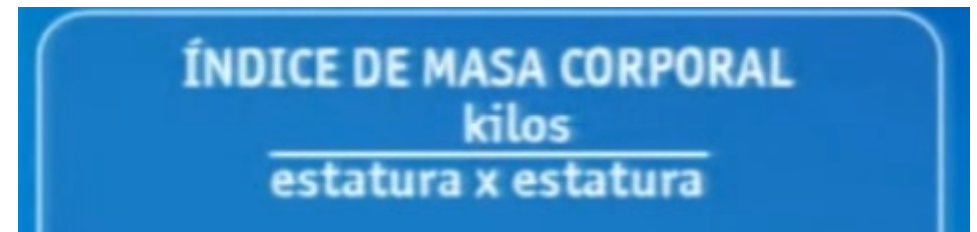
- * Está en el currículo, y habría que integrarla en el aula.

aunque solo sea para que no ocurra esto:

<https://www.youtube.com/watch?v=zclITKd4ivQ>

- * Usa tu calculadora para averiguar tu índice de masa corporal.

(La estatura es en metros)



ÍNDICE DE MASA CORPORAL

$$\frac{\text{kilos}}{\text{estatura} \times \text{estatura}}$$

- * Dos aspectos distintos:

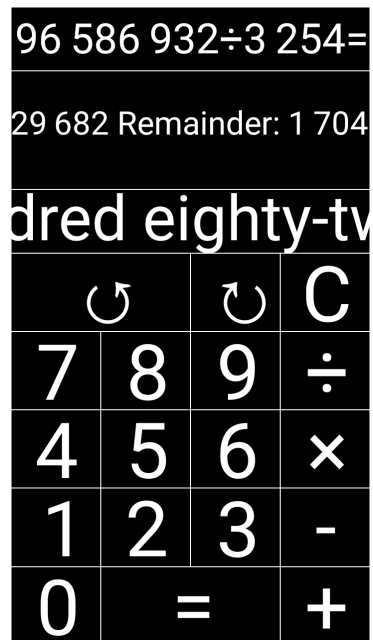
- (1) su uso para hacer operaciones “complicadas”, o para comprobar resultados.
- (2) su utilidad en el diseño de actividades de aprendizaje.

La calculadora (y otros dispositivos)

- * División con resto en una calculadora “usual”.

$$29374 \div 387 \approx 75,902$$

- * Otras alternativas:



<https://www.wolframalpha.com/>

Whole calculator (gratis)

Calculadora natural (73 c)

(Android)

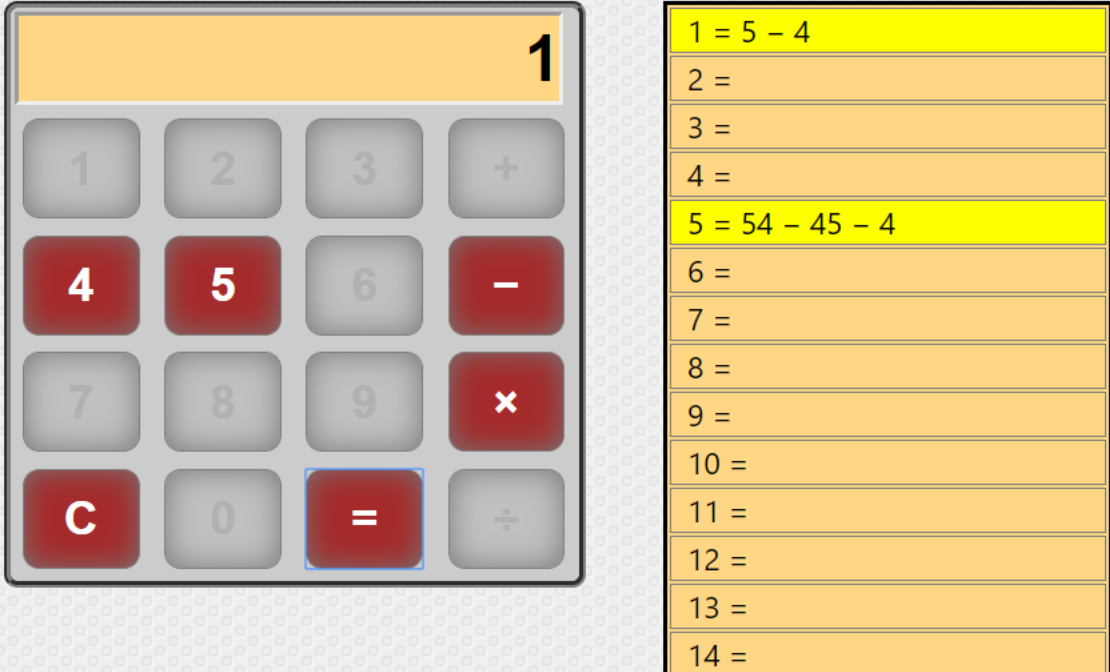
Un ejemplo de actividad de aprendizaje

- * Calculadoras estropeadas.

BROKEN CALCULATOR

1 and 5 2 and 3 3 and 4 **4 and 5** 5 and 2 More Calculator Activities

Use the keys on this broken calculator to make the totals from 1 to 20. Five has already been done as an example, see below.



| |
|-----------------|
| 1 = 5 - 4 |
| 2 = |
| 3 = |
| 4 = |
| 5 = 54 - 45 - 4 |
| 6 = |
| 7 = |
| 8 = |
| 9 = |
| 10 = |
| 11 = |
| 12 = |
| 13 = |
| 14 = |

https://www.transum.org/Software/SW/Starter_of_the_day/Students/Broken_Calculator.asp