

Tema 2: Fracciones y proporciones

- ★ Fracciones
- ★ Números racionales
- ★ Números decimales
- ★ Razones y proporciones
- ★ Porcentajes

Las fracciones: un objeto, varias interpretaciones

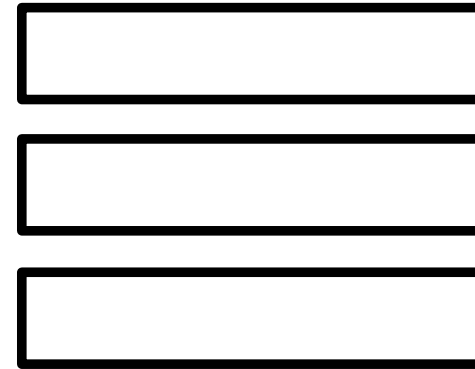
(1) Parte de un todo



Hemos coloreado los $\frac{3}{5}$ de ...

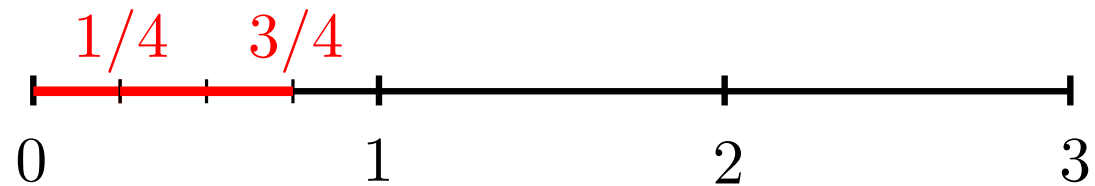
(2) Un reparto (división)

Queremos repartir 3
chocolatinas entre 5 niños.
¿A cuánto toca cada uno?



(3) Una **cantidad** (un punto de la recta numérica, un número)

¿ $\frac{3}{4}$?

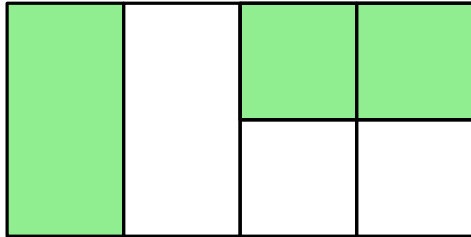


El denominador fija la unidad

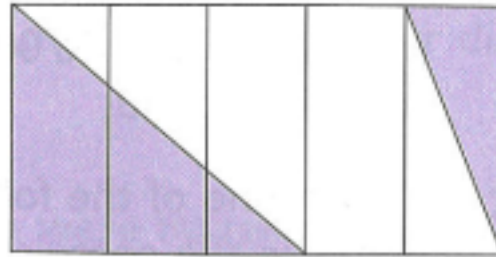
El numerador, cuántas unidades tomo

Algunos ejemplos

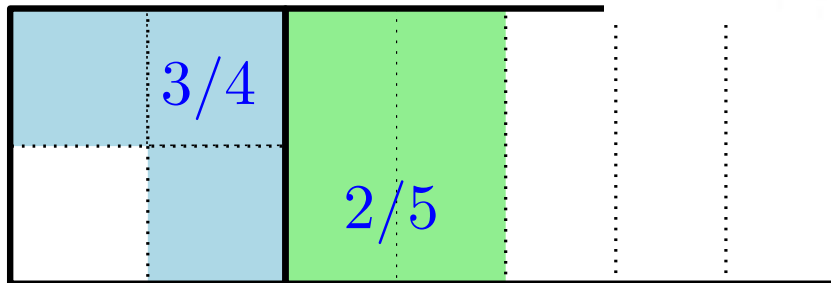
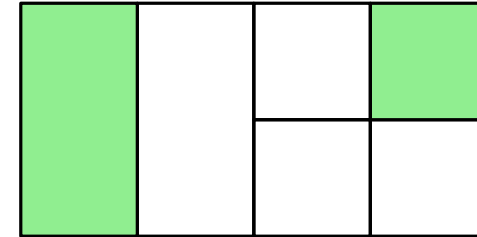
* ¿Qué fracción del área total está coloreada en cada una de las figuras?



(a)



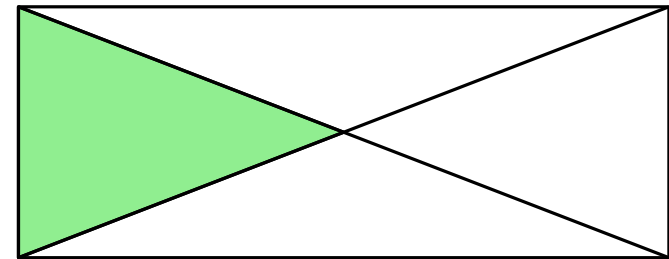
(b)



$1/3$

$2/3$

(c)

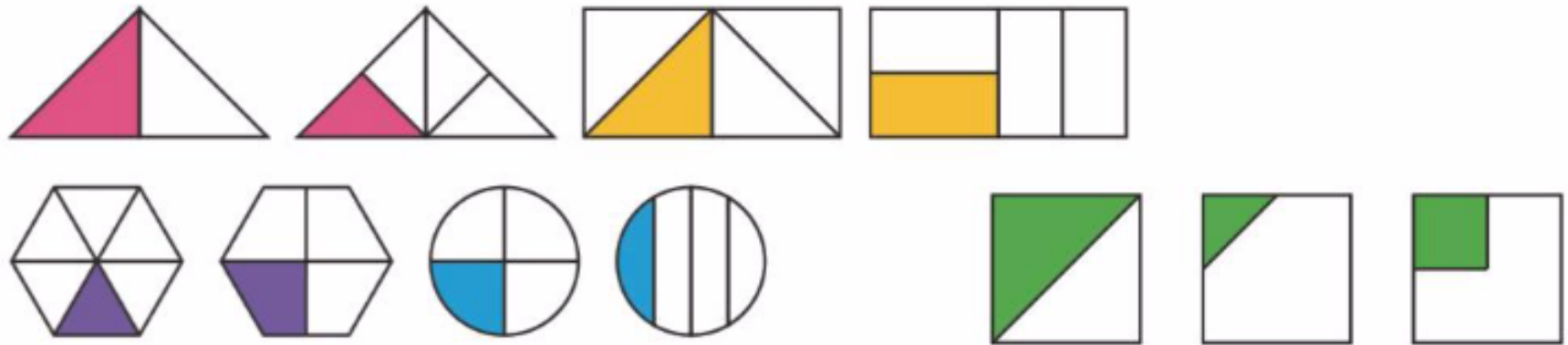


(d)

Importante en el aula

- * Para entender un nuevo concepto, es importante ver ejemplos positivos y negativos.

1 ¿Qué figuras están divididas en cuartos?



3 ¿Qué figuras representan $\frac{1}{2}$ o $\frac{1}{4}$? Rodea con diferentes colores.



Algunos ejemplos

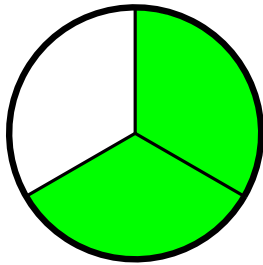
- * He comido $\frac{1}{3}$ de los bombones de una caja y me quedan 12 bombones. ¿Cuántos bombones tenía la caja?
- * Juan leyó $\frac{2}{5}$ de las páginas de un libro el lunes, el martes estaba ocupado y sólo pudo leer la tercera parte que el lunes, y el miércoles, que tenía más tiempo, acabo el libro leyendo 140 páginas. ¿Cuántas páginas tenía el libro?

Definición de fracción

* Una **fracción** es una expresión de la forma $\frac{a}{b}$, donde a y b son números enteros y $b \neq 0$.

numerador

denominador

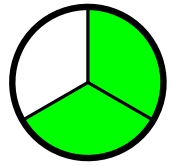


$\frac{2}{3}$

Parte de un todo



Cantidad
Punto de la
recta numérica



$2/3$

Parte de un todo



Punto de la recta numérica

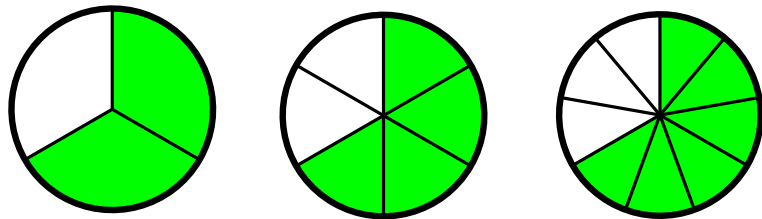
- * Las dos interpretaciones son necesarias, y cada una tiene sus ventajas y sus inconvenientes.

Cómo combinarlas es un tema importante de didáctica de las matemáticas.

Fracciones equivalentes

- * Las fracciones $2/3$, $4/6$, $6/9$, ... representan la misma cantidad.

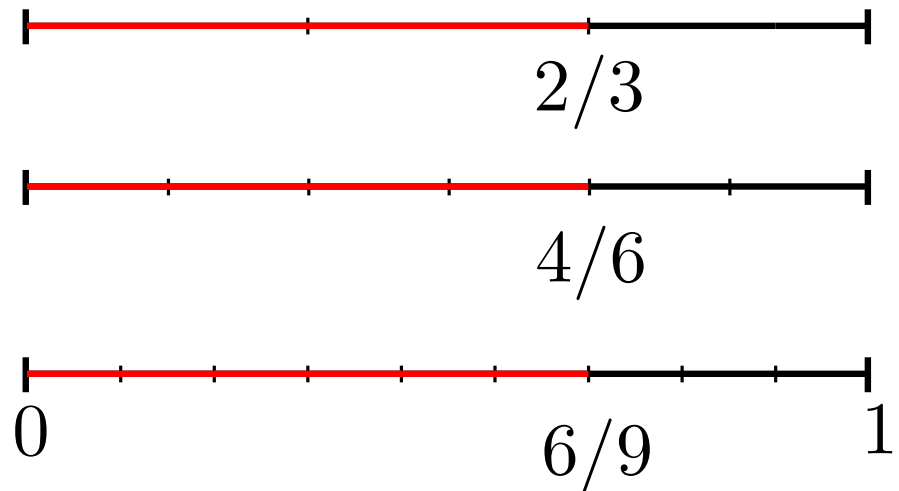
Diremos que son fracciones equivalentes.



$2/3$

$4/6$

$6/9$



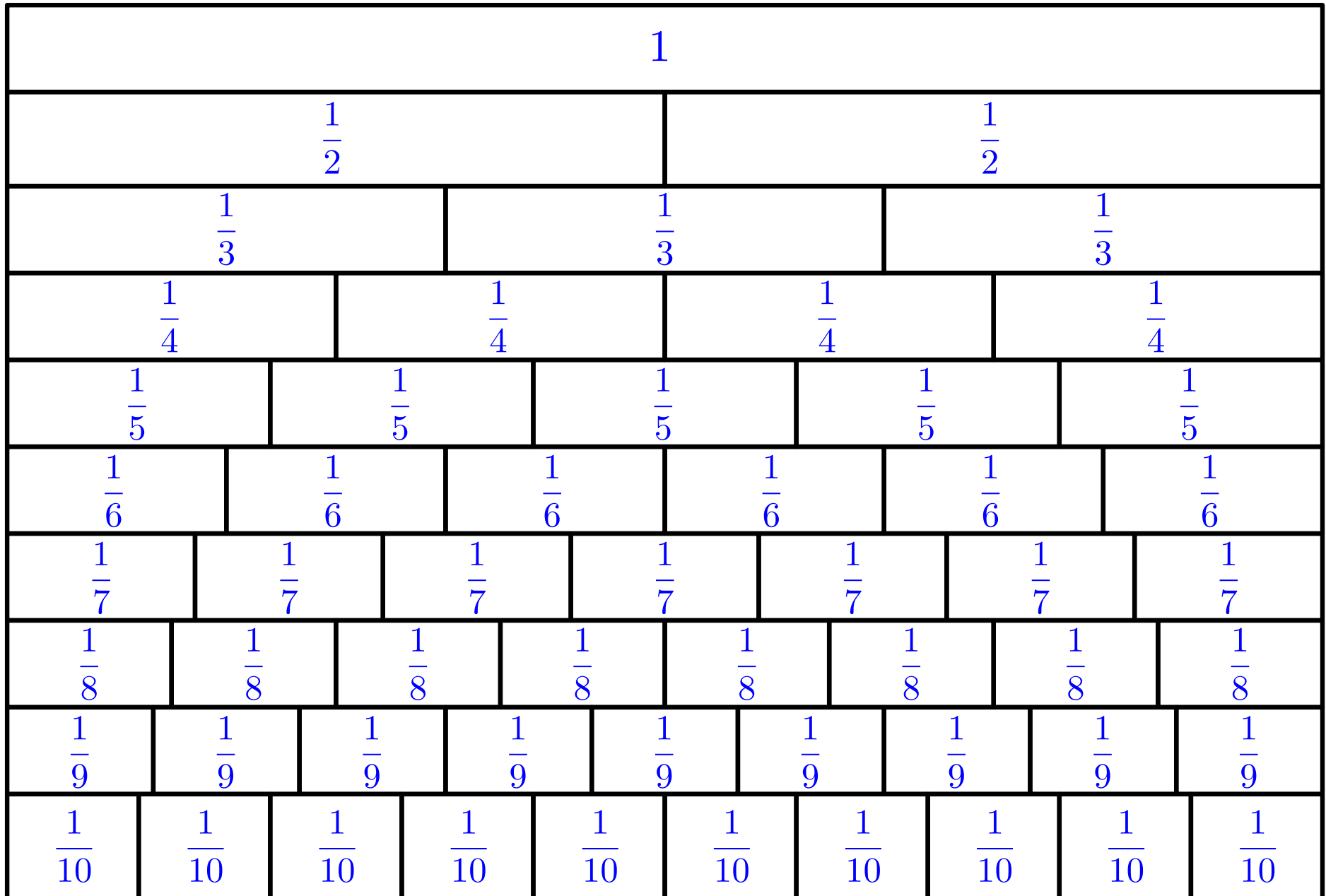
- * **Def:** Diremos que un número es racional si se puede expresar como cociente de dos números enteros, es decir, si se puede expresar en forma de fracción.

El conjunto de números racionales se denota por \mathbb{Q} .

Fracciones equivalentes

- * Es un concepto básico, y es fundamental que se entienda bien.
- * Una herramienta muy útil: el **muro de fracciones**.

Muro de fracciones



Las fracciones en la recta numérica

* La gran ventaja de interpretar las fracciones en la recta numérica es que deja claro, desde el primer momento, que las fracciones son **una ampliación** de los conjuntos de números ya conocidos.

* Haciendo ejercicios como

Representa en la recta 1, 2, $\frac{6}{7}$ y $\frac{13}{5}$

se puede desarrollar más fácilmente la intuición sobre las fracciones.

* Las **fracciones impropias** dejan de ser un problema.

Fracciones equivalentes - Comparación de fracciones

* Si queremos que los alumnos comprendan, y no que memoricen, hay que huir de “recetas” y empezar con ejemplos como estos.

* Solo después ..

1. igual denominador.
2. igual numerador
3. comparación con alguna referencia sencilla
4. en general: reducción a común denominador

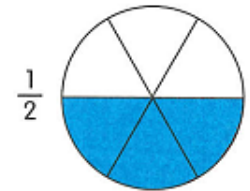
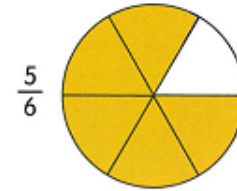
* **Ejercicio.** Compara las fracciones:

$$(a) \frac{6}{7} \text{ y } \frac{7}{8}$$

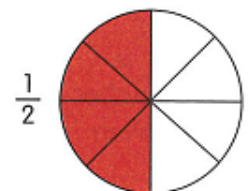
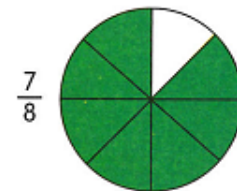
$$(b) \frac{11}{23} \text{ y } \frac{22}{43}$$

$$(c) \frac{826}{825} \text{ y } \frac{1223}{1222}$$

3 Which is greater, $\frac{5}{6}$ or $\frac{1}{2}$?

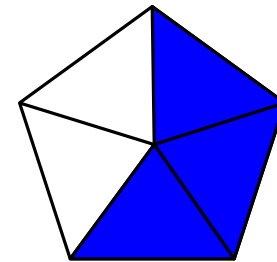
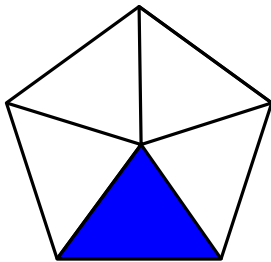
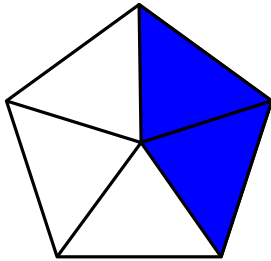


Which is smaller, $\frac{7}{8}$ or $\frac{1}{2}$?



Suma de fracciones

- * Igual denominador: Un posible problema del enfoque más extendido.



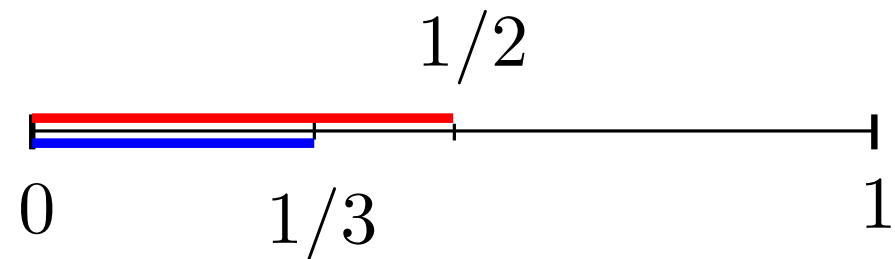
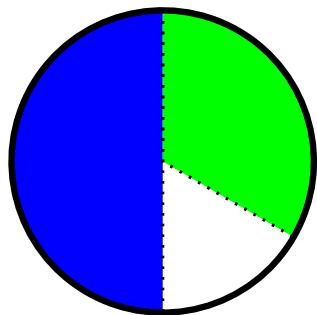
$$\frac{2}{5} + \frac{1}{5} = \frac{3}{5}$$

Suma de fracciones, distinto denominador

- * Si los conceptos previos se han entendido, podemos plantear directamente el **problema**:

$$\text{¿Cuánto es } \frac{1}{2} + \frac{1}{3}?$$

- * Para un niño que trabaja este “problema” (con el modelo correspondiente) es mucho más fácil entender la imposibilidad de sumar fracciones que tienen distinto denominador.

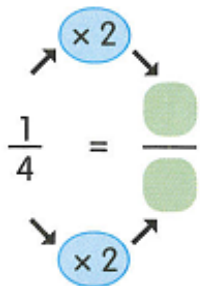


Sumas y restas

- * En lugar de “dar la receta”, ayudar a dar pasos hacia ella.
(Zona de desarrollo próximo – Vygotsky)

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{\square}{6} + \frac{\square}{6} =$$

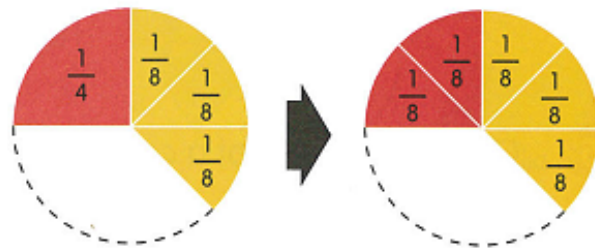
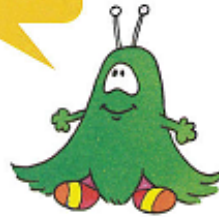
2 Add $\frac{1}{4}$ and $\frac{3}{8}$.



$$\frac{1}{4} + \frac{3}{8} = \frac{2}{8} + \frac{3}{8}$$

$$= \frac{5}{8}$$

What fraction is equal to $\frac{1}{4}$ and has the same denominator as $\frac{3}{8}$?



4 Find the sum.

a $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{\square}{\square} + \frac{1}{4} = \frac{\square}{\square}$

b $\frac{1}{3} + \frac{1}{9} = \frac{\square}{\square} + \frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square}$

c $\frac{2}{5} + \frac{3}{10} = \frac{\square}{\square} + \frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square}$

Fracciones equivalentes. Suma y resta

- * Una vez entendidos los conceptos de fracción y fracción equivalente, la suma y resta deberían ser inmediatas.
 - a) No se pueden sumar (ni restar) fracciones con distinto denominador.
 - b) Lo que hay que hacer es buscar **fracciones equivalentes** que tengan el mismo denominador.
- * Un problema del lenguaje matemático: el **denominador no es un número**.
- * Compara estas expresiones:

$$\frac{2}{3} + \frac{3}{4}$$

$$2 \text{ tercios} + 3 \text{ cuartos}$$

Fracciones impropias, números mixtos

- * La fracción $17/12$ (y, en general, las fracciones a/b donde $a \geq b$) se llaman **fracciones impropias** y se pueden representar como **números mixtos**:

$$\frac{17}{12} = 1 \frac{5}{12} = 1 + \frac{5}{12}$$

- * Muy relacionado con la **división con resto**:

$$D = q \times d + r \quad \rightarrow \quad \frac{D}{d} = q + \frac{r}{d}$$

- * Es importante tener presente que, si se ha trabajado la fracción como “parte de un todo”, la idea de fracción impropia supone una generalización desde el punto de vista conceptual: **¿qué significa ocho séptimos de algo?**

Ejercicio

- * En una fábrica se tarda 4 horas en terminar una unidad de producto. Consideramos un periodo de 9 horas de trabajo. Podemos expresar la operación $9 : 4$ como una división con resto o como un número mixto. Interpreta las dos opciones en el contexto de esta situación.

- * Luis y Marta tienen la misma cantidad de dinero. Organizan una fiesta juntos, y Luis gasta la mitad de su dinero en organizarla. Como Marta ha invitado a más amigos, ella gasta $\frac{3}{4}$ de su dinero en la organización. ¿Qué fracción del total del dinero que tenían entre los dos han gastado en organizar la fiesta?

Multiplicación de fracciones

- * Desde el punto de vista del algoritmo, multiplicar fracciones es más sencillo que sumarlas. Sin embargo, desde un punto de vista conceptual es mucho más complicado.

- * Vamos a ir paso a paso:

i) $5 \times \frac{2}{3}$

Es importante cómo la interpretamos, cómo la verbalizamos.

ii) Fracción de una cantidad: $\frac{1}{3} \times 12$.

Multiplicación de fracciones

iii) $\frac{1}{3} \times 5.$

Dos posibilidades:

1. Ya sabemos dividir 5 en 3 partes iguales.
2. Podemos expresar 5 en forma de fracción, de manera que el numerador sea múltiplo de 3.

* En este momento ya hemos visto una propiedad importante:

Multiplicar por $\frac{1}{n}$ es equivalente a dividir entre n .

Multiplicación de fracciones

$$\text{iii) } \frac{2}{3} \times 5.$$

“Dos veces un tercio de cinco”

- * En este momento ya podemos comprobar que “dos tercios de cinco es lo mismo que cinco veces dos tercios”.
- * Una vez que sabemos multiplicar $1/n$ por un entero, y entendemos que estamos dividiendo por n , podemos multiplicar $1/n$ por otra fracción:

$$\text{a) } \frac{1}{2} \times \frac{8}{15} = \frac{4}{15}$$

$$\text{b) } \frac{1}{2} \times \frac{7}{15} = \frac{1}{2} \times \frac{14}{30}$$

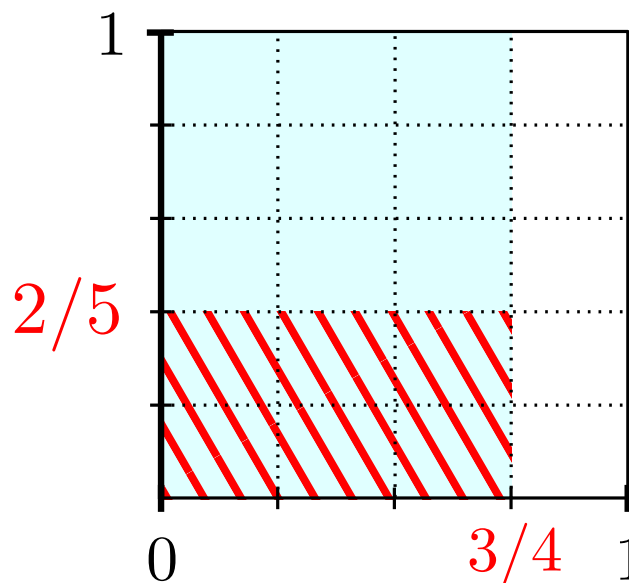
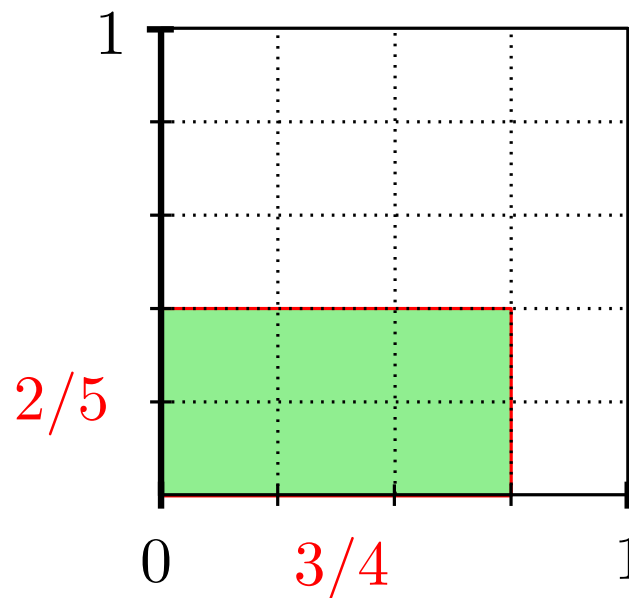
Multiplicación de fracciones. Modelo de área

$$\frac{3}{4} \times \frac{2}{5} = \frac{6}{20}$$

También aquí se puede ver

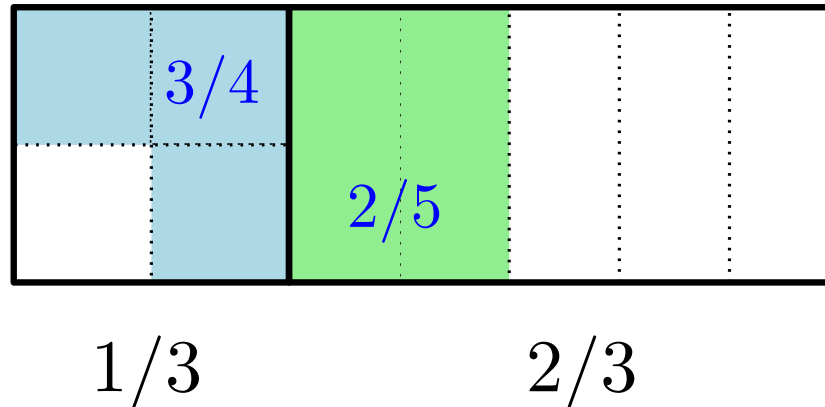
que $\frac{2}{5} \times \frac{3}{4}$ significa

$\frac{2}{5}$ de $\frac{3}{4}$.



Ejercicios

- * ¿Qué fracción del total está coloreada?



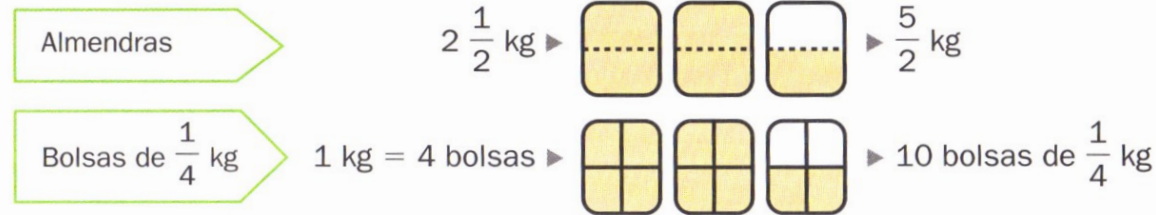
- * Si echo 6 vasos en una botella, y $\frac{1}{4}$ de cada vaso es alcohol, ¿qué fracción del líquido de la botella será alcohol?

División de fracciones

- * Primero, lo que creo que **no** es una buena alternativa.

División de fracciones

Ester tiene 2 kg y medio de almendras.
Las reparte en bolsas de un cuarto de kilo cada una.
¿Cuántas bolsas puede preparar?



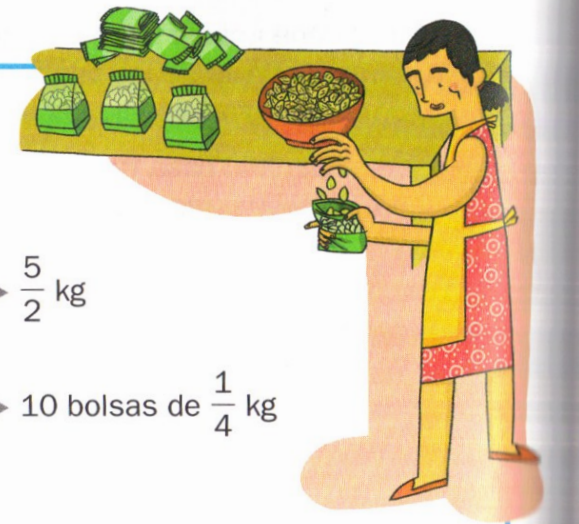
Calcula cuántos $\frac{1}{4}$ hay en $\frac{5}{2}$, es decir, divide $\frac{5}{2}$ entre $\frac{1}{4}$

- El numerador es el producto del numerador de la primera fracción por el denominador de la segunda.
- El denominador es el producto del denominador de la primera fracción por el numerador de la segunda.

$$\frac{5}{2} \div \frac{1}{4} = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = \frac{20}{2} = 10$$

Puede preparar 10 bolsas de un cuarto de kilo.

Para dividir dos fracciones, se multiplican sus términos en cruz.



Primeros ejemplos

- * Cuando el divisor es un número natural, es sencillo:

$$\frac{4}{5} \div 2 =$$

- * ¿Y qué ocurre con este ejemplo?

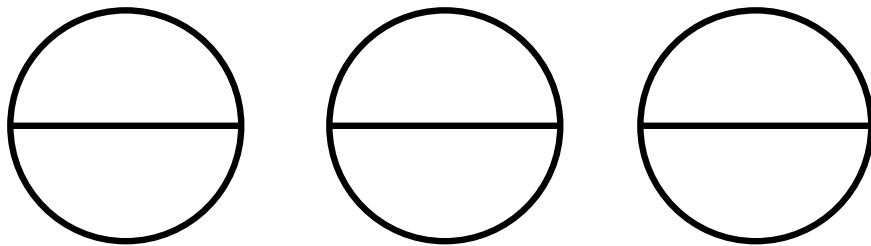
$$\frac{3}{5} \div 2 =$$

- * Empezar así muestra que no todo es “raro” cuando aparecen las fracciones.

Primeros ejemplos

- * Cuando el divisor es una fracción, si queremos que se entienda, hay que empezar con ejemplos sencillos:

Un grupo de amigos compran 3 pizzas y se comen media pizza cada uno. ¿Cuántos amigos hay en el grupo?

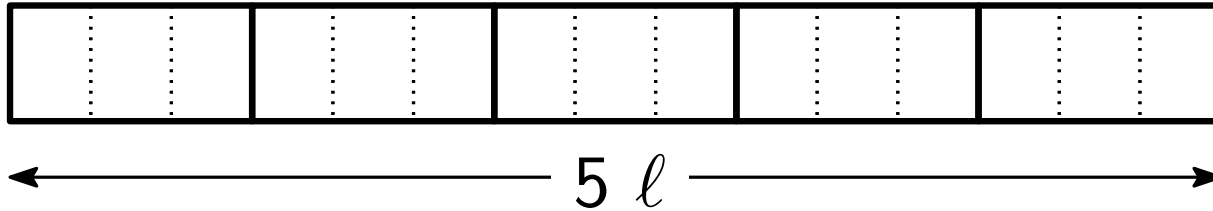


$$3 \div \frac{1}{2} = 3 \times 2 = 6$$

- * Con ejemplos como éste no es difícil entender que **dividir entre $1/n$ es equivalente a multiplicar por n .**

Hacia el caso general

- * ¿Cuántas botellas de $\frac{2}{3}$ de litro se pueden rellenar con 5 litros de agua?



- * Para llegar al procedimiento general:

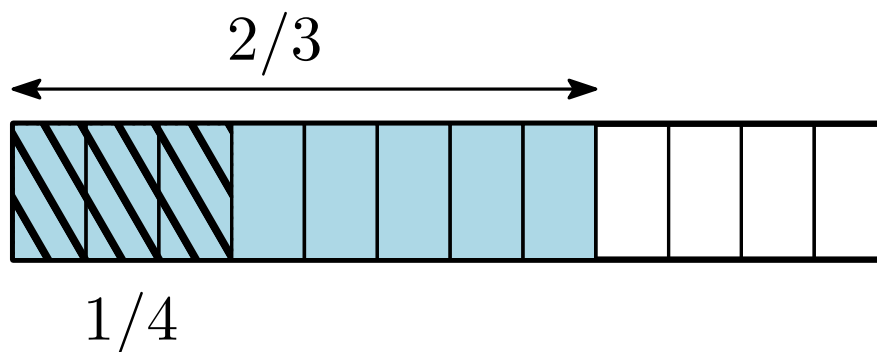
¿cuántos $\frac{2}{3}$ hay en una unidad?

- * Por tanto, en 5 unidades hay $\frac{2}{3}$.

- * Es decir, $5 \div \frac{2}{3} = 5 \times \frac{3}{2} = \frac{10}{3}$.

Otra opción: común denominador

$$* \frac{2}{3} \div \frac{1}{4} = \frac{8}{12} \div \frac{3}{12} = \frac{8}{3} = 2 + \frac{2}{3}$$



* Dos opciones para la división de fracciones:

$$1. \frac{3}{4} \div \frac{2}{5} = \frac{3}{4} \times \frac{5}{2} = \frac{15}{8}$$

$$2. \frac{3}{4} \div \frac{2}{5} = \frac{15}{20} \div \frac{8}{20} = \frac{15}{8}$$

* ¿Ventajas e inconvenientes?

Problemas

- * Tenemos un barril de 350 l. de agua, y con él rellenamos botellas de $\frac{3}{8}$ de litro. ¿Cuántas botellas llenamos?
- * Una persona deja en herencia $\frac{2}{3}$ de su capital a su único hijo, le deja a un tío lejano $\frac{4}{5}$ partes del resto, debe pagar a hacienda por impuestos $\frac{1}{20}$ de la herencia, y dona el resto, 12000 euros, a una obra de beneficencia. ¿Cuál era su capital?
- * **Ejercicio:** Calcula y expresa como fracción irreducible

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{4}{7} \times \frac{9}{8} - 2 \times \left(\frac{7}{3} - \frac{1}{12} \right) - 1$$

Los números racionales

- * Los racionales son “densos”: en \mathbb{Q} se pierde el concepto de “siguiente”.

Observación: entre dos números racionales cualesquiera existen **infinitos** números racionales.

- * Pero no “llenan” toda la recta:

Teorema: $\sqrt{2}$ no es un número racional.

Problema

- * El grifo del agua caliente tarda 1 hora en llenar mi bañera y el grifo del agua fría tarda 30 minutos. Si abro los dos grifos a la vez, y el caudal de cada grifo es el mismo que antes, ¿cuánto tardará en llenarse la bañera?