

Tema 2-3: Proporcionalidad y porcentajes

* Una **razón** (numérica) es una **relación** entre dos cantidades.

Ejemplos:

- a) en una bolsa con bolas blancas y negras, la razón de bolas blancas a negras es de 2 a 7.
- b) en cierto examen, la razón entre aprobados y suspensos es de 4 a 3.

* Una razón puede venir dada en forma de fracción, pero no hay que confundir los conceptos. Algunas diferencias fundamentales:

1. Una razón puede comparar dos **magnitudes heterogéneas** (con distintas unidades). Ej: consumo 6 litros/100 km.
2. Una razón puede **no ser un número racional**.
Ejemplo: la razón entre la longitud de una circunferencia y su diámetro.

Razón - Fracción

- * Supongamos que tenemos una bolsa con bolas rojas y bolas azules. Sabemos que por cada 3 bolas rojas hay 2 bolas azules.

Escribimos que **la razón entre bolas rojas y bolas azules** es **$3 : 2$** o también **$3/2$** .

- * Si la razón entre bolas rojas y bolas azules es $3 : 2$, ¿qué **fracción** del total de bolas son rojas?
- * En el lenguaje usual se suele decir **¿qué proporción son rojas?**

Se trata de un uso impreciso, que aquí evitaremos. En matemáticas, una proporción es otra cosa, que veremos enseguida.

Proporciones

- * Una **proporción** es una igualdad entre dos razones.
- * Ejemplo: en cierto examen la razón entre aprobados y suspensos es **4 : 3**. Si suspendieron 81 alumnos, ¿cuántos aprobaron?

$$\frac{4}{3} = \frac{x}{81} \rightarrow 3x = 4 \times 81 \rightarrow x = \frac{4 \times 81}{3} = 108$$

- * Y sí ... también se puede interpretar como la clásica “regla de tres”:

$$3 \rightarrow 81$$

$$4 \rightarrow x$$

El peligro de “la regla de 3”

4. EL RAZONAMIENTO DE LA REGLA DE TRES

Con la expresión “regla de tres” se designa un procedimiento que se aplica a la resolución de problemas de proporcionalidad en los cuales se conocen tres de los cuatro datos que componen las proporciones y se requiere calcular el cuarto. Aunque aplicado correctamente el razonamiento supone una cierta ventaja algorítmica en el proceso de solución, ya que se reduce a la secuencia de una multiplicación de dos de los números, seguida de una división por el tercero, con frecuencia muchos alumnos manipulan los números de una manera aleatoria y sin sentido de lo están haciendo. En cierto modo el algoritmo les impide comprender la naturaleza del problema, sin preocuparse de si la correspondencia entre las cantidades es de proporcionalidad directa, inversa, o de otro tipo. La regla de tres se llega a aplicar de manera indiscriminada en situaciones en las que es innecesaria o impertinente. **o peor, errónea ...**

De Godino et al: Proporcionalidad y su didáctica para maestros (p. 425),
<http://tinyurl.com/8kxkr7r>

- * Un pequeño divertimento sobre el tema:
<https://youtu.be/wkJrysJhU7s>

Ejemplos

* Problema: Si 3 entradas de cine cuestan 21 euros, ¿cuánto costarán 5 entradas iguales?

* Solución 1:

Como 3 entradas cuestan 21 euros, cada entrada cuesta 7 euros. Por tanto, 5 entradas costarán 35 euros.

Reducción a la unidad

* Solución 2:

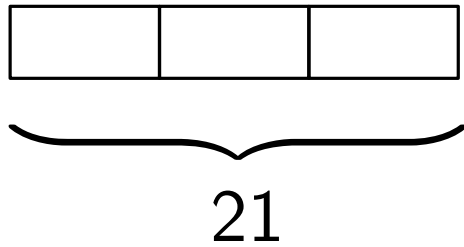
$$\left. \begin{array}{l} 3 \rightarrow 21 \\ 5 \rightarrow x \end{array} \right\} \Rightarrow x = \frac{21 \cdot 5}{3}$$

Regla de tres

Ejemplos

- * Problema: Si 3 entradas de cine cuestan 21 euros, ¿cuánto costarán 5 entradas iguales?

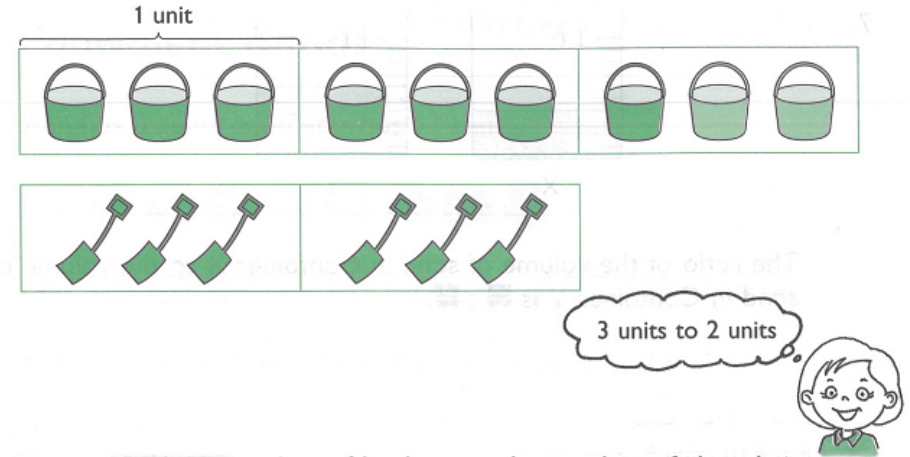
Una alternativa: el **modelo de barras**.



- * Al menos, una buena herramienta auxiliar.
Ventaja: visualizar ayuda a entender.

Unos ejemplos de los libros de Singapur

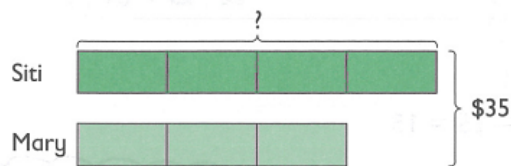
- * Introduciendo el concepto de razón en 5º



The ratio of the number of buckets to the number of shovels is $\blacksquare : \blacksquare$.

- * Para llegar a (también en 5º)

6. Siti and Mary shared \$35 in the ratio 4 : 3.
How much money did Siti receive?



7 units = \$35

1 unit = \$ \blacksquare

4 units = \$ \blacksquare

Siti received \$ \blacksquare .

7. The ratio of the weight of Package X to the weight of Package Y is 5 : 3. If the weight of Package X is 40 kg, find the total weight of the two packages.



5 units = 40 kg

1 unit = \blacksquare kg

8 units = \blacksquare kg

The total weight is \blacksquare kg.

Unos ejemplos de los libros de Singapur

* Para llegar ya en 6º a problemas como éste:

2

The mass of potatoes used by Mrs Wee in her cooking was $\frac{5}{2}$ of the mass of carrots used. She used 9 kg more potatoes than carrots.

a

Find the ratio of the mass of potatoes used to the mass of carrots used to the total mass of both ingredients.

b

What fraction of the total mass of both ingredients was the mass of the potatoes?

c

Find the total mass of both ingredients.

Magnitudes directamente proporcionales

- * Se dice que dos magnitudes son **directamente proporcionales** si su cociente es constante.

Ejemplo: espacio y tiempo en un movimiento uniforme.

$$\frac{e_1}{t_1} = \frac{e_2}{t_2} = \dots = v$$



razón de proporcionalidad

- * **Ejercicio:** Estudia si las siguientes magnitudes son directamente proporcionales:
 1. El lado de un cuadrado y su área.
 2. La masa de un objeto y su volumen.
 3. El tiempo que tarda en caer un objeto y la altura de la torre desde donde se lanza.
 4. El lado de un cuadrado y su perímetro.

La escala

- * Un ejemplo importante de razón: la escala.

La distancia entre dos puntos en un mapa de escala $1 : 20000$ es de $6,7$ cm. ¿Cuál es la distancia real?

A veces, la escala se da con unidades: $1 \text{ cm} : 10 \text{ km}$.

Magnitudes inversamente proporcionales

- * Un grupo de excursionistas calcula una provisión de agua para 12 días. Si durante el viaje el consumo es un 50 % superior al previsto, ¿cuándo se les acaba el agua?
- * Se dice que dos magnitudes x e y son **inversamente proporcionales** si su **producto es constante**.
- * Ejemplos:
 - velocidad y tiempo en un movimiento uniforme:
Un coche hace un viaje a velocidad constante. Si su velocidad aumenta el 20 %, ¿cuánto disminuye el tiempo?
 - presión y volumen de un gas a temperatura constante

$$PV = k \quad (\text{Ley de Boyle-Mariotte})$$

Si manteniendo la temperatura constante el volumen del gas aumenta un 50 %, ¿cómo cambia la presión?

Porcentajes

- * Un porcentaje es una razón cuyo “denominador” es 100. Es uno de los conceptos matemáticos que más se utilizan en la vida cotidiana.

- * Ejemplos:
 - a) En las elecciones de 2004 el partido A recibió 4323890 del total de 11523876 votos, en tanto que en las elecciones de 2008 recibió 4387905 votos del total de 11600399.
$$2004 \rightarrow 37'5\% \qquad 2008 \rightarrow 37'8\%$$

 - b) Incrementos de sueldo, de precio, rebajas, impuestos ...

Ejemplos elementales

1. Calcular un tanto por ciento de una cantidad.
2. Escribir una razón en forma de porcentaje.

* ¿Sabemos razonar sobre porcentajes?

Supongamos que una tienda baja el 40% un modelo de pantalones para las rebajas de enero, y que los vuelve a subir un 40% pasadas las rebajas. El precio después de las rebajas es:

- a) el mismo del principio.
- b) mayor que al principio.
- c) menor que al principio.
- d) mayor o menor, dependiendo del precio inicial.

* ¿Qué es mayor, el 37% de 85 o el 85% de 37?

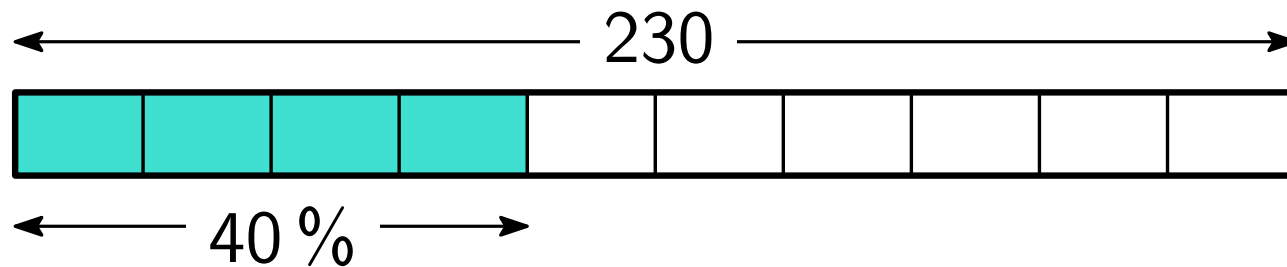
Cálculo de porcentajes

* Primeros ejemplos:

a) Calcula el 40 % de 230.

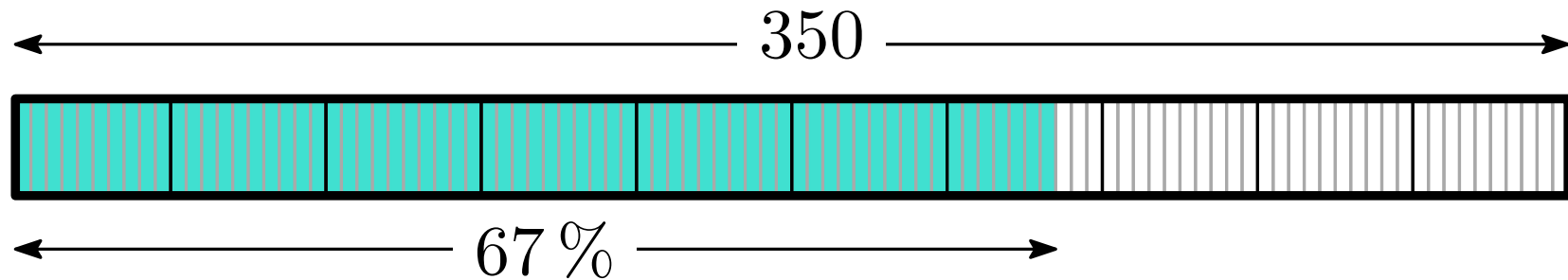
Método 1: $\frac{40}{100} \times 230$

Método 2:



Cálculo de porcentajes

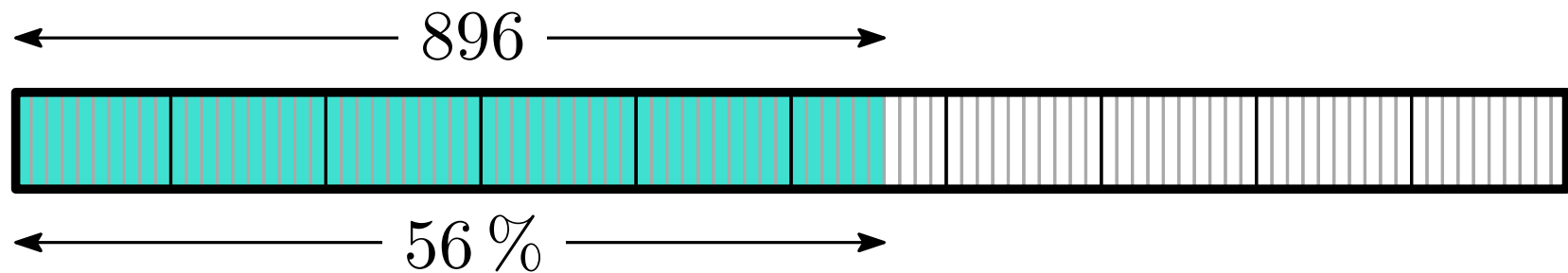
- * Calcula el 67% de 350.



- * El método gráfico ayudará a entender los casos más complicados.

Cálculo del total

- * En la Facultad de Medicina de la Universidad A el porcentaje de estudiantes matriculados que son mujeres es el 56 %. Si hay 896 mujeres matriculadas, ¿cuántos estudiantes están matriculados en la facultad?



- * Un vestido que me ha costado 63 euros estaba rebajado el 30 %. ¿Cuál era su precio antes de la rebaja?

Un error muy común

- * Confundir la base (el 100), es fuente de muchos errores.

Un ejemplo de uno muy común:

En un periódico se da el dato de que en una provincia han muerto 4288 personas, y que han nacido 2980 durante un periodo. El titular dice que hay un 70% más de fallecimientos que de nacimientos. Explica el error. ¿Cuál sería el titular correcto?

Indicación: $2980 \div 4288 \approx 0,695$

Referencia:

https://twitter.com/juvenal_tw/status/1073922586222968834

Un ejemplo sorprendente

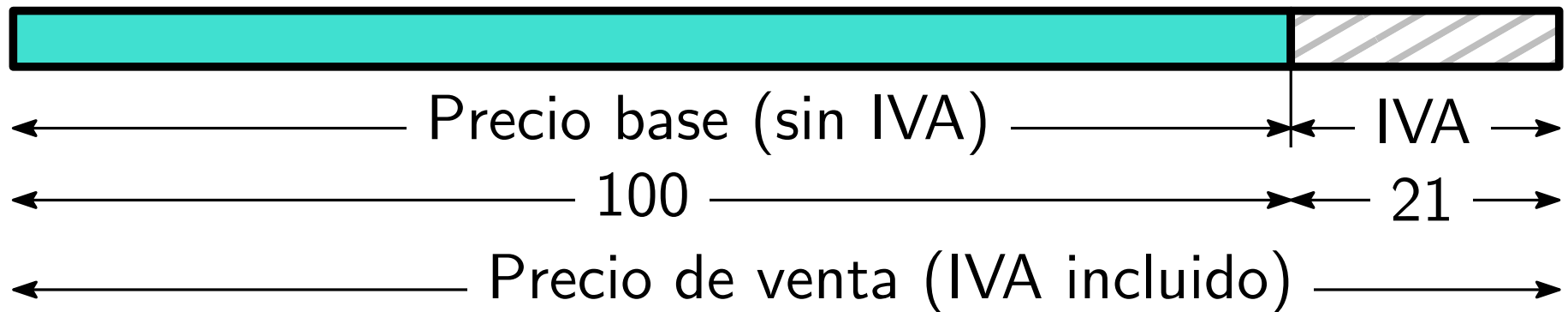
- * En una fiesta con 300 invitados el 99 % son mujeres.
¿Cuántas mujeres tendrían que salir de la fiesta para que el porcentaje de mujeres pase a ser el 98 %? (Se supone, claro, que el número de hombres no cambia en ese tiempo).

Tomado de [Adrián Paenza](#).

Impuestos y porcentajes

* El IVA

El precio de venta al público de un artículo se obtiene sumando el IVA (por ejemplo, el 21 %) a su precio base.

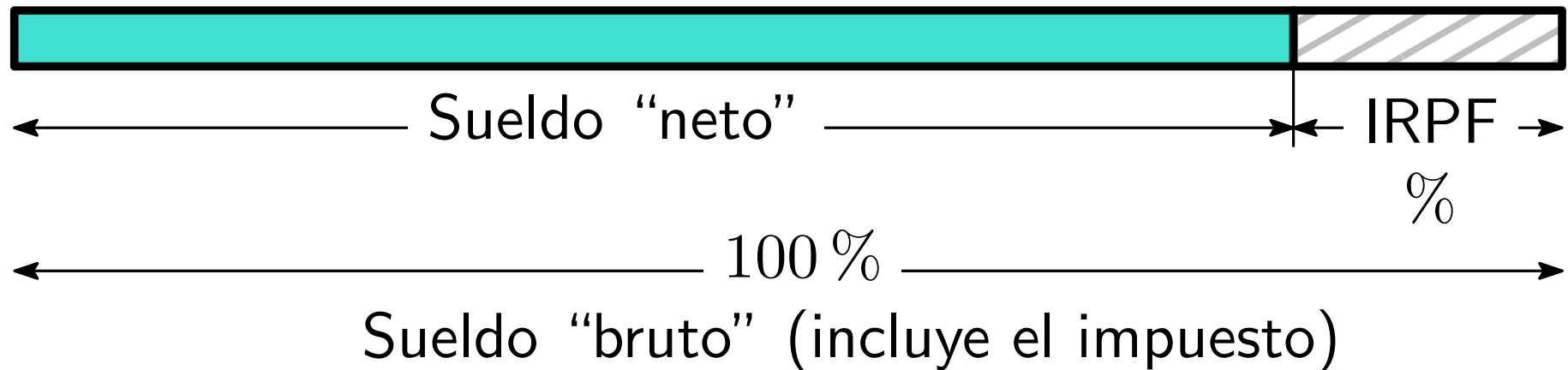


1. Unas zapatillas tienen un precio antes de impuestos de 55 euros. ¿Cuál será su precio, IVA incluido?
2. El precio de venta normal de un televisor es 900 euros. ¿Cuál será su precio en la oferta del día sin IVA?

Impuestos y porcentajes

* El IRPF

La empresa paga a un empleado un **sueldo bruto** al que se le practica una retención en concepto de IRPF. Lo que el empleado recibe en su banco es el **sueldo neto**.



1. Luis tiene un sueldo bruto de 1250 euros al mes y la retención que le practican es del 19%. ¿Cuál es su sueldo neto?
2. Tras practicarle una retención del 24%, a Paula le ingresan un sueldo neto de 1420 euros. ¿Cuál es su sueldo bruto?