Matemáticas II

12 de noviembre de 2015

Apellidos: ______________________ Nombre: ______________

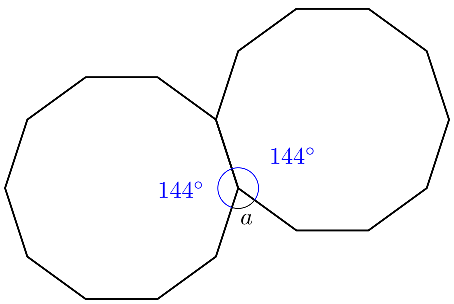
Observaciones:

a) Resuelve las siguientes cuestiones **en el espacio reservado para ello**.

b) Todos los problemas puntúan por igual. En cada problema, **la resolución se valora con el** 60 %**, y la explicación con el restante** 40 %.

1. *a*) Sabiendo que los decágonos de la figura son regulares, determina la medida del ángulo a.

   b) Sabiendo que $|RQ| = |RP|$, que $\angle PQR = 65°$ y que P, Q y R están en la circunferencia con centro en C, determina la medida del ángulo $\angle PCQ$ (el marcado en la figura).

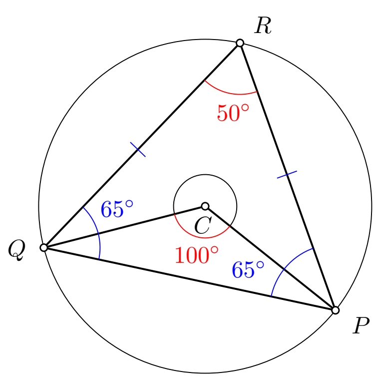


La suma de los ángulos de un decágono es $8 \times 180 = 1440$.

Como el decágono es regular, los ángulos son iguales y cada uno mide $1440/10 = 144°$.

Por tanto, como entre los tres ángulos de la figura forman un águlo completo,

$$144 + 144 + a = 360 \quad \rightarrow \quad \boxed{a = 72°}$$



Como el triángulo PRQ es isósceles, $\angle PQR = \angle RPQ$. Por tanto, el tercer ángulo del triágulo ($\angle QRP$) mide 50°.

Su ángulo central correspondiente es $\angle QCP$ (de rojo en la figura), que mide el doble que $\angle QRP$, es decir, 100°.

Por tanto, $\angle PCQ = 360° - 100° = 260°$

2. Tiramos dos dados, uno rojo y otro azul, y consideramos los sucesos

   $A \equiv$ "el resultado del dado rojo es par"

   $B \equiv$ "la suma de los dos resultados es menor que 6"

   a) Calcula $P(A \cup B)$ y $P(A|B)$.

   b) Si tiramos los dados cinco veces seguidas, ¿cuál es la probabilidad de que la suma sea al menos una vez 7?

(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Esta es la tabla del conjunto de resultados. El resultado del dado rojo es el segundo.

(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

La probabilidad de $A \cup B$ se puede calcular directamente con la fórmula de Laplace. Los resultados correspondientes al suceso $A \cup B$ están recuadrados en azul en esta segunda tabla.

Por tanto,

$$P(A \cup B) = \frac{24}{36} = \frac{2}{3}$$

También se podría calcular con el principio de inclusión-exclusión:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

(1,1)	$\boxed{(1,2)}$	(1,3)	$\boxed{(1,4)}$	(1,5)	(1,6)
(2,1)	$\boxed{(2,2)}$	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
(3,1)	$\boxed{(3,2)}$	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

$P(A|B)$ se puede calcular a partir de la fórmula

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

En la figura están coloreados de amarillo los 10 resultados correspondientes a B, y recuadrados en rojo los 4 resultados correspondientes a $A \cap B$. Por tanto,

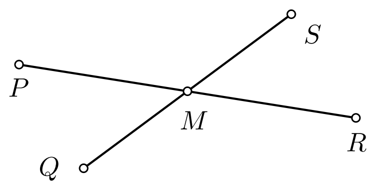
$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{4/36}{10/36} = \frac{2}{5}$$

b) En lugar del suceso $S \equiv$ "la suma es 7 al menos una vez" consideramos el suceso $S^c \equiv$ "la suma es 7 al menos una vez". Como las tiradas son independientes y la probabilidad de que la suma sea 7 en una tirada es $1/6$, $P(S^c) = \left(\frac{5}{6}\right)^5$. Por tanto,

$$P(S) = 1 - P(S^c) = 1 - \frac{5^5}{6^5} = \frac{4651}{7776} \approx 0{,}598$$

3. Supongamos que M es el punto medio del segmento PR y que también es el punto medio del segmento QS. Demuestra que los puntos P, Q, R y S forman un paralelogramo.

Lo que sabemos



$|QM| = |SM|$

$|PM| = |RM|$

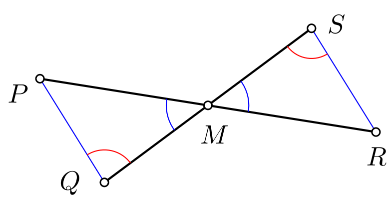
$\longrightarrow$

Lo que tenemos que demostrar

$PQRS$ es un paralelogramo.

Definición de paralelogramo: cuadrilátero en el que los lados opuestos son paralelos.

Una demostración es un conjunto de argumentos que me permiten pasar de la figura izquierda a la derecha.



$\angle PMQ = \angle RMS$ (opuestos por el vértice)
$|QM| = |SM|$ (lo dice el enunciado)
$|PM| = |RM|$ (lo dice el enunciado)

$\Big\downarrow$ LAL

$QMP \cong SMR$

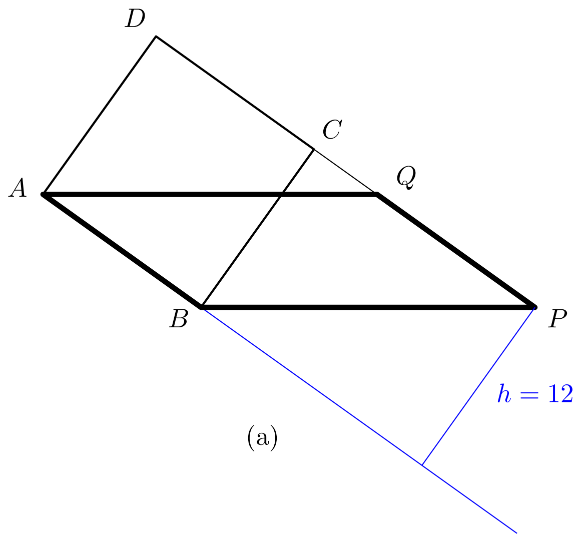
Como los triángulos QMP y SMR son congruentes, podemos afirmar que los ángulos $\angle MQP$ y $\angle MSR$ son iguales.

De la igualdad de estos ángulos se deduce que los segmentos PQ y SR deben ser paralelos (son ángulos alternos-internos).

Repitiendo el razonamiento para los triángulos PMS y RMQ se deduce que los lados QR y PS también son paralelos.

4. *a*) Sabiendo que $ABCD$ es un cuadrado de perímetro 48, calcula el área del paralelogramo $ABPQ$.

b) Tomando como unidad el lado de los cuadrados de la malla, calcula el área del cuadrilátero de la figura (b) (no se puede usar el Teorema de Pitágoras).

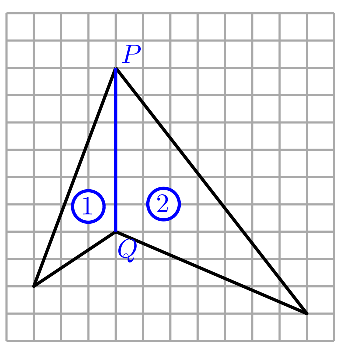


(a)

Como el cuadrado $ABCD$ tiene perímetro 48, cada uno de sus lados mide 12.

En el paralelogramo $ABPQ$ la altura h sobre la base AB es igual al lado del cuadrado. Por tanto,

$$A = b \times h = 12 \times 12 = 144$$



(b)

El segmento PQ divide al cuadrilátero en dos triángulos cuya área es sencilla de calcular, ya que la altura sobre la base PQ es conocida:

$$A = A_1 + A_2 = \frac{6 \times 3}{2} + \frac{6 \times 2}{2} = 30$$

Otra forma de calcular el área se califica con el 60% de la nota, si el resultado es correcto (la explicación es mucho más complicada de lo que requiere el problema).