

Tema 2: Figuras geométricas

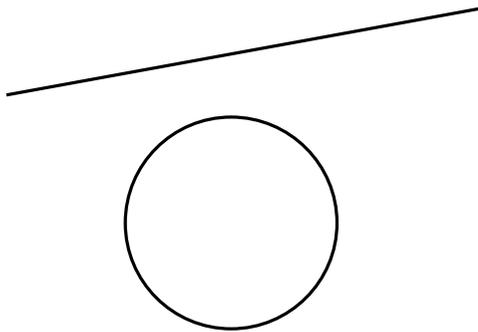
- * En este tema empezaremos a estudiar:
 1. la circunferencia.
 2. los triángulos.
 3. los cuadriláteros.
 4. los polígonos.

La circunferencia (p. 31)

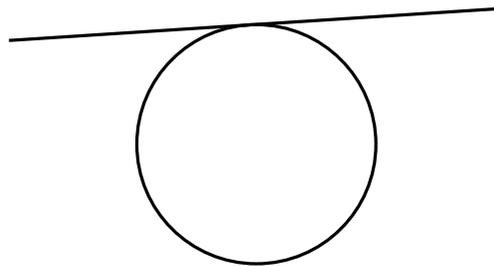
- * El cerebro humano es muy bueno reconociendo formas. Al acabar educación infantil, los niños identifican perfectamente la forma **circunferencia**.
- * Para avanzar en su estudio, y en su relación con otros objetos geométricos, necesitamos una **definición**.
- * **Definición:** La circunferencia de centro el punto C y radio r es el conjunto de puntos que están a distancia r de C .
- * Una propuesta didáctica para **descubrir** la definición:
 1. Se divide a la clase en grupos de trabajo.
 2. Se pide a cada niño que, en una transparencia (o papel transparente) dibuje un punto C y varios puntos a distancia dada (por ejemplo, 6 cm) de C .
 3. Se superponen las transparencias de los niños de cada grupo (haciendo coincidir C).

La circunferencia

- * No en primer ciclo, pero sí en 4º o 5º curso, el siguiente paso debe ser adquirir **destreza en el uso del compás**.
- * Posiciones relativas de recta y circunferencia, y de dos circunferencias:

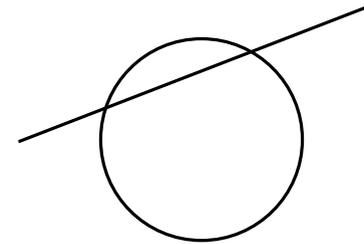


disjuntas



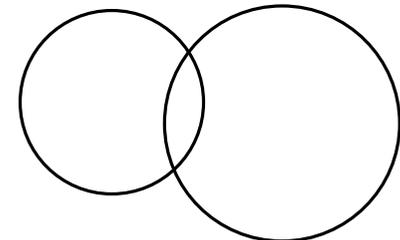
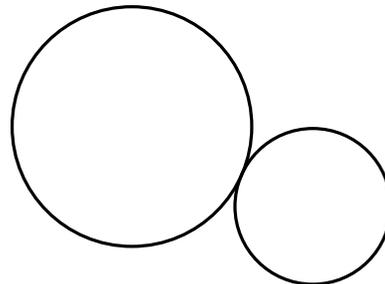
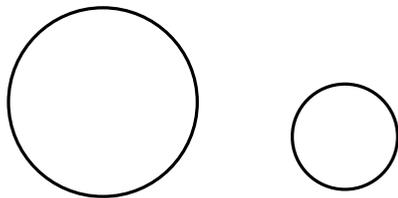
tangentes

un punto en común



secantes

dos puntos en común

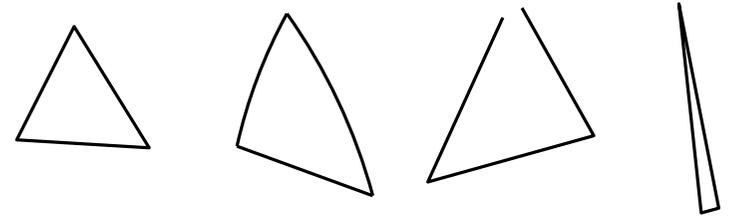


Triángulos (p. 36)

- * Como con cada objeto geométrico, podemos considerar dos niveles elementales:
 - ★ en Infantil y Primer ciclo, un triángulo se “reconoce por su aspecto”.
 - ★ más adelante, es conveniente disponer de una **definición precisa**.

Niveles de aprendizaje de la geometría (van Hiele)

- * Nivel 0: visual. El niño percibe el aspecto general, y su relación con objetos del entorno.



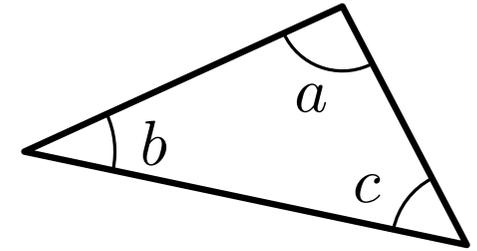
- * Nivel 1: analítico. El niño entiende las propiedades, pero sin ordenarlas ni relacionarlas.
 - ★ No distingue **definición** \leftrightarrow **propiedades**.
 - ★ Hace razonamiento **inductivo**, pero no **deductivo**.
- * Nivel 2: abstracto. Entiende definición y propiedades, pero sin llegar al razonamiento deductivo formal.
 - ★ Definición de rectángulo \rightarrow los cuadrados también son rectángulos.
- * Nivel 3: deductivo. Razonamientos correctos, demostraciones.
- * Nivel 4: riguroso (geometría abstracta).

Triángulos (p. 36)

- * Podemos encontrar varias posibles definiciones de triángulo (en particular, algunas incluyen el interior y otras no). Lo importante es saber reconocer, y manejar, una **buena definición**.
- * **Definición:** Un triángulo es la región del plano delimitada por los 3 segmentos definidos por 3 puntos **no colineales**.
 - ★ los puntos son los **vértices**.
 - ★ los segmentos, las **aristas**.

Suma de los ángulos de un triángulo

* **Propiedad:** La suma de los tres ángulos de cualquier triángulo es 180° .

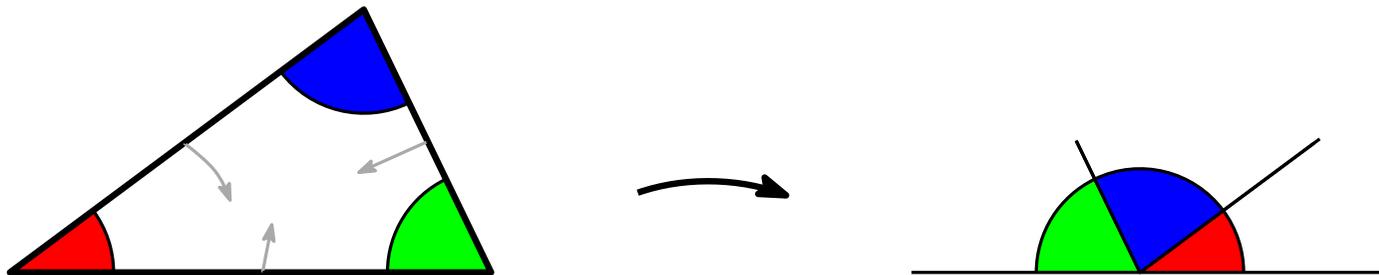


* Este es uno de los hechos básicos en geometría y es esencial dar argumentos que muestren que siempre es cierto.

$$a + b + c = 180^\circ$$

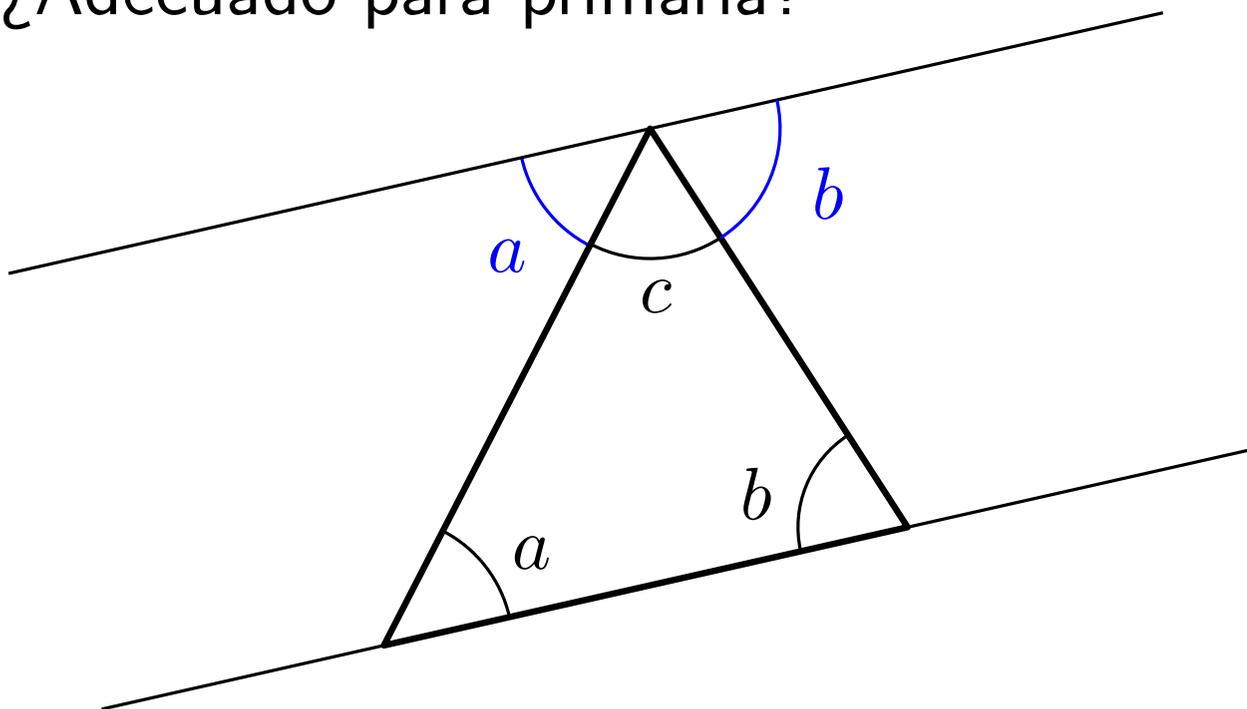
* Veamos dos:

1. El primero, quizá mas intuitivo y basado en materiales:



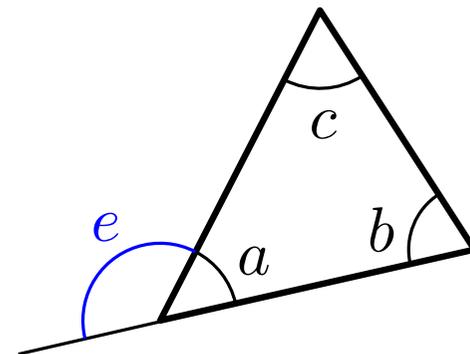
Suma de los ángulos de un triángulo

2. El segundo, más **abstracto**. Ya es una **demostración**.
¿Adecuado para primaria?



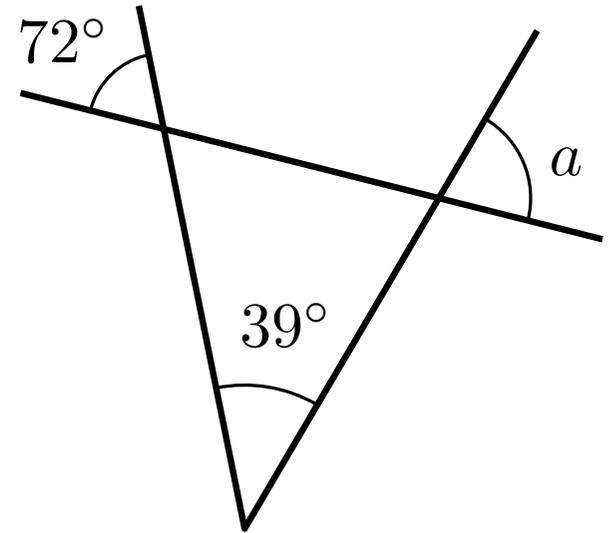
$$a + b + c = 180^\circ$$

- * El ángulo e de la figura se llama **ángulo exterior**. ¿Sabrías encontrar una relación entre la medida de e y la de los ángulos del triángulo?

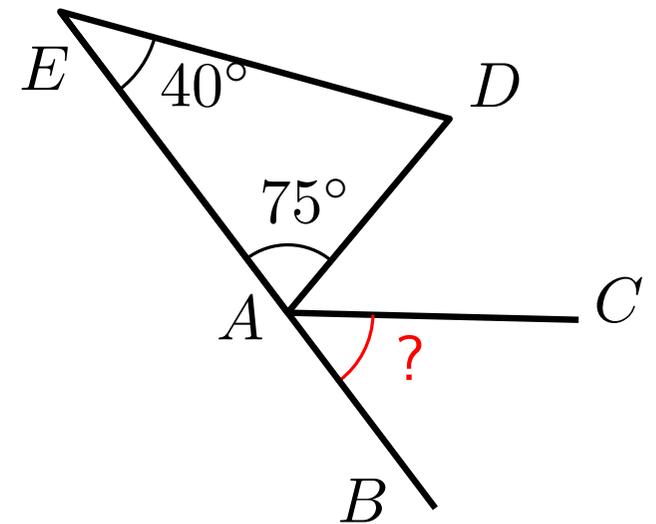


Problemas

* ¿Cuánto mide el ángulo a de la figura?

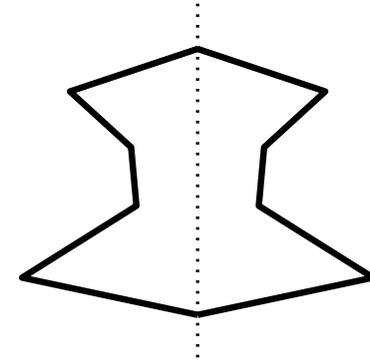


* Sabiendo que AC es la bisectriz del ángulo $\angle BAD$, calcula cuánto mide el ángulo $\angle BAC$. (Los puntos E , A y B son colineales).



Triángulos y simetría

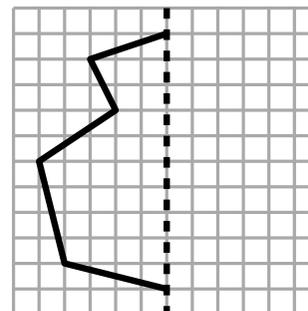
- * La **simetría** es un concepto sencillo de entender, y nos permitirá avanzar en el estudio de las figuras geométricas.
- * Una **línea de simetría** divide a un objeto en dos partes “iguales”.



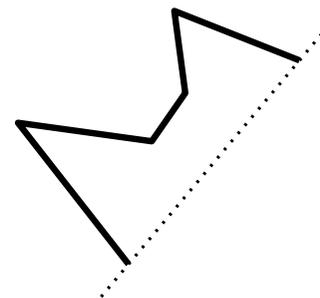
- * Algunas sugerencias para familiarizarse con el concepto:
 - ★ construir objetos simétricos haciendo recortables.
 - ★ la simetría está “por todas partes”.

Simetría

- * Ejercicio típico en los libros:

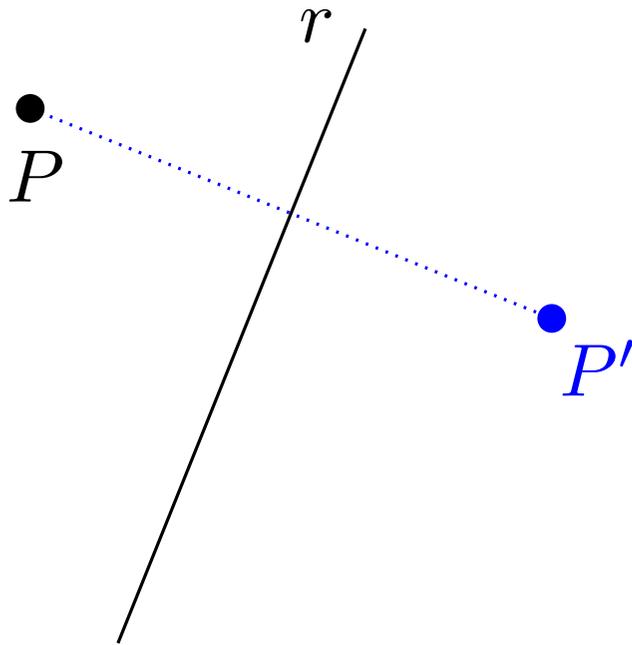


- * Ojo: la recta de simetría puede no ser ni vertical ni horizontal.



- * Hay figuras con más de una recta de simetría.
 - ★ ¿Una figura con dos rectas de simetría?
 - ★ ¿Una figura con cuatro rectas de simetría?
 - ★ ¿Una figura con infinitas rectas de simetría?

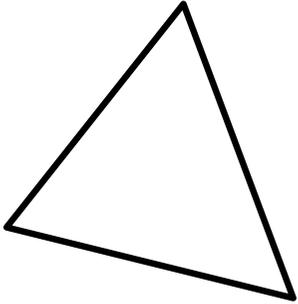
Una definición precisa



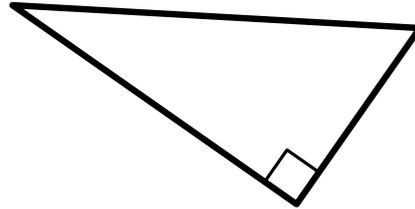
El simétrico de un punto P respecto de la recta r es el punto que está en la perpendicular a r que pasa por P y que está a la misma distancia de r que P .

Tipos de triángulos (p. 43)

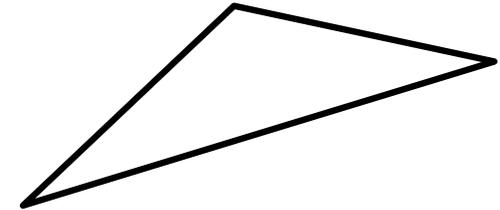
Según sus ángulos



triángulo acutángulo
todos sus ángulos
agudos

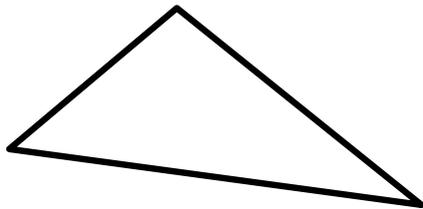


triángulo rectángulo
un ángulo recto

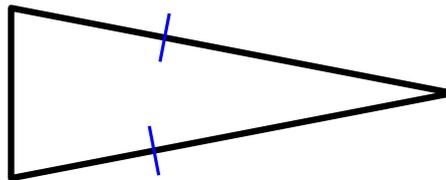


triángulo obtusángulo
un ángulo obtuso

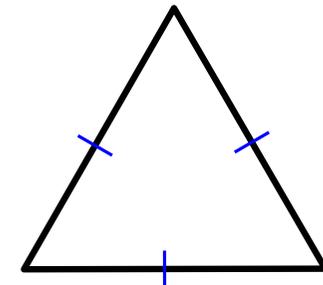
Según sus lados



triángulo escaleno
los tres lados de
distinta longitud



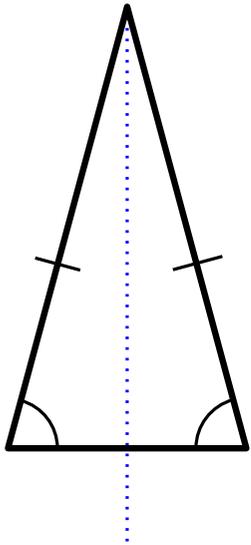
triángulo isósceles
al menos dos lados
iguales



triángulo equilátero
los tres lados iguales

Triángulos isósceles y equiláteros

- * Los hemos definido en términos de sus lados.

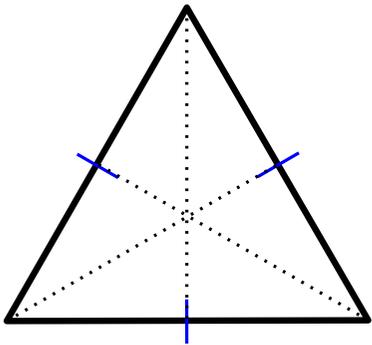


- * Un triángulo isósceles tiene (al menos) **una recta de simetría**.

Los ángulos que forman los lados iguales con el tercero (la “base”) son iguales.

- * Recíproco también cierto: un triángulo que tiene dos ángulos iguales siempre es isósceles.

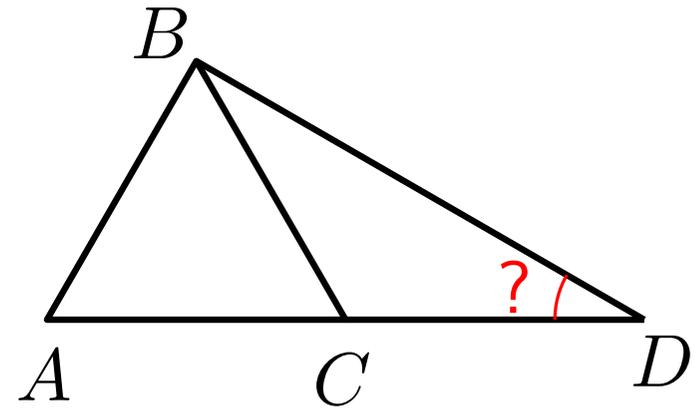
- * Un triángulo equilátero tiene **tres rectas de simetría**. Por tanto, sus tres ángulos son iguales.



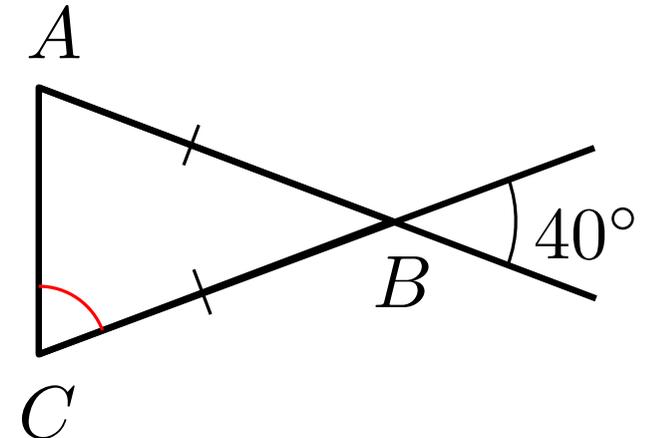
- * Recíproco también cierto: los triángulos que tienen los tres ángulos iguales son equiláteros.

Problemas

- * Sabiendo que $|AB| = |AC| = |BC| = |CD|$,
calcula la medida del ángulo $\angle CDB$.



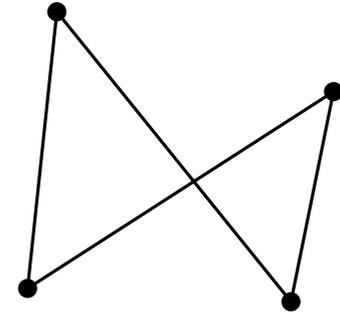
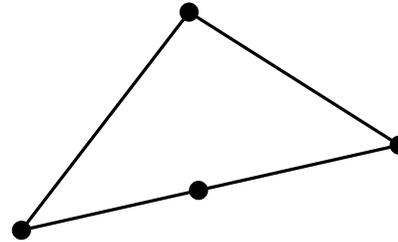
- * Calcula la medida del ángulo $\angle ACB$ de la figura.



Cuadriláteros (p. 45)

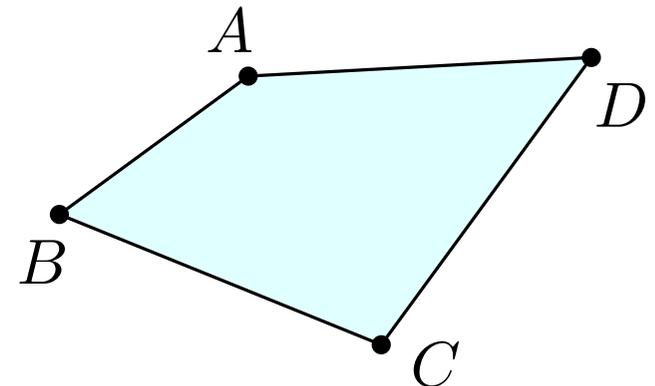
* La idea intuitiva ya está clara en el primer ciclo.

* ¿Son cuadriláteros?



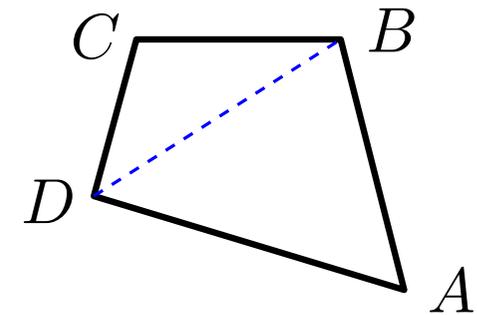
* Un **cuadrilátero** está formado por 4 puntos distintos A , B , C , D (no hay 3 colineales) y cuatro segmentos AB , BC , CD , DA , que no tienen puntos en común, excepto los extremos.

* Dependiendo del contexto, el interior también puede considerarse parte del cuadrilátero.

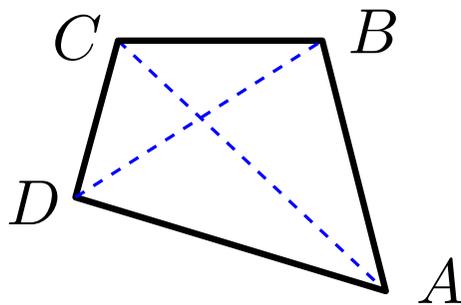


Tipos especiales de cuadriláteros

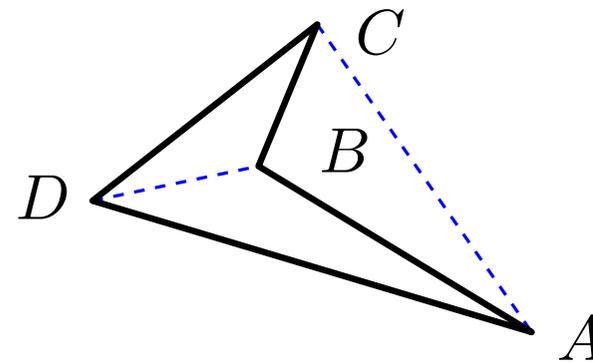
- * Una **diagonal** es un segmento entre vértices no consecutivos.



- * Un cuadrilátero es **convexo** si sus dos diagonales están en el interior del polígono. En otro caso, se dice que el cuadrilátero es **no convexo**.



convexo

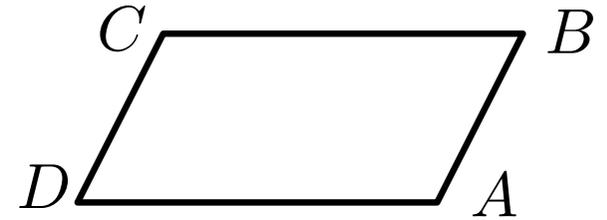


no convexo

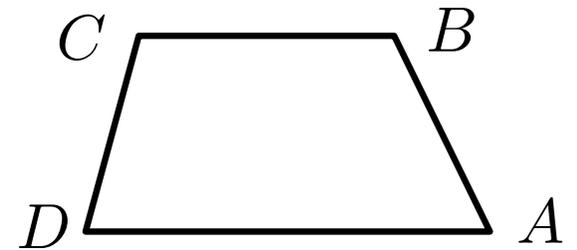
- * **Obs:** La suma de los ángulos de un cuadrilátero es **360°**

Tipos especiales de cuadriláteros

- * Un **paralelogramo** es un cuadrilátero en el que los lados **opuestos** son **paralelos**.



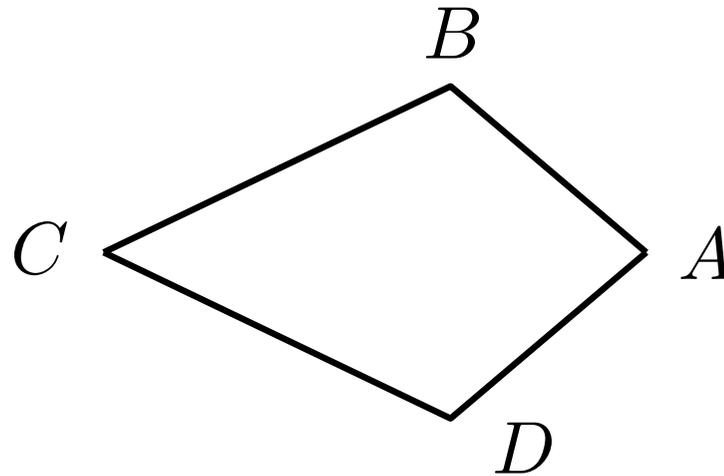
- * Un **trapecio** es un cuadrilátero con **dos lados paralelos** (y los otros dos no).



- * Si los dos lados no paralelos tienen la misma longitud, el trapecio es **isósceles**.
- * Un **trapezoide** es un cuadrilátero **sin lados paralelos** (puede ser convexo o no).

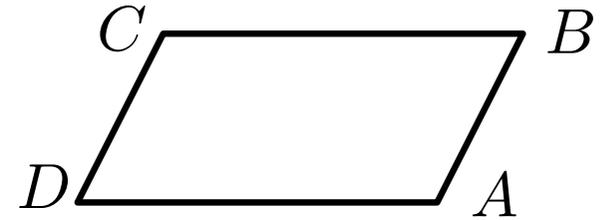
Terminología

- * La terminología en EGT (que es la usual en EEUU) es un poco diferente.
Un **trapecio** se llama en el libro *trapezoid*, y no existe un término especial para el *trapezoide* español.
- * Definen además otro tipo de cuadrilátero, que llaman *kite* (cometa). Nosotros lo introduciremos en la hoja de problemas.



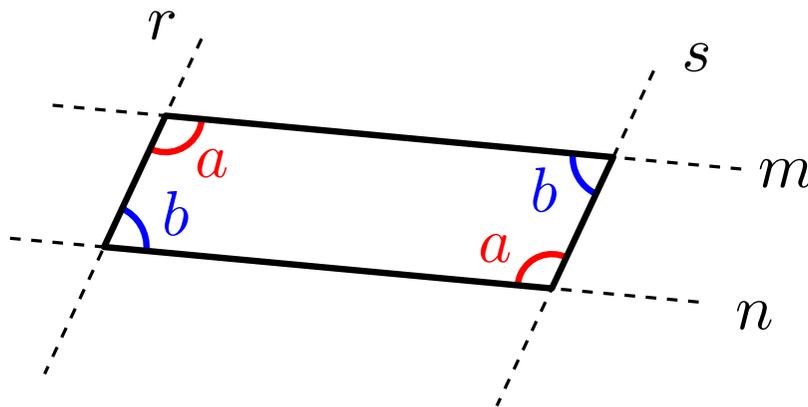
Paralelogramos

- * Un **paralelogramo** es un cuadrilátero en el que los lados **opuestos** son **paralelos**.



Ángulos de un paralelogramo

- * Demuestra que en cualquier paralelogramo los ángulos **opuestos son iguales** y los ángulos **consecutivos son suplementarios**.



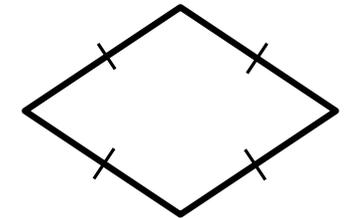
$$a + b = 180^\circ$$

Clasificación de los paralelogramos

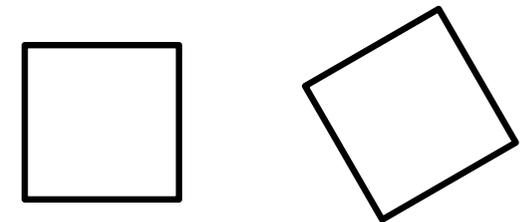
- * Un **rectángulo** es un paralelogramo en el que sus **cuatro ángulos son rectos**.



- * Un **rombo** es un paralelogramo con los **cuatro lados iguales**.



- * Un **cuadrado** es un paralelogramo que es a la vez un **rectángulo y un rombo**.

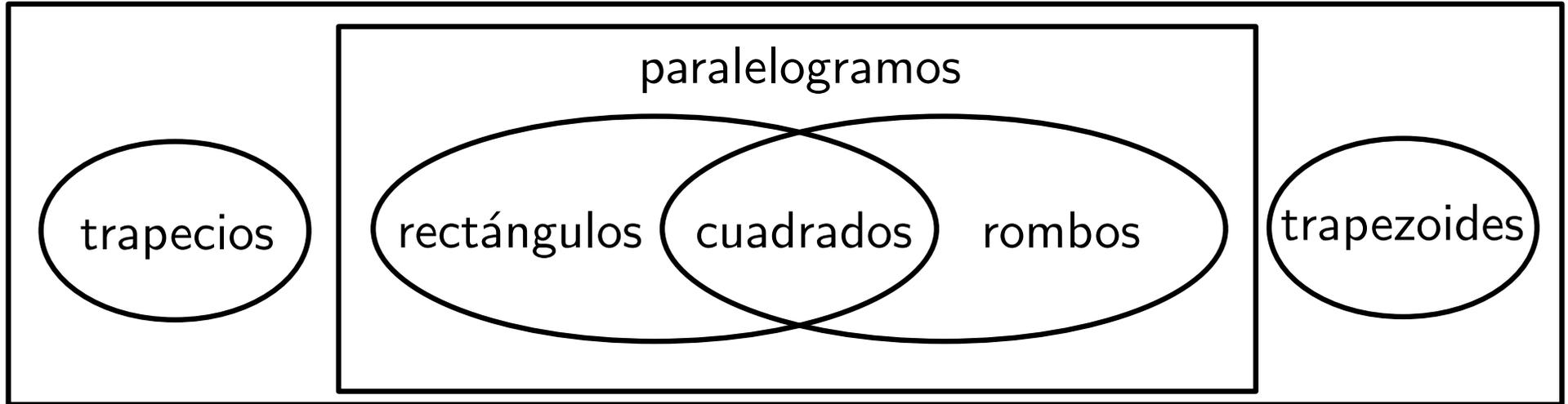


- * Un **romboide** es un paralelogramo que **no es ni rectángulo ni rombo**.



Cuadriláteros: clasificación

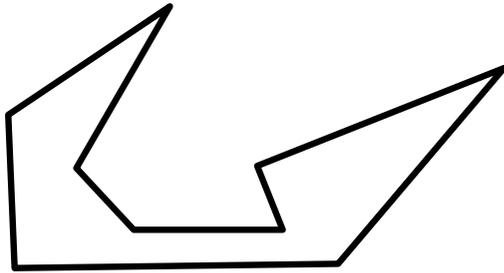
Cuadro resumen



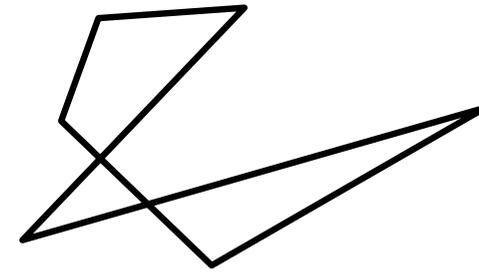
- * **Obs:** Esta no es la clasificación que se utiliza normalmente en primaria (aunque esto es algo que seguramente debería cambiar ...).

Polígonos (p. 67)

- * La idea de polígono de n lados es sencilla de introducir de manera informal.



polígono (de 9 lados)

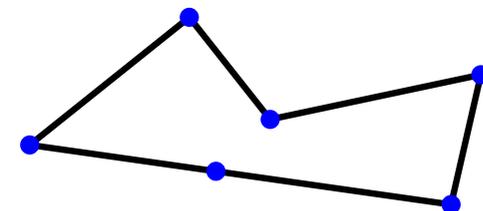
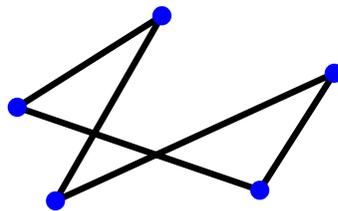


NO es un polígono

- * **Definición:** Dados $n \geq 3$ puntos distintos P_1, P_2, \dots, P_n , una **línea poligonal cerrada** es el conjunto de segmentos

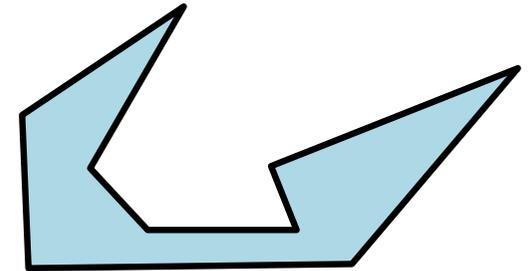
$$P_1P_2, P_2P_3, \dots, P_{n-1}P_n, P_nP_1$$

Los puntos son los **vértices** y los segmentos los **lados** o **aristas**.



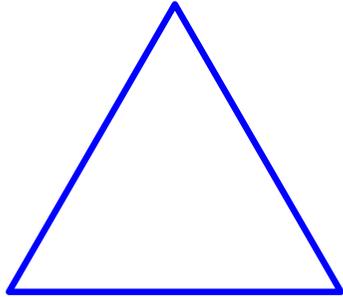
Polígonos

- * **Definición:** Un **polígono de n lados** es una línea poligonal cerrada de n vértices tal que:
 - a) los lados sólo se cortan en los extremos.
 - b) dos lados consecutivos no son colineales.
- * En algunos contextos, polígono incluye también el interior.
Lo importante es ser claro en cada momento. Podemos llamarle al interior **región poligonal**.

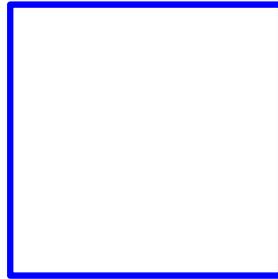


Polígonos regulares

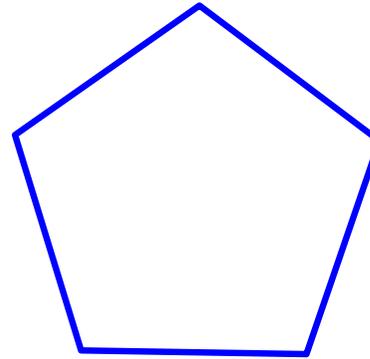
- * Se dice que un polígono es **regular** si todos sus ángulos son iguales y todos sus lados son iguales.



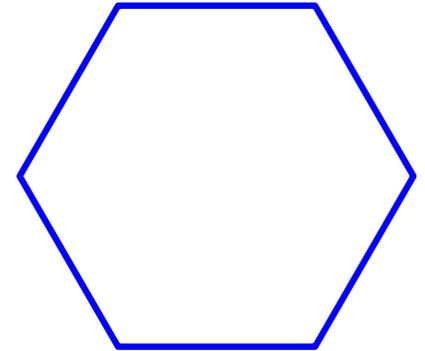
triángulo
equilátero



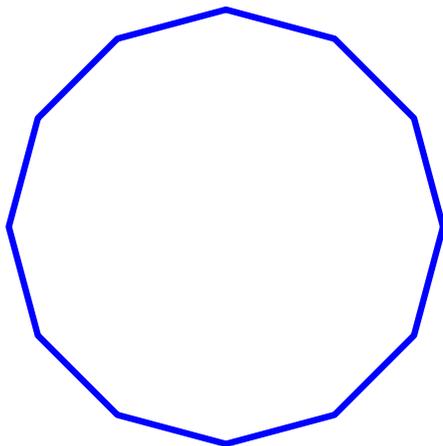
cuadrado



pentágono
regular



hexágono
regular

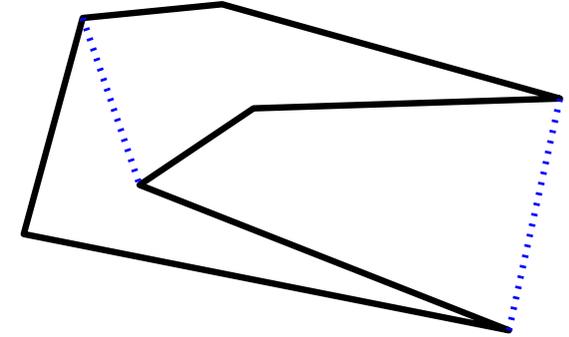


dodecágono
regular

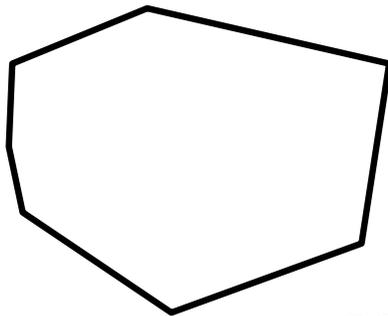
Polígonos convexos

* La definición que vimos para cuadriláteros convexos se extiende de forma inmediata a polígonos de cualquier número de lados.

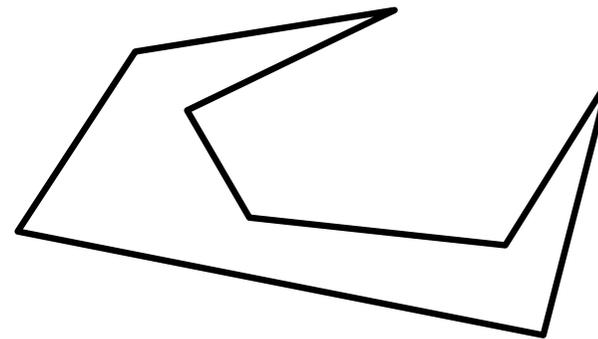
* Una **diagonal** es un segmento entre vértices no consecutivos.



* Un polígono es **convexo** si todas sus diagonales están en el interior del polígono. En otro caso, se dice que el polígono es **no convexo**.



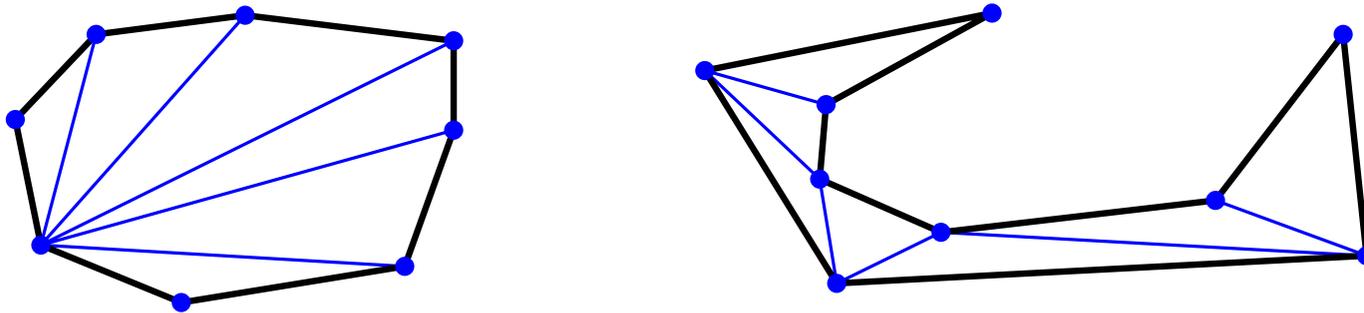
convexo



no convexo

Ángulos de un polígono

- * ¿Cuánto vale la suma de los ángulos de un polígono de n lados (un n -gono)?
 $n = 3$: 180°
 $n = 4$: 360°
- * **Propiedad:** Utilizando diagonales, cualquier polígono de n lados se puede descomponer en $n - 2$ triángulos.



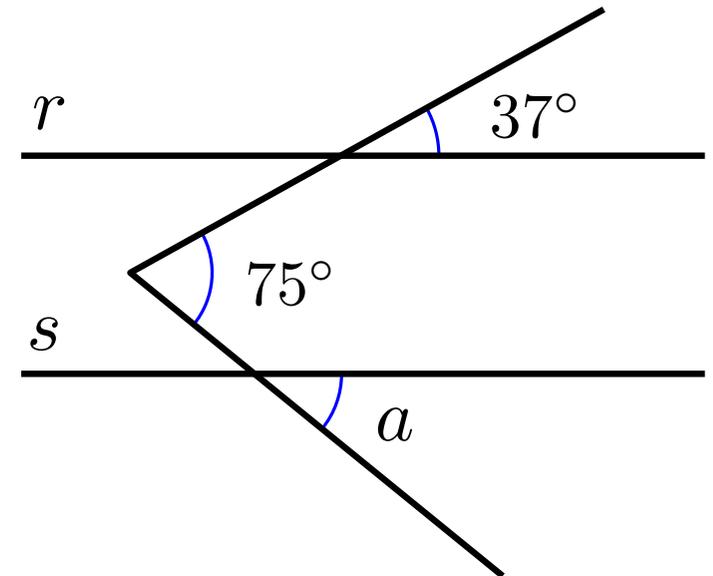
Idea: ir insertando diagonales que no se corten, hasta que no se pueda continuar.

- * **Propiedad:** La suma de los **ángulos internos** de cualquier polígono de n lados es $(n - 2)180^\circ$.

Figuras geométricas - Continuación

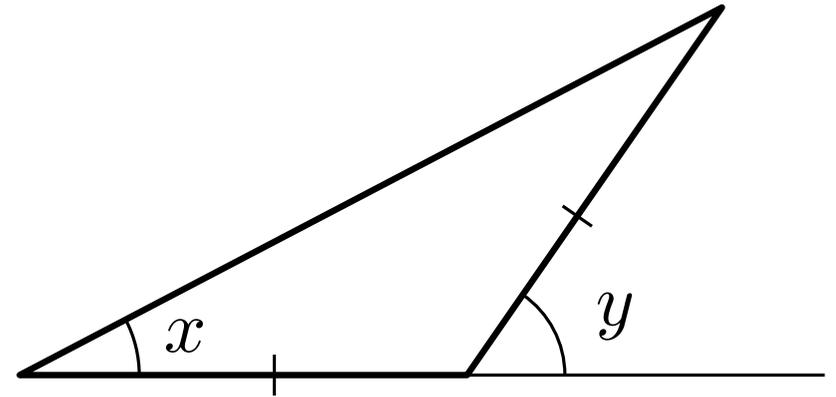
- * El objetivo es presentar relaciones entre los conceptos y objetos introducidos hasta ahora, y ver cómo ya podemos hacer problemas variados y razonamientos sencillos.

- * Problema: sabiendo que $r \parallel s$, determina la medida del ángulo a .
Indicación: puedes completar la figura con algún elemento auxiliar.

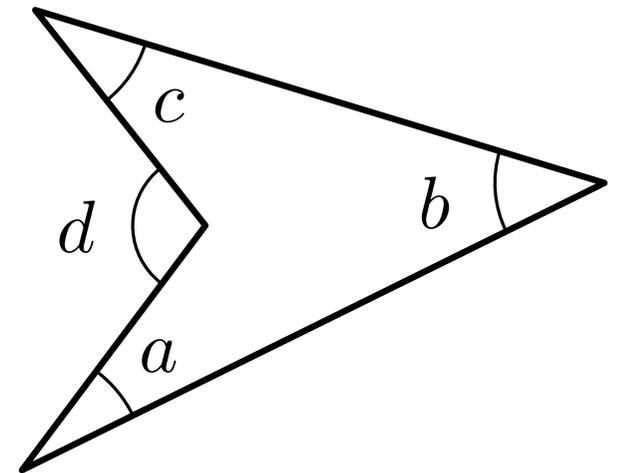


Geometría y razonamiento

- * Sabiendo que el triángulo de la figura es isósceles, encuentra la relación entre los ángulos x e y .



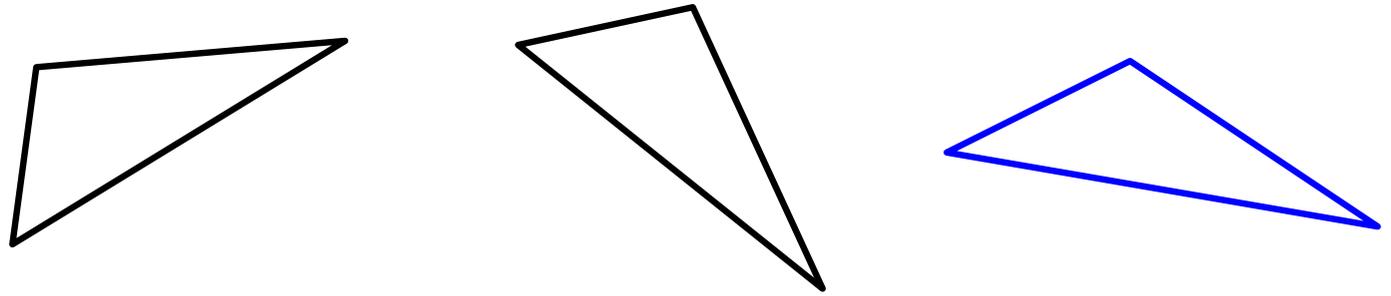
- * Demuestra que, en la figura, $d = a + b + c$.



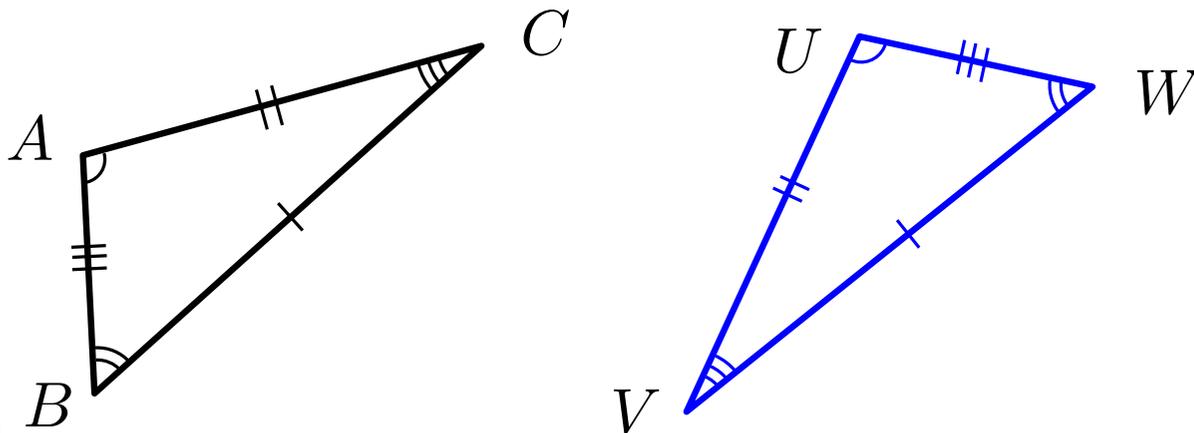
Triángulos congruentes (p. 82)

* Definición en primaria:

Dos triángulos son **congruentes** (iguales) si “tienen la misma forma”.



* **Definición:** Dos triángulos son **congruentes** si sus lados “correspondientes” tienen la misma longitud y sus ángulos “correspondientes” son iguales.



$$ABC \leftrightarrow \Delta ABC$$

Notación:

$$ABC \cong UVW$$

Criterios de congruencia

- * Criterio LLL: Si dos triángulos tienen los tres lados iguales (dos a dos) entonces son congruentes.

Idea: construye un triángulo de lados 8 cm, 6 cm y 5 cm.

- * Esta propiedad (que las longitudes de los lados determinan el triángulo) ya no es cierta para polígonos de cuatro o más lados.

Ejercicio: dibuja varios cuadriláteros con los cuatro lados de longitud 2 cm.

- * Esta observación es muy importante en el diseño (**rigidez de estructuras**).

Criterios de congruencia

* Hay otros dos criterios para comprobar que dos triángulos son congruentes.

* Criterio ALA: Si dos triángulos tienen un lado y los dos ángulos adyacentes iguales entonces son congruentes.

Ejemplo: construye un triángulo con un lado de 9 cm y con ángulos adyacentes de 65° y 35° .

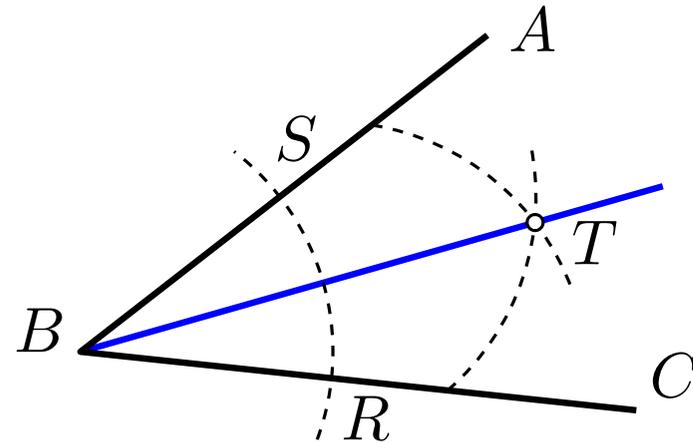
* Criterio LAL: Si dos triángulos tienen dos lados y el ángulo que definen iguales entonces son congruentes.

Ejemplo: construye un triángulo con un lado de 9 cm, otro de 6 cm, y tal que estos dos lados forman un ángulo de 55° .

Aplicaciones de la congruencia de triángulos

* Bisectriz de un ángulo

¿Por qué la semirrecta que pasa por B y T es la bisectriz?

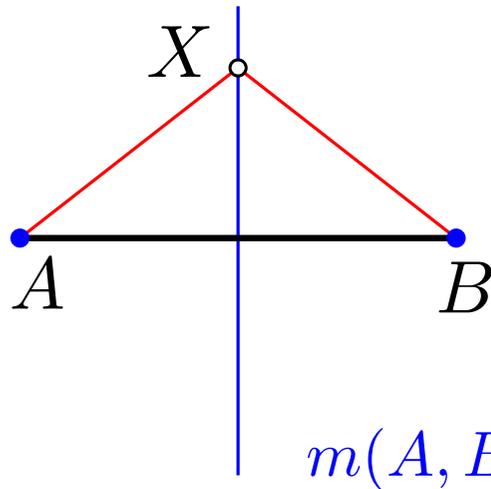


Mediatriz de un segmento

- * **Definición:** La mediatriz de un segmento AB es el conjunto de puntos que están **a la misma distancia** de A que de B .
- * Ventajas de definir la mediatriz de esta forma:
 - ★ como veremos, es ésta propiedad la que se usa con más frecuencia.
 - ★ a partir de esta definición es sencillo proponer una actividad para que el niño “descubra” el objeto geométrico. Por ejemplo: dibuja un punto a distancia 6 cm, de A y de B , luego otro a distancia 8, ...

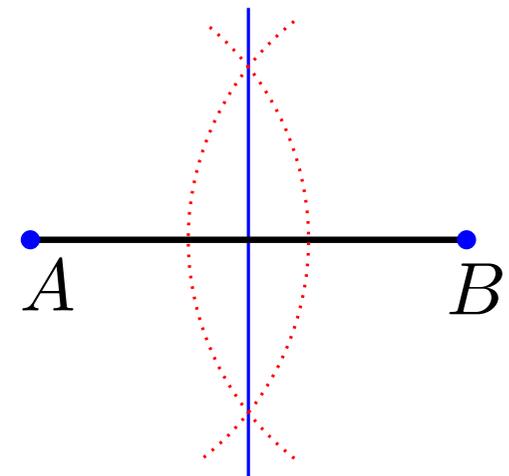
Mediatriz de un segmento

- * **Propiedad:** La mediatriz de un segmento AB es la recta perpendicular al segmento que pasa por su punto medio.



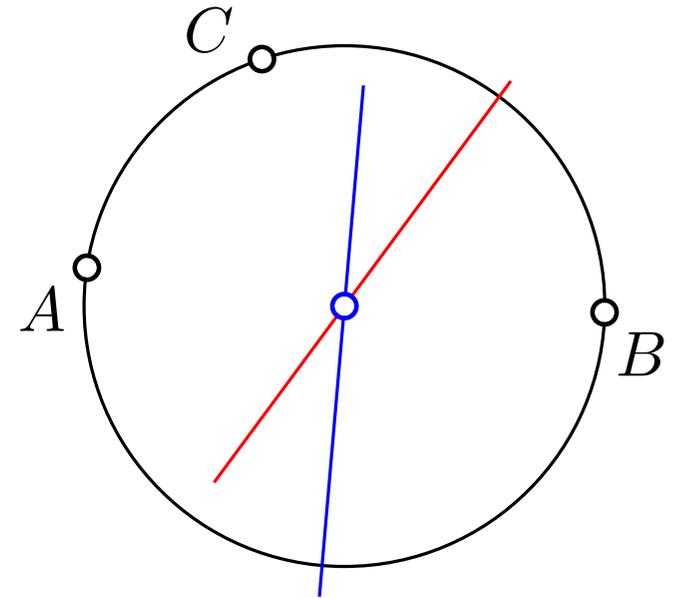
Demuestra que $|XA| = |XB|$.

- * **Construcción de la mediatriz:** Ahora que sabemos que es una recta, es suficiente determinar dos de sus puntos.

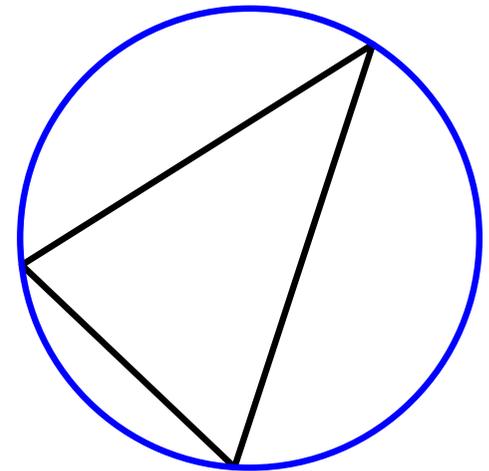


Circunferencia que pasa por tres puntos

- * Dados tres puntos no alineados, existe una única circunferencia que pasa por ellos.

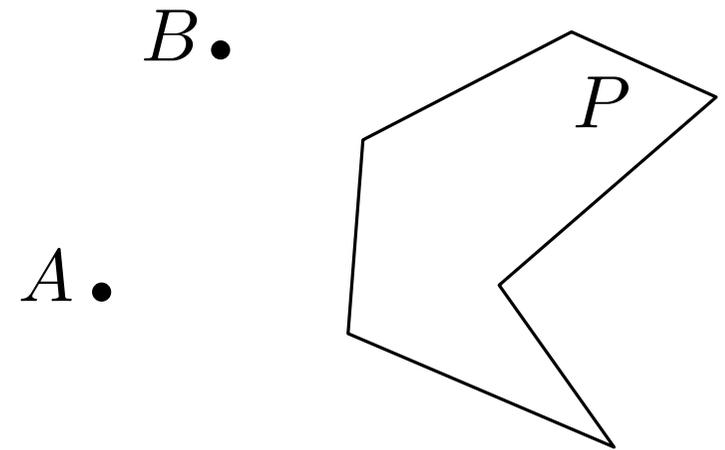


- * La circunferencia que pasa por los tres vértices de un triángulo se llama **circunferencia circunscrita**.

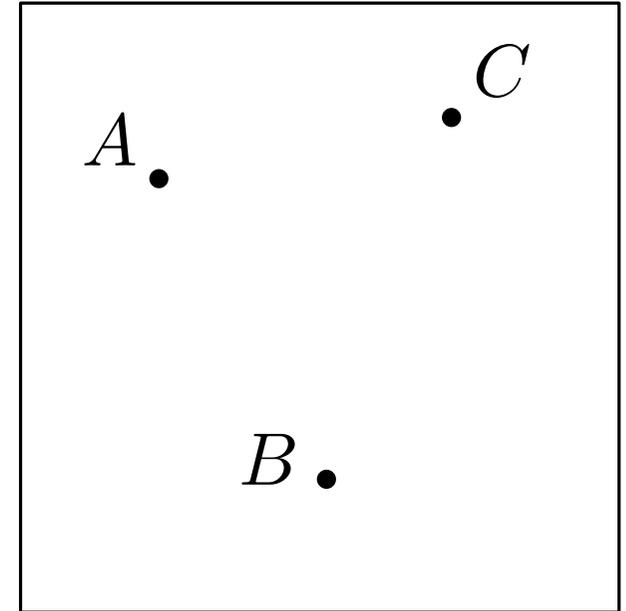


Problemas

- * Dibuja la circunferencia más grande que pasa por los puntos A y B y que tiene el centro dentro del polígono P .



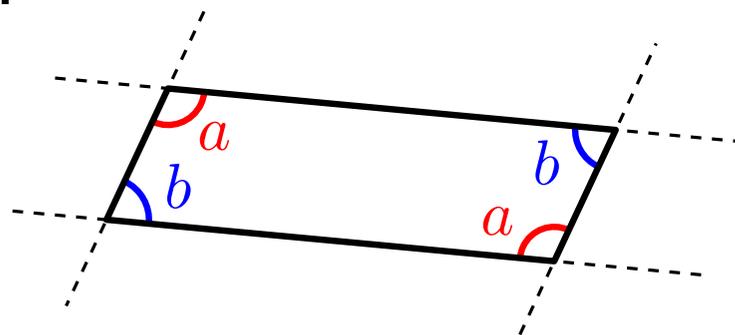
- * En el parte de la figura hay papeleras en los puntos A , B y C . Dibuja la región de puntos cuya papeleras más cercana es la situada en el punto A .



Congruencias y cuadriláteros (p. 96)

* Un **paralelogramo** es un cuadrilátero en el que los **lados opuestos** son **paralelos**.

* Hasta ahora, propiedades de los ángulos:



$$a + b = 180^\circ$$

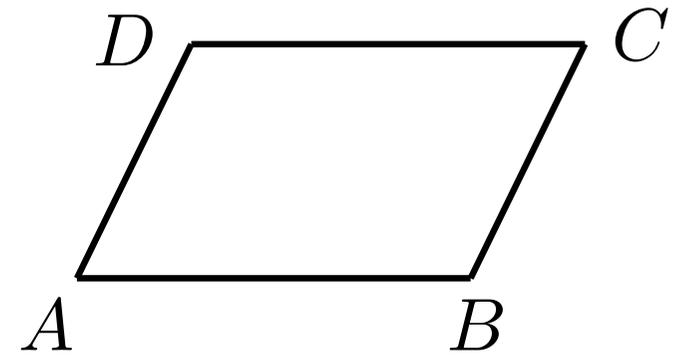
* Otras dos propiedades. En cualquier paralelogramo:

(1) los lados opuestos son iguales.

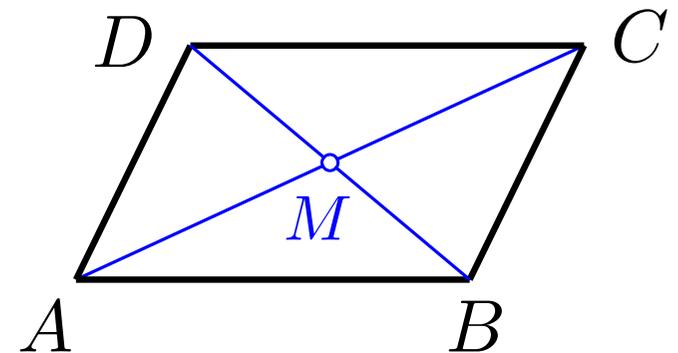
(2) las diagonales se cortan en su punto medio.

Demostraciones

- * Demuestra que si $ABCD$ es un paralelogramo, entonces $|AB| = |CD|$ y $|BC| = |DA|$.



- * Demuestra que las diagonales de un paralelogramo se cortan en su punto medio.

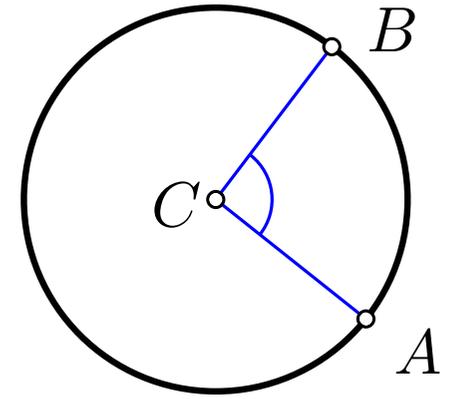


Congruencias y cuadriláteros

- * Estas propiedades también caracterizan a los paralelogramos. En concreto, supongamos que tenemos un cuadrilátero $ABCD$.
 - (1) si las dos parejas de ángulos opuestos son iguales, entonces el cuadrilátero es un paralelogramo.
 - (2) si las dos parejas de lados opuestos son iguales, entonces el cuadrilátero es un paralelogramo.
 - (3) si las diagonales se cortan en el punto medio, entonces el cuadrilátero es un paralelogramo.
 - (4) si dos lados opuestos son iguales y paralelos, entonces el cuadrilátero es un paralelogramo.
- * No se trata de aprenderse esto de memoria, sino de razonar sobre ello. Veremos alguna de estas propiedades en la hoja de problemas.

Ángulos en la circunferencia

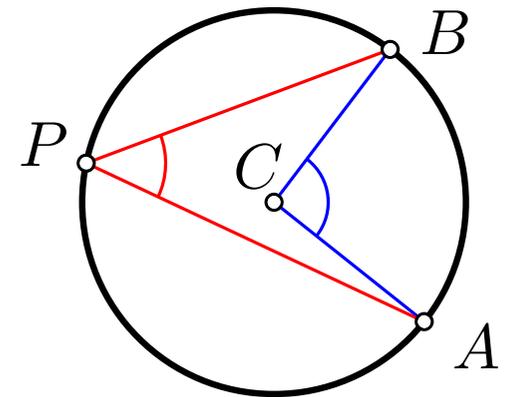
- * Consideremos puntos A y B en una circunferencia de centro C . El ángulo $\angle ACB$ se llama **ángulo central**.



- * Consideremos ahora un punto P en la circunferencia. El ángulo $\angle APB$ se llama **ángulo inscrito**.

Siempre se verifica

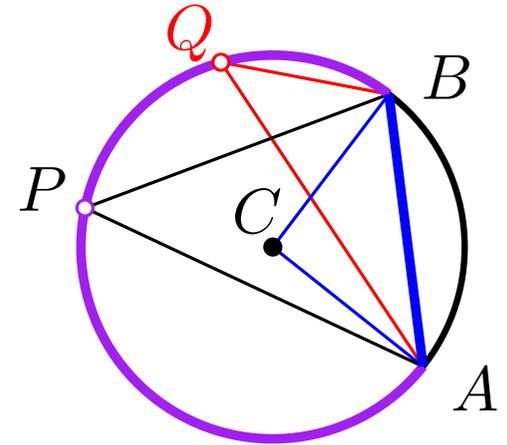
$$\angle APB = \frac{1}{2} \angle ACB$$



(El ángulo inscrito es la mitad del central correspondiente)

Ángulo central - Ángulo inscrito

- * Como $\angle APB = \frac{1}{2} \angle ACB$, el ángulo $\angle APB$ es el mismo para cualquier punto P en el arco de la figura. Este arco se llama **arco capaz** del segmento AB .



- * Ejercicio:

1. dibuja el conjunto de puntos X para los que $\angle AXB = 60^\circ$
2. dibuja el conjunto de puntos Y para los que $\angle AYB = 40^\circ$.

El primer apartado debes hacerlo solo con regla (sin graduar) y compás. Para el segundo necesitarás el transportador.

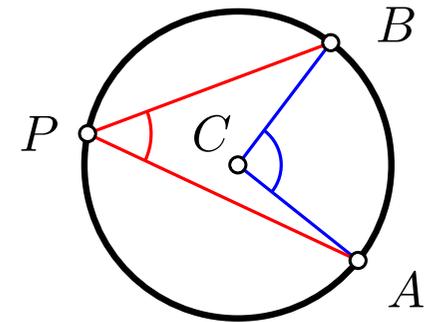
•
B

•
A

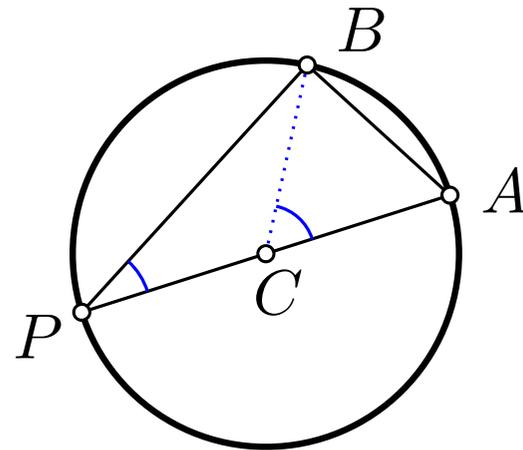
Ángulo central - Ángulo inscrito

* Vamos a demostrar que siempre

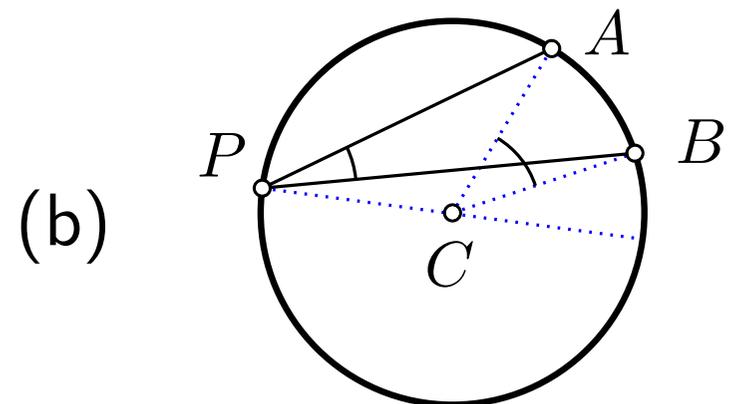
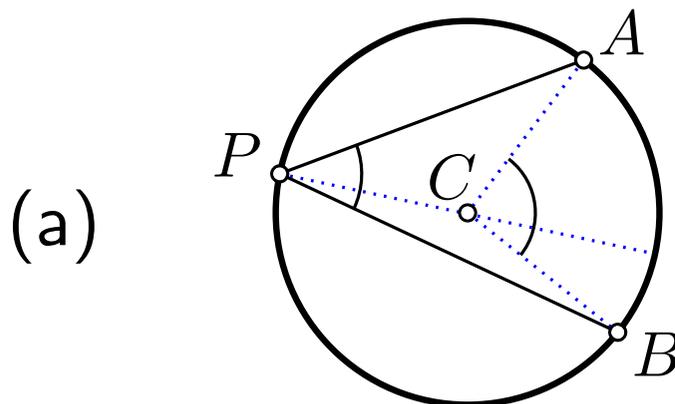
$$\angle APB = \frac{1}{2} \angle ACB$$



★ Caso 1: PA es un diámetro.

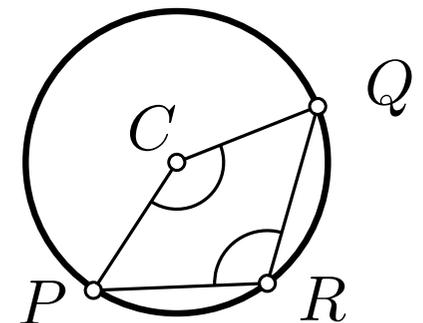
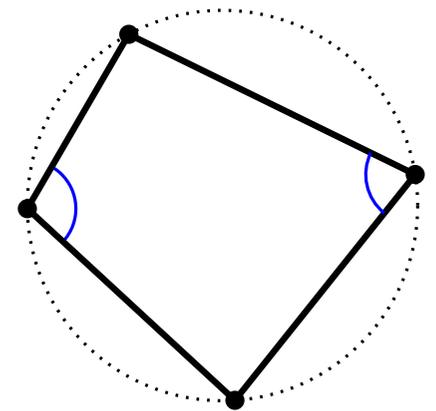
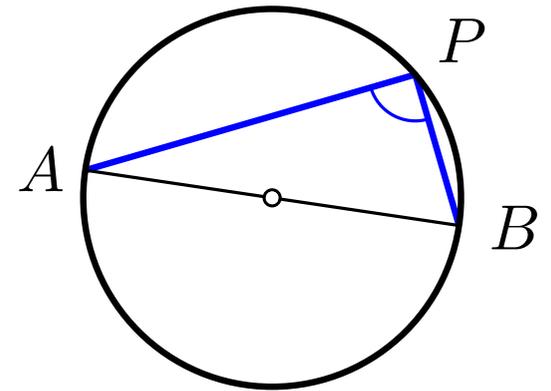


★ Caso 2:



Problemas

- * Sabiendo que AB es un diámetro de la circunferencia, determina el ángulo $\angle APB$ de la figura.
- * Demuestra que si los 4 vértices de un cuadrilátero están en una circunferencia, entonces los ángulos opuestos son suplementarios.
- * Sabiendo que $\angle PCQ = 150^\circ$, determina la media del ángulo $\angle QRP$.



Movimientos (p. 101)

- * Un **movimiento** es una transformación del plano que convierte cualquier figura en otra **congruente** (es decir, con la misma “forma”).
- * Ejemplos de movimientos:

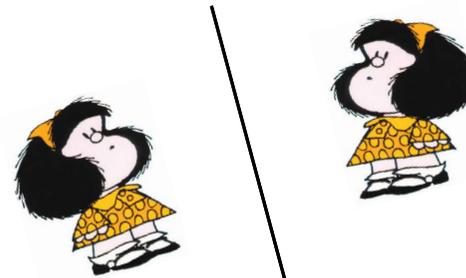
(1) traslaciones



(2) giros



(3) simetrías



Movimientos

- * El estudio de los movimientos se sale de los objetivos de este curso. Pero desarrollar cierta intuición sobre ellos ayuda a entender una parte del temario de primaria.
- * Los movimientos **conservan ángulos y distancias**.
- * Se puede demostrar que los ejemplos anteriores (traslaciones, giros, simetrías) son, en cierto sentido, los únicos movimientos. En concreto:

Todo movimiento es una traslación, un giro, una simetría, o una composición de estas transformaciones.

Movimientos

- * Los movimientos se utilizan para dar una definición correcta (desde el punto de vista matemático) de la idea de “forma” o “figuras congruentes”. La secuencia es la siguiente:
 - (1) se definen ángulos y distancias.
 - (2) se definen los movimientos: son las transformaciones que conservan ángulos y distancias.
 - (3) se define la “forma” (figuras congruentes): dos figuras A y B son **congruentes** si existe un movimiento que transforma A en B .

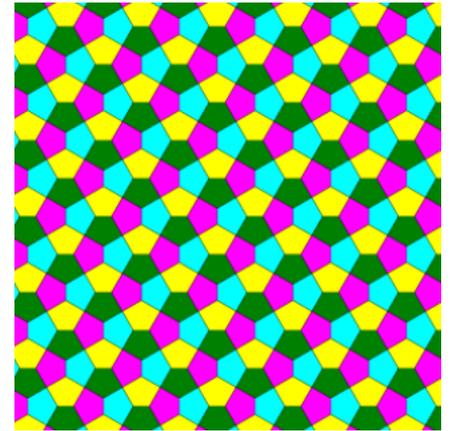
Ejemplos de actividades



* <http://tinyurl.com/qy2wxed>

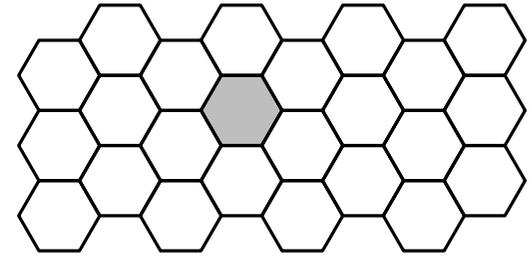
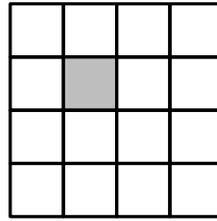
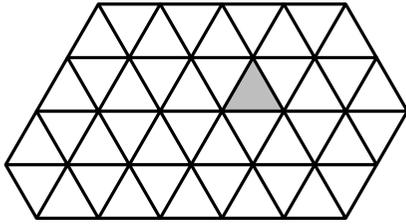
Mosaicos (teselaciones)

- * Un mosaico (teselación) es un conjunto de regiones poligonales cuya unión es todo el plano y cuyos interiores no tienen intersección.

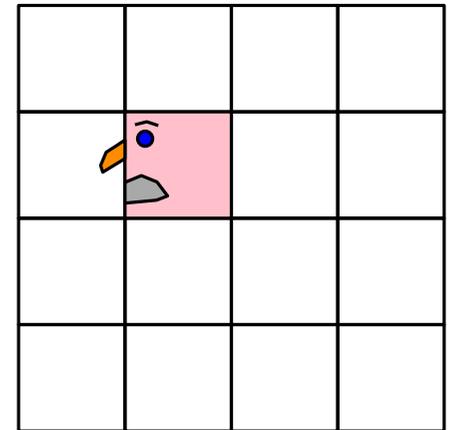


- * Los mosaicos son un recurso perfecto para diseñar actividades de ampliación.
- * Un mosaico es **regular** si está formado por polígonos regulares congruentes.
- * ¿Cuántos mosaicos regulares hay?

Mosaicos



- * Sólo existen estos tres mosaicos regulares.
- * Una propuesta de actividad:
Empezando por un mosaico regular, se pueden crear infinidad de diseños con la siguiente idea: se modifica una de las teselas (polígonos), y se traslada esa modificación al resto.

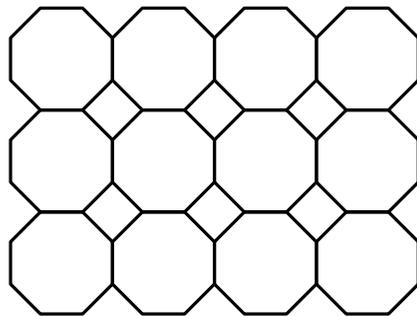


Mosaicos no regulares

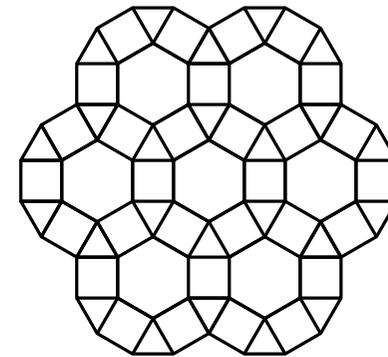
- * Cualquier triángulo sirve para teselar el plano.
- * Cualquier cuadrilátero sirve para teselar el plano.

Ejemplos en la práctica.

- * **Mosaicos semirregulares:** están formados por diferentes polígonos regulares y todos los vértices son “iguales” (en cada vertice la secuencia de polígonos es la misma).



$(4, 8, 8)$

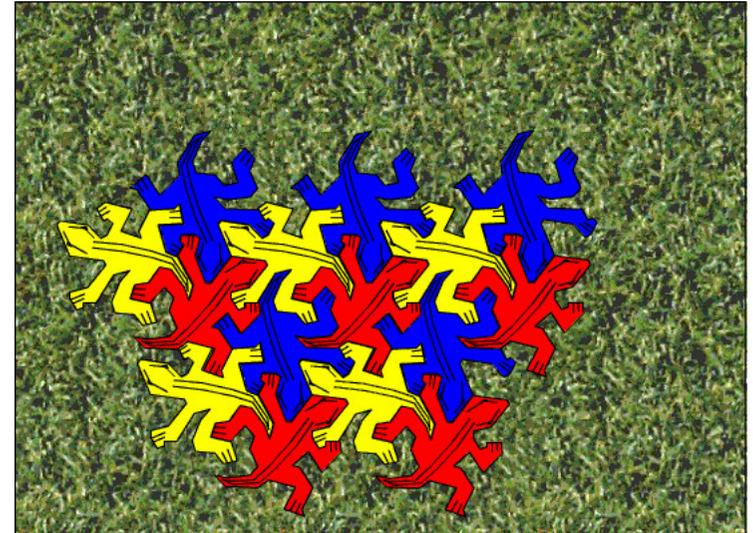
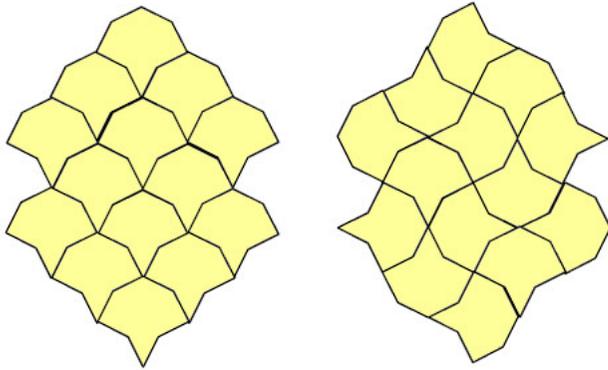


$(3, 4, 6, 4)$

Notación:

Algunos ejemplos

- * Otros ejemplos



- * <http://tinyurl.com/ox9ekh4>