Tema 3: Áreas de figuras planas (I) (p. 107)

* El cálculo del área de regiones planas está en el origen de las matemáticas. (Egipto, el Nilo y sus crecidas).

* El proceso de medida de áreas es el mismo que el de cualquier otra medida:

  1. se elige una unidad de medida.
  2. se expresa el área de una región como un múltiplo (o submúltiplo) de la unidad de medida.

* La forma de esa unidad de medida es el primer problema que se plantea.

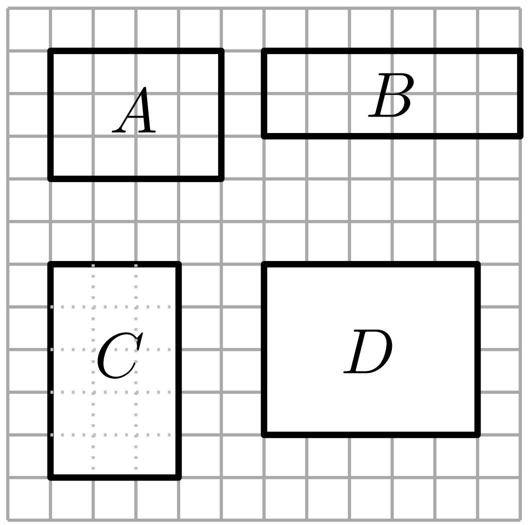
Unidad de área

* Se puede diseñar una actividad que muestre que elegir una unidad de área en forma de cuadrado es lo más conveniente.

* Área de rectángulos (con lados de medida un número entero).

* La figura es un ejemplo de cómo se puede introducir la fórmula para calcular el área de un rectángulo (con lados enteros): $A = b \times h$

  (Ojo: la fórmula, no la definición)

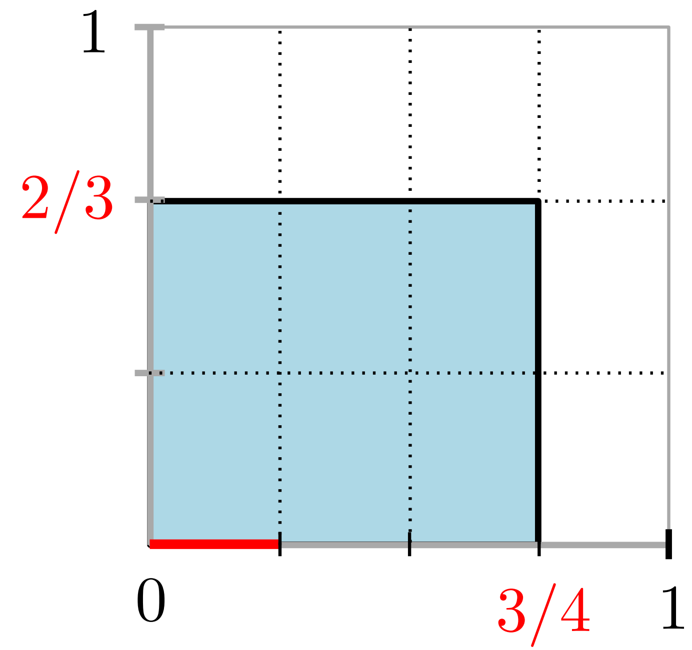


Área de rectángulos

* Esto debería hacerse ya en 3°, de forma simultánea con la introducción de la multiplicación.

* Después, al introducir la multiplicación de fracciones en 5°, se puede ver que la fórmula "$b \times h$" es también válida cuando los lados no son enteros (esto es también una buena forma de introducir la multiplicación de fracciones).

$$A = \frac{3}{4}\text{ cm} \times \frac{2}{3}\text{ cm} = \frac{6}{12}\text{ cm}^2$$

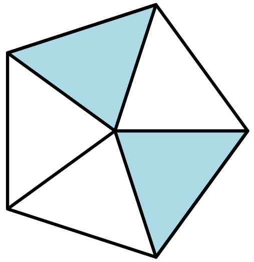


Área: propiedades generales (p. 114)

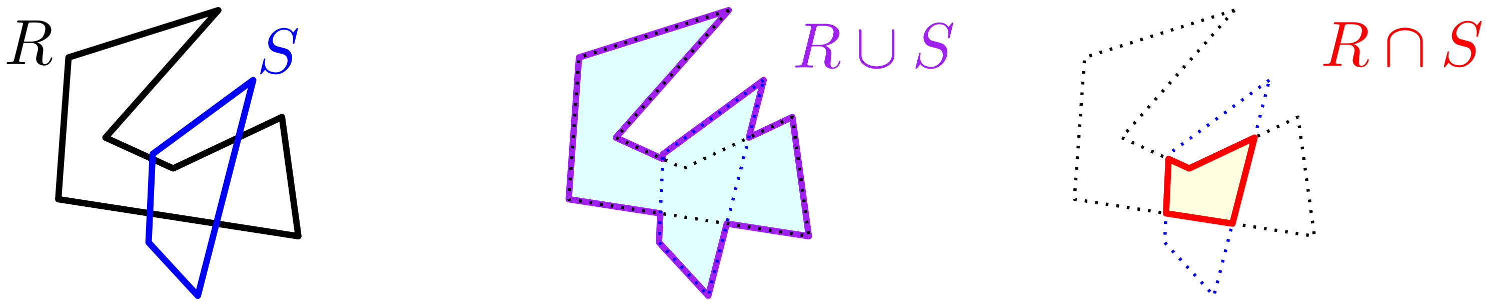
∗ Aunque no vamos a definir el área de una región cualquiera, las propiedades básicas del área son intuitivas, y merece la pena dejarlas claras.

1. El área es siempre ≥ 0.
   (Los puntos y los segmentos tienen área 0).

2. Dos figuras congruentes tienen la misma área.

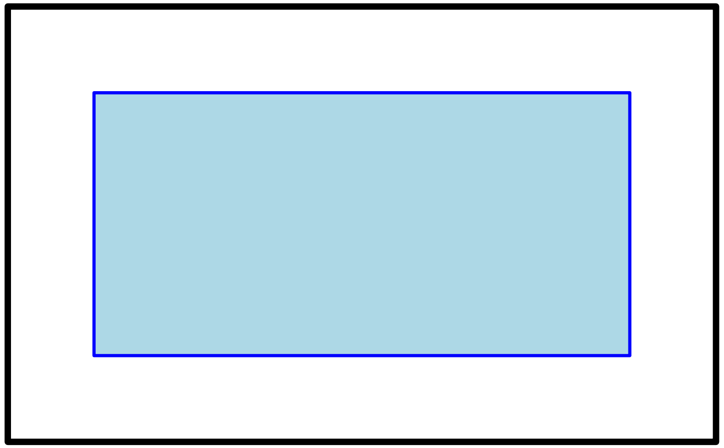


3. El área es aditiva. Para dos regiones R y S,
   $\text{Área}(R \cup S) = \text{Área}(R) + \text{Área}(S) - \text{Área}(R \cap S)$



Una aplicación

* Problema: en una habitación de 7 m de largo y 5 de ancho se coloca una alfombra que queda a 1 m de distancia de las 4 paredes. ¿Cuál es el área de la alfombra?



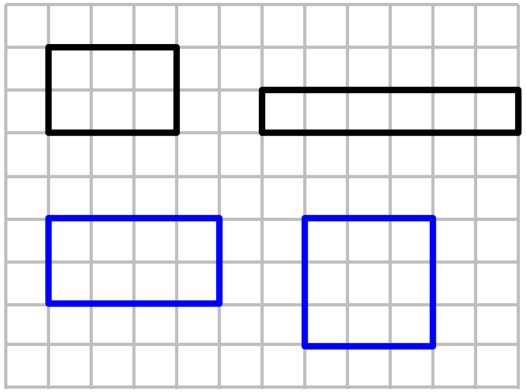
Área y perímetro

* Muchos estudios han detectado dificultades de aprendizaje que se manifiestan en la confusión de los conceptos de área y perímetro.

* Ejemplos como los siguientes ayudan a aclarar los conceptos.

misma área, distinto perímetro

mismo perímetro, distinta área



* Ejercicio: tenemos un rectángulo de 9 m de largo y 4 de ancho. Describe otros dos: uno de mayor área y menor perímetro, y otro de menor área y mayor perímetro.

Área y perímetro

* Las dos últimas:

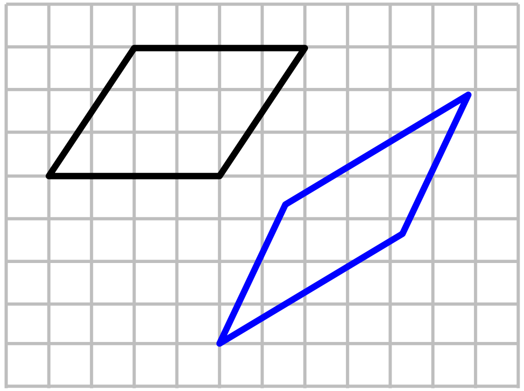
  1. Tenemos un rectángulo de 25 m de perímetro. ¿Qué podrías decir de su área?
  2. Tenemos un rectángulo de 25 m^2 de área. ¿Qué podrías decir de su perímetro?

* En resumen:

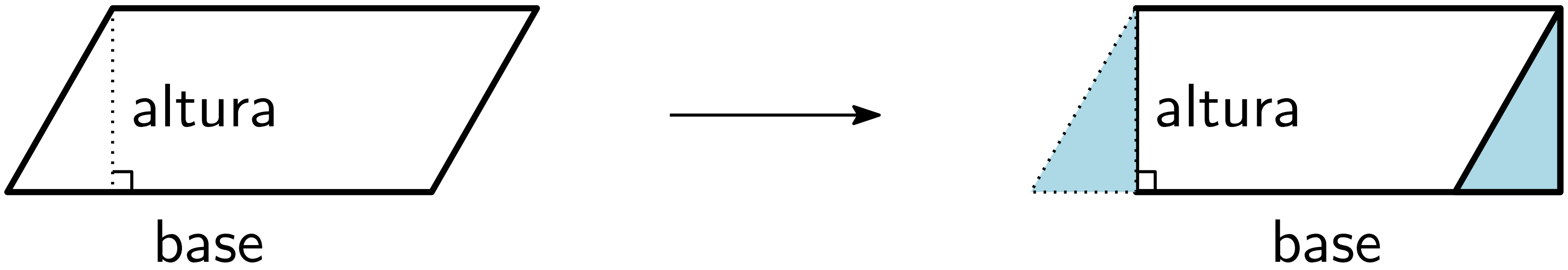
  1. Entre todos los rectángulos de un perímetro fijo, el cuadrado es el que tiene mayor área.
  2. Entre todos los rectángulos de un área fija, el cuadrado es el que tiene menor perímetro.

Área de paralelogramos (p. 121)

* El enfoque de “contar cuadrados” se agota pronto.



* Área de un paralelogramo (romboide)

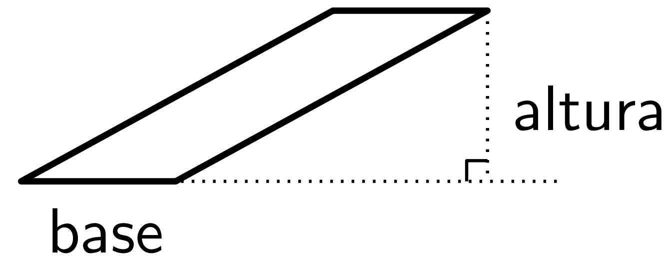


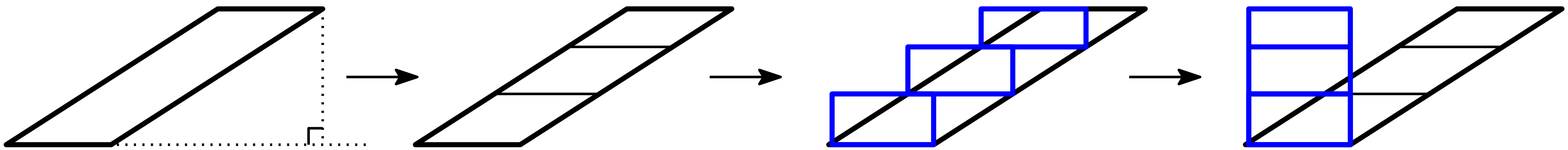
* Área del romboide = Área del rectángulo = base × altura

Área de paralelogramos (p. 125)

* Ojo: ¿qué ocurre en este caso?

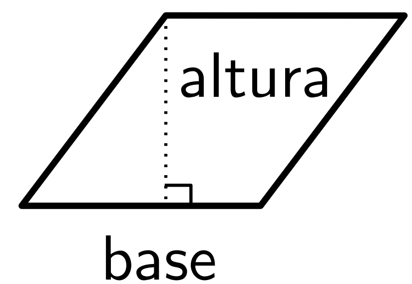
  ¿Sigue siendo cierta la fórmula $A = b \times h$?





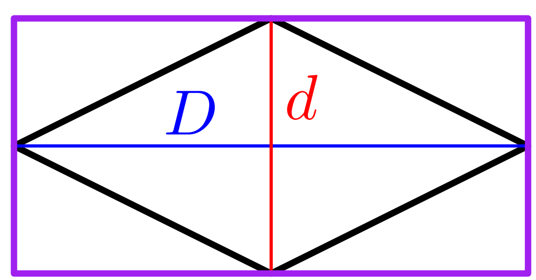
* Área del rombo:

  La fórmula $A = b \times h$ sigue siendo válida.



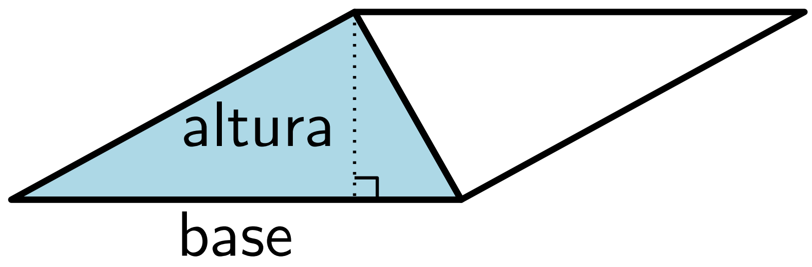
* En los libros de primaria en España, es usual la fórmula

$$A = \frac{D \times d}{2}$$



Área del triángulo

- Sencilla, una vez conocida el área del paralelogramo.

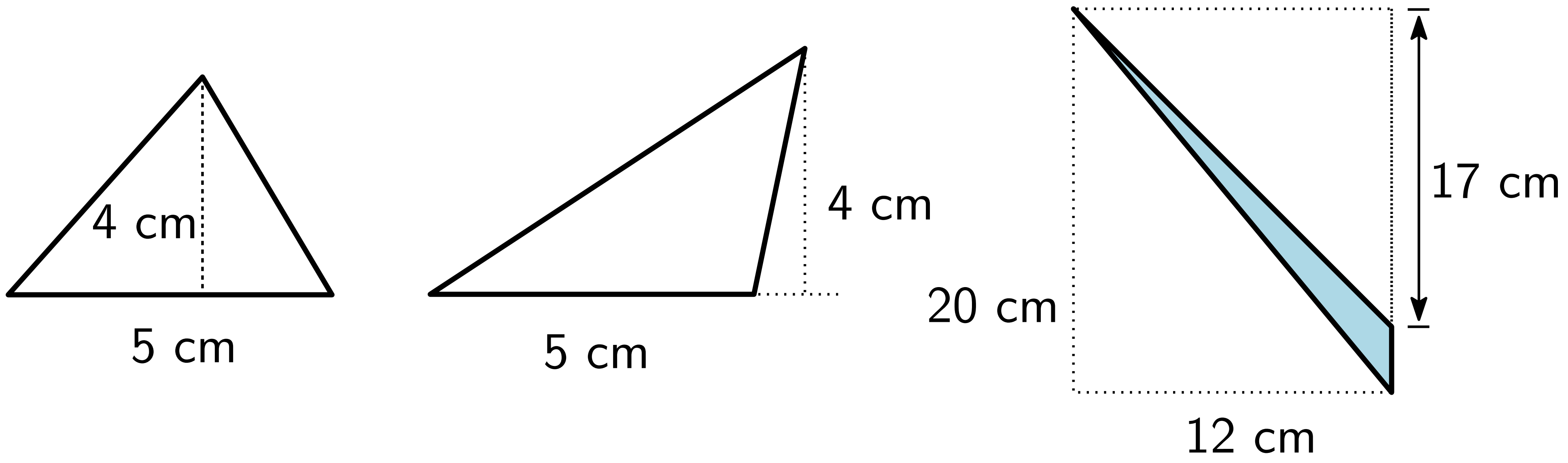


$$\text{Área} = \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2}$$

- Comentarios:
  - no es una definición, sino una fórmula que facilita el cálculo del área.
  - las principales dificultades de aprendizaje surgen de una falta de comprensión de qué son las bases y las alturas de un triángulo.

Área del triángulo

* Ejercicio: calcula el área de los siguientes triángulos.

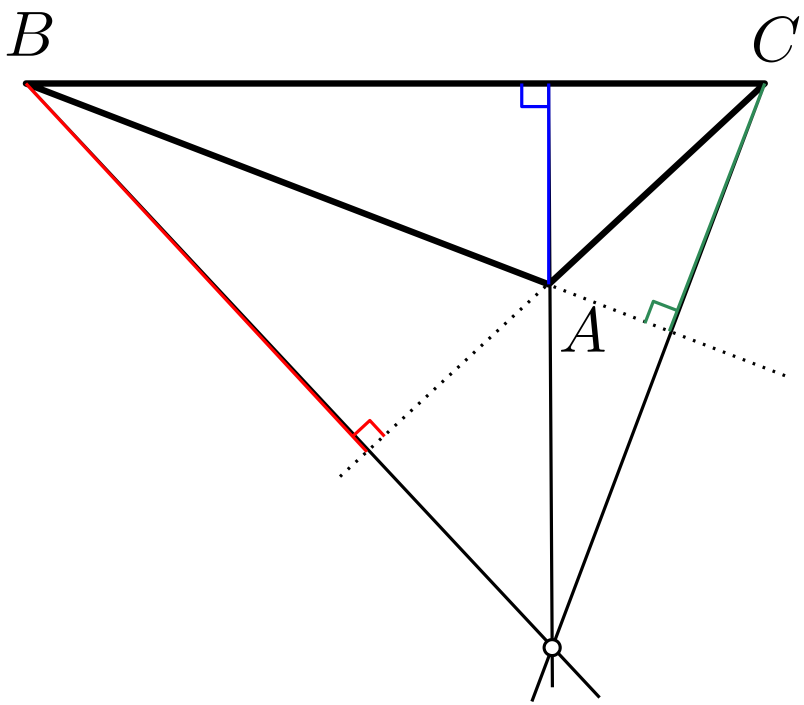


(a) (b) (c)

Base y altura

- Cualquier lado puede ser tomado como la base.
- La altura del triángulo ABC relativa al lado BC es el segmento perpendicular desde A a la recta que contiene a BC.

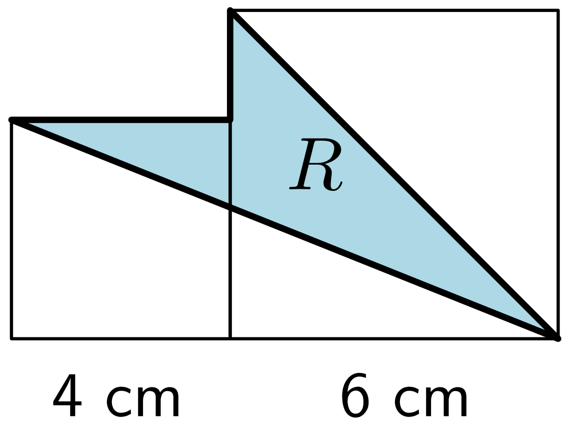
  También se llama altura a la longitud de dicho segmento.



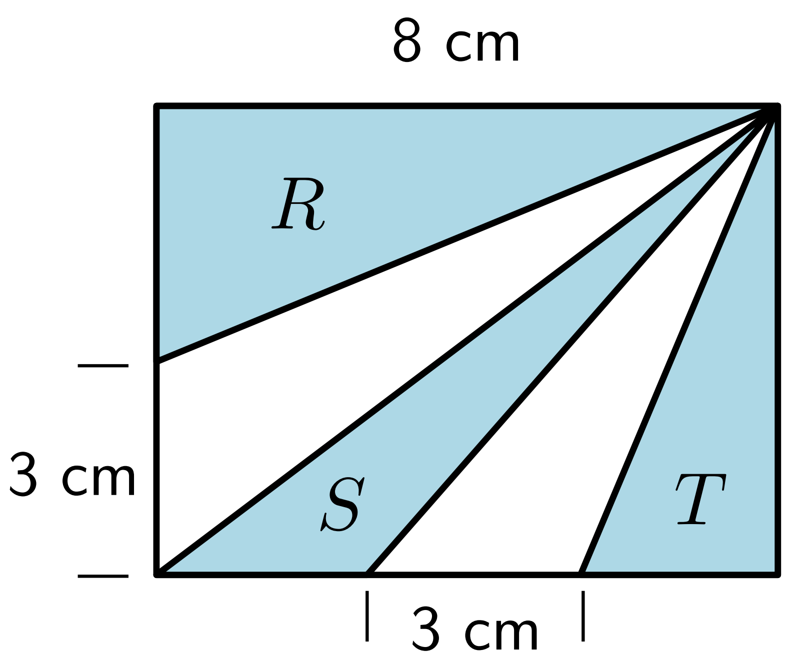
Las rectas que contienen a las alturas se cortan siempre en un punto, que se llama ortocentro del triángulo.

Problemas

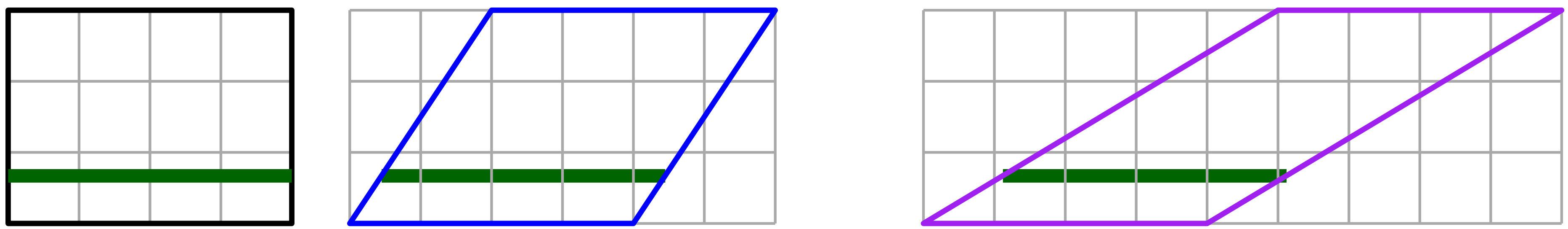
* (Del libro de 6° de Singapur) Calcula el área de la región R de la figura. (Los dos cuadriláteros son cuadrados).



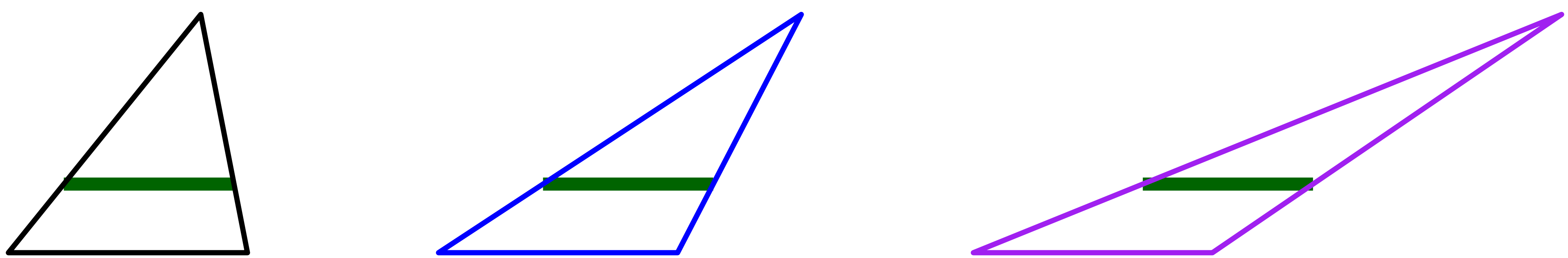
* (Del libro de 1° "ESO" de Singapur) En la figura se muestran varios triángulos dentro de un rectángulo. Si el área de R es 16 cm^2, calcula la suma de las áreas de S y T.



Área y deformaciones



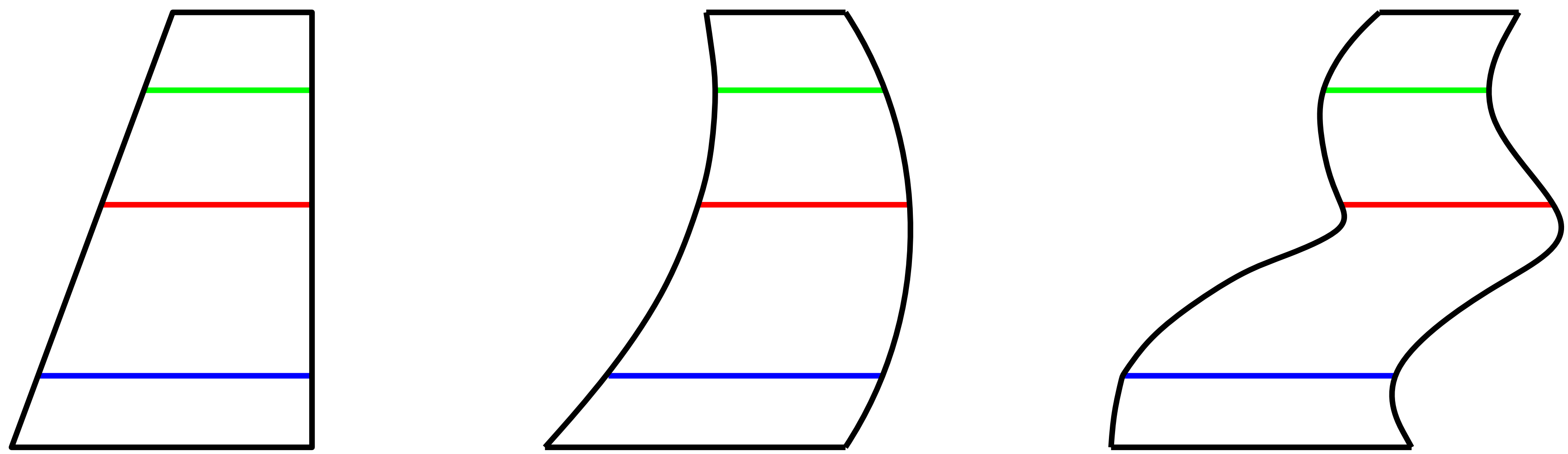
* Los tres paralelogramos tienen la misma área.



* Los tres triángulos tienen la misma área.

Área y deformaciones

* Un principio general (que se conoce como Principio de Cavalieri).

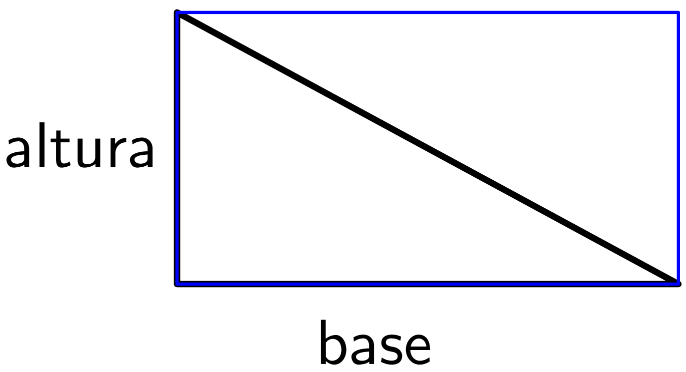


* Si al cortar las regiones con cualquier recta horizontal se obtienen segmentos de la misma longitud, el área de las regiones es la misma.

Otra posibilidad: primero los triángulos (p. 122)

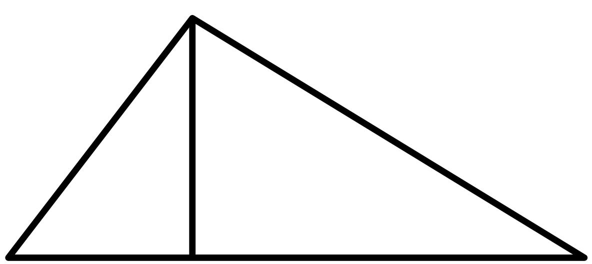
* Hemos visto cómo, una vez conocida el área de los paralelogramos, se puede determinar la de los triángulos. También se puede proceder al revés.

* Primero, los triángulos rectángulos.



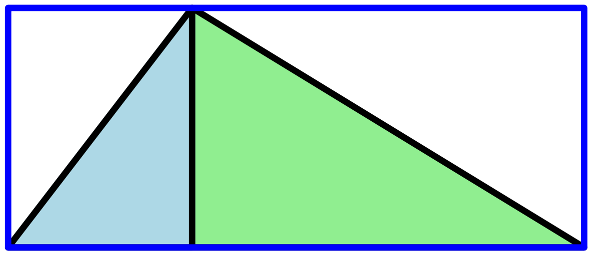
$$\text{Área} = \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2}$$

* Después, triángulos cualesquiera.



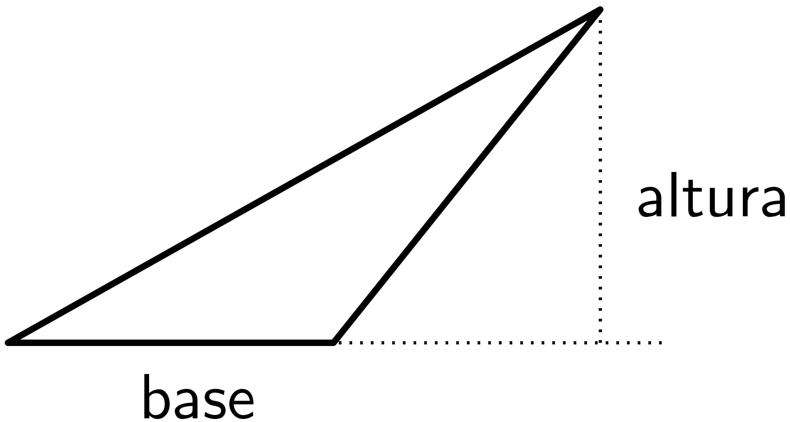
Otra posibilidad: primero los triángulos

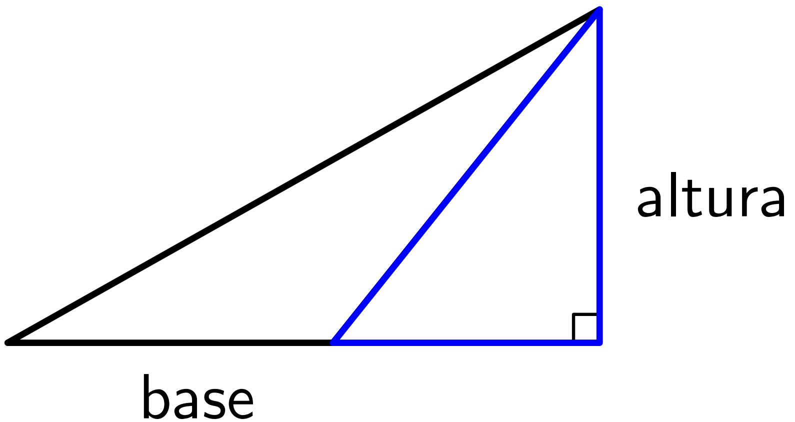
* Otra forma de deducir la fórmula para un triángulo como este:



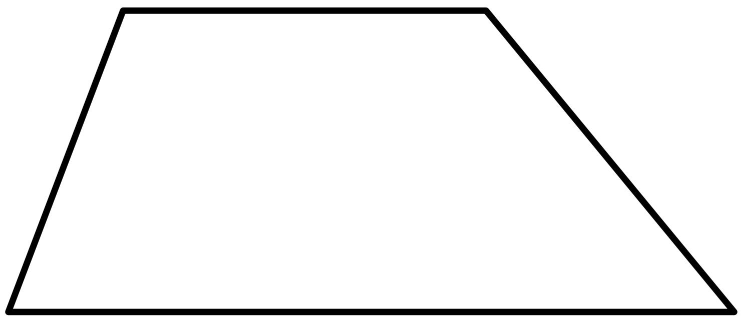
$$\text{Área} = \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2}$$

* Pero ojo: habría que tener en cuenta triángulos como éste:





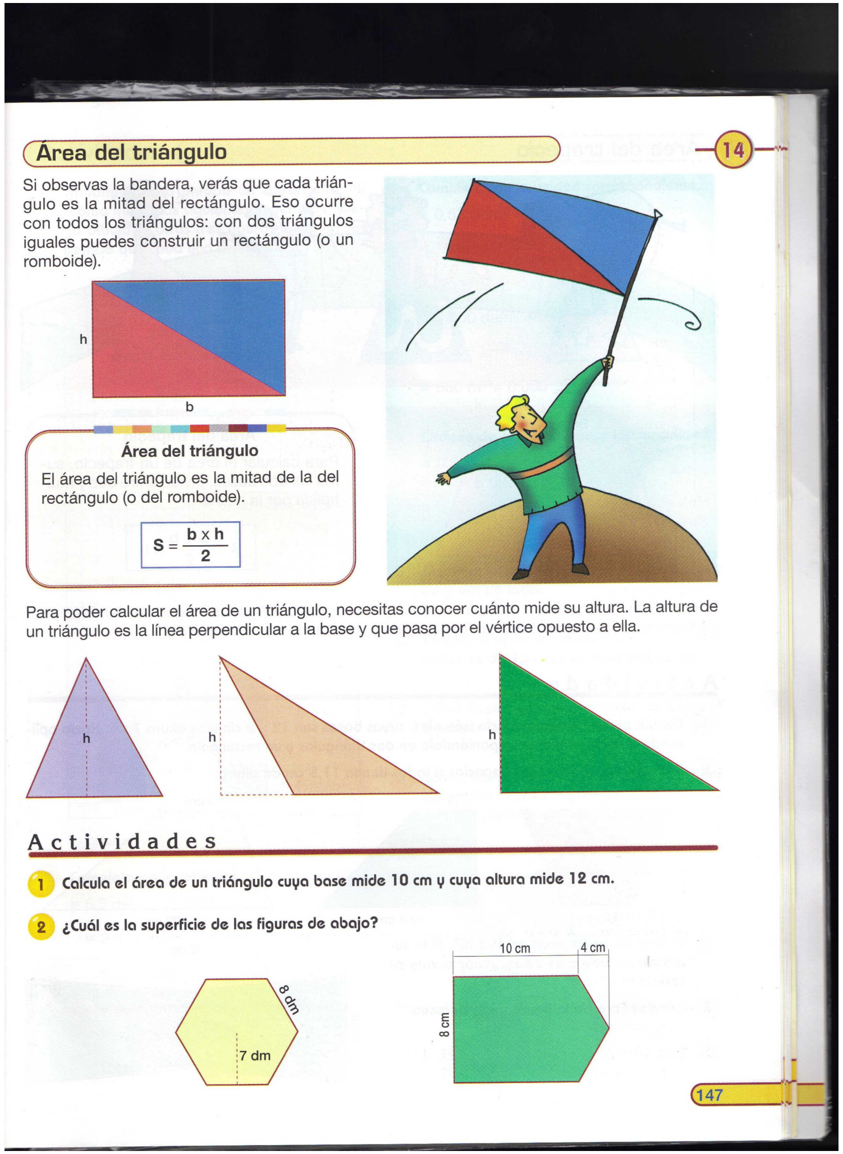
¿Y los trapecios?



* ¿Merece la pena aprender la fórmula para calcular el área de un trapecio?

* ¿Y la de los polígonos regulares?

Un vistazo a un libro



Área del triángulo

14

Si observas la bandera, verás que cada triángulo es la mitad del rectángulo. Eso ocurre con todos los triángulos: con dos triángulos iguales puedes construir un rectángulo (o un romboide).

Área del triángulo

El área del triángulo es la mitad de la del rectángulo (o del romboide).

$$S = \frac{b \times h}{2}$$

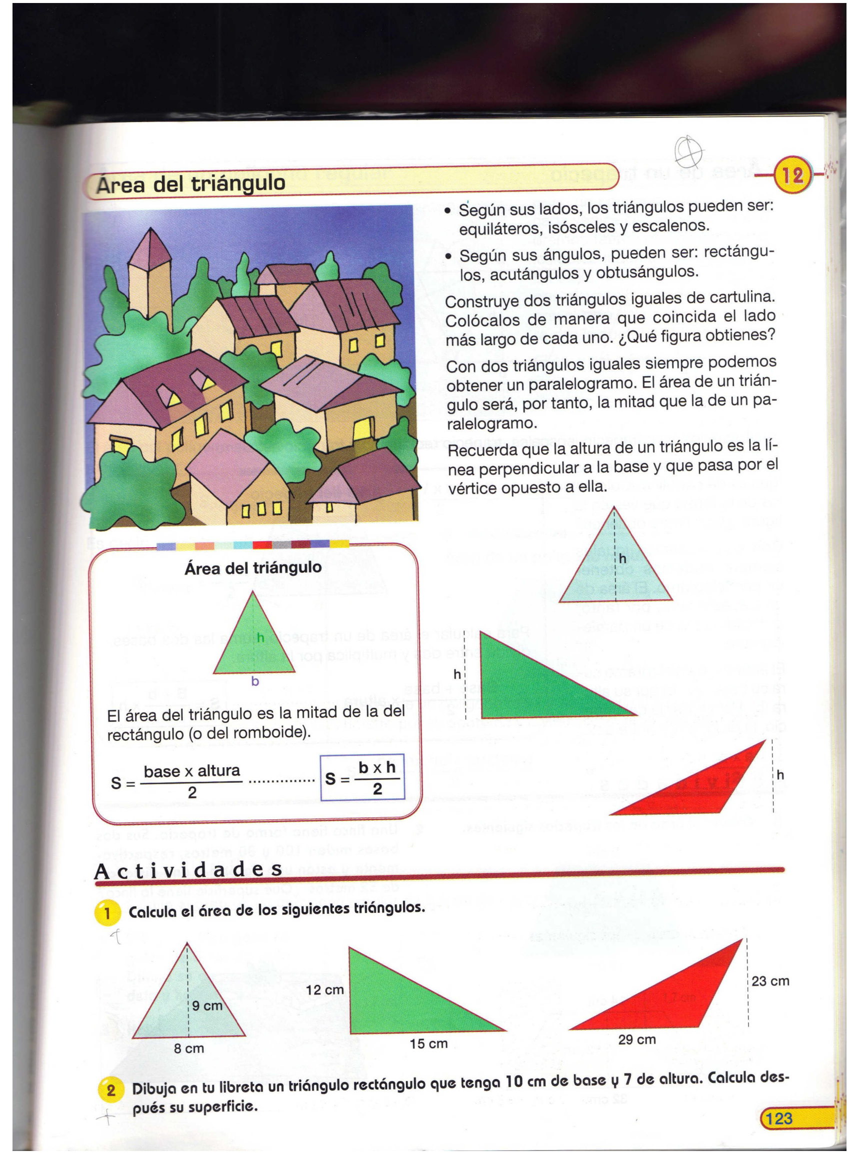
Para poder calcular el área de un triángulo, necesitas conocer cuánto mide su altura. La altura de un triángulo es la línea perpendicular a la base y que pasa por el vértice opuesto a ella.

Actividades

1. Calcula el área de un triángulo cuya base mide 10 cm y cuya altura mide 12 cm.
2. ¿Cuál es la superficie de las figuras de abajo?

147

5º primaria



Área del triángulo

12

- Según sus lados, los triángulos pueden ser: equiláteros, isósceles y escalenos.
- Según sus ángulos, pueden ser: rectángulos, acutángulos y obtusángulos.

Construye dos triángulos iguales de cartulina. Colócalos de manera que coincida el lado más largo de cada uno. ¿Qué figura obtienes?

Con dos triángulos iguales siempre podemos obtener un paralelogramo. El área de un triángulo será, por tanto, la mitad que la de un paralelogramo.

Recuerda que la altura de un triángulo es la línea perpendicular a la base y que pasa por el vértice opuesto a ella.

Área del triángulo

El área del triángulo es la mitad de la del rectángulo (o del romboide).

$$S = \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2} \quad \cdots\cdots \quad S = \frac{b \times h}{2}$$

Actividades

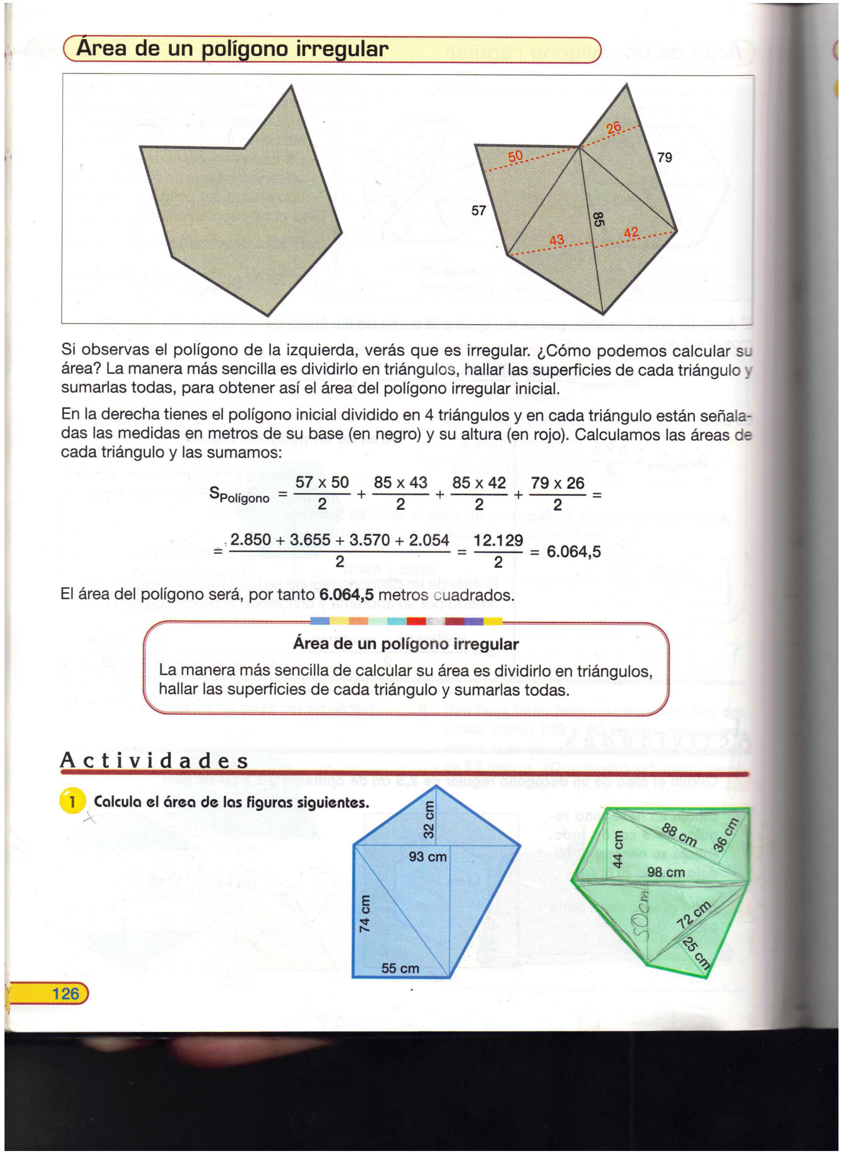
1. Calcula el área de los siguientes triángulos.

2. Dibuja en tu libreta un triángulo rectángulo que tenga 10 cm de base y 7 de altura. Calcula después su superficie.

123

6º primaria

Algunos problemas (6º)



Área de un polígono irregular

Si observas el polígono de la izquierda, verás que es irregular. ¿Cómo podemos calcular su área? La manera más sencilla es dividirlo en triángulos, hallar las superficies de cada triángulo y sumarlas todas, para obtener así el área del polígono irregular inicial.

En la derecha tienes el polígono inicial dividido en 4 triángulos y en cada triángulo están señaladas las medidas en metros de su base (en negro) y su altura (en rojo). Calculamos las áreas de cada triángulo y las sumamos:

$$S_{\text{Polígono}} = \frac{57 \times 50}{2} + \frac{85 \times 43}{2} + \frac{85 \times 42}{2} + \frac{79 \times 26}{2} =$$

$$= \frac{2.850 + 3.655 + 3.570 + 2.054}{2} = \frac{12.129}{2} = 6.064{,}5$$

El área del polígono será, por tanto **6.064,5** metros cuadrados.

Área de un polígono irregular

La manera más sencilla de calcular su área es dividirlo en triángulos, hallar las superficies de cada triángulo y sumarlas todas.

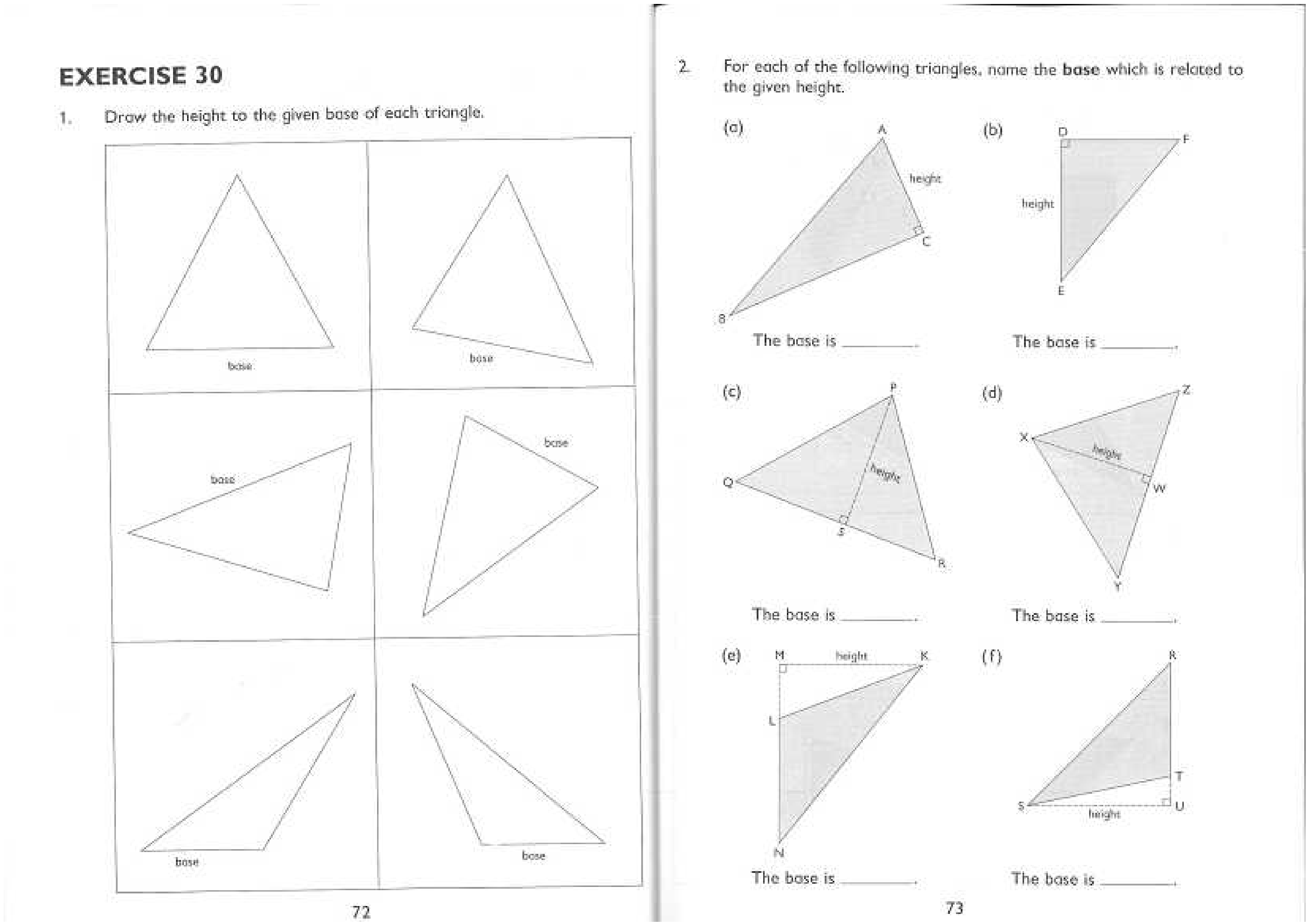
Actividades

1. **Calcula el área de las figuras siguientes.**

Actividades

1. **Dibuja un pentágono y señala en él todos sus elementos.**
2. **¿Cuántos centímetros mide cada lado de un rombo que tiene de perímetro 0,48 metros?**
3. **Un romboide tiene un perímetro de 24 metros. Si el lado más pequeño mide 5,3 metros, ¿cuánto mide el más largo?**
4. **Averigua cuánto mide el lado de un triángulo equilátero si su perímetro es igual al de un hexágono regular de 5 m de lado.**
5. **Calcula el área en metros cuadrados de un rectángulo cuyos lados miden 6 hm y 4 dam, respectivamente.**
6. **¿Cuánto mide la diagonal menor de un rombo si tiene una superficie de 9.375 m² y su diagonal mayor mide 75 decámetros?**
7. **¿Qué superficie en centiáreas ocupa un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 4,3 metros y 736 centímetros?**
8. **Calcula el área de un trapecio cuyas bases miden 75 y 46 decímetros y cuya altura es de 5 metros.**
9. **Un trapecio isósceles tiene una altura de 8 cm. Si su superficie es de 16.000 mm² y su base menor mide 7 cm, ¿cuánto medirá su base mayor?**

Área del triángulo (5º en Singapur)



EXERCISE 30

1. Draw the height to the given base of each triangle.

base

base

base

base

base

base

2. For each of the following triangles, name the **base** which is related to the given height.

(a) A, height, C, B

The base is ________.

(b) D, F, height, E

The base is ________.

(c) P, Q, height, S, R

The base is ________.

(d) Z, X, height, W, Y

The base is ________.

(e) M, height, K, L, N

The base is ________.

(f) R, T, S, height, U

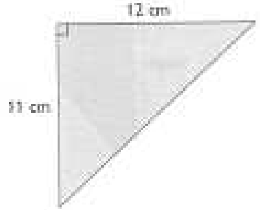
The base is ________.

Área del triángulo (5º en Singapur)

EXERCISE 31

1. Find the area of each triangle.

(a)

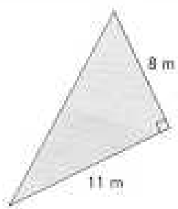


Area of the triangle

$= \frac{1}{2} \times 12 \times 11$

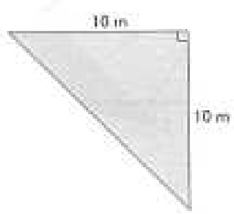
$=$

(b)



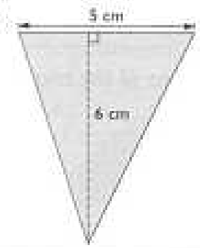
(c)

(d)



2. Find the area of each triangle.

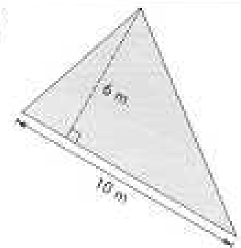
(a)



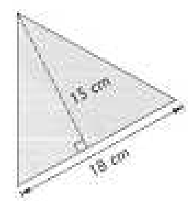
Area of the triangle

$=$

(b)



(c)



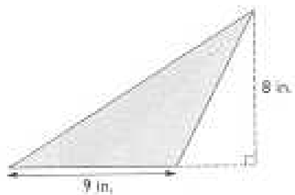
(d)

Área del triángulo (5º en Singapur)

EXERCISE 32

1. Find the area of each triangle.

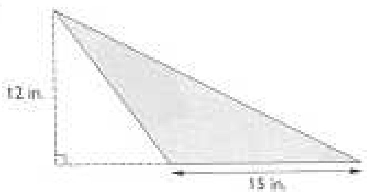
(a)



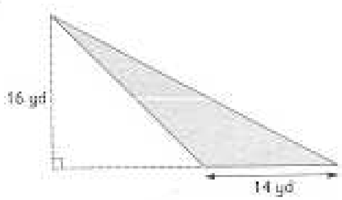
Area of the triangle

=

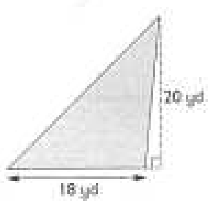
(b)



(c)

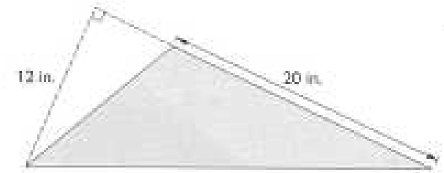


(d)



2. Find the area of each triangle.

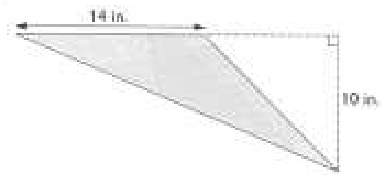
(a)



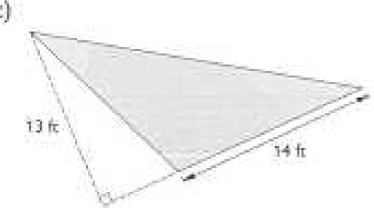
Area of the triangle

=

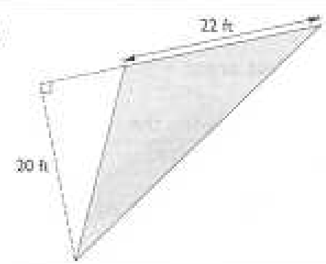
(b)



(c)

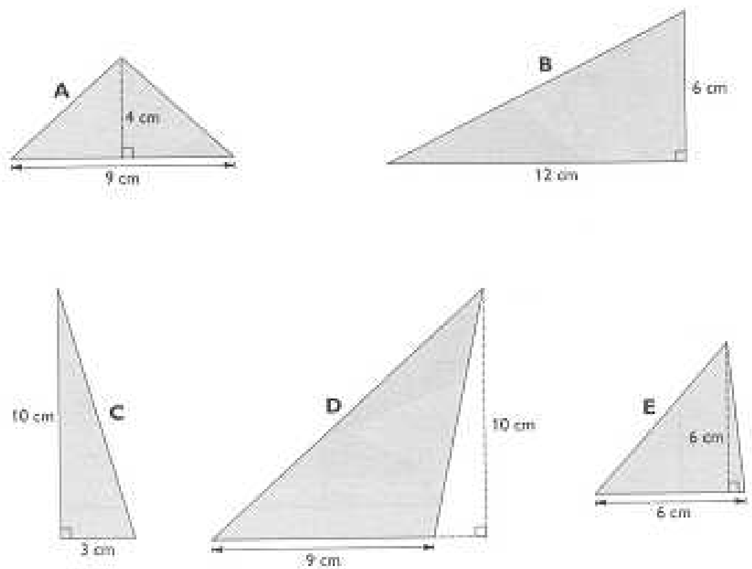


(d)



Área del triángulo (5º en Singapur)

3. Find the area of each triangle. Then complete the table and answer the questions below.



Triangle	A	B	C	D	E
Area					

(a) Which triangle has the largest area? ________

(b) Which triangle has the smallest area? ________

(c) What is the difference in area between the largest triangle and the smallest triangle? ________

(d) Which triangle is twice as large as triangle A? ________

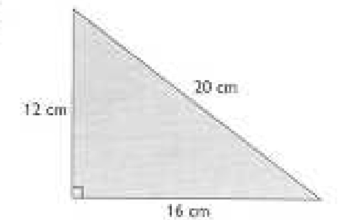
(e) Which triangles have the same area? ________

78

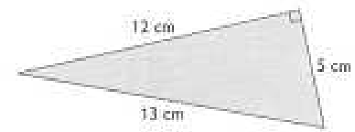
EXERCISE 33

1. Find the area of each triangle.

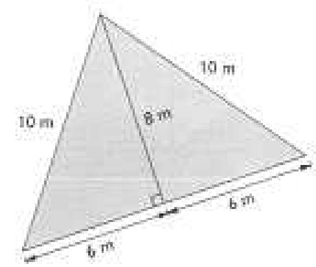
(a)



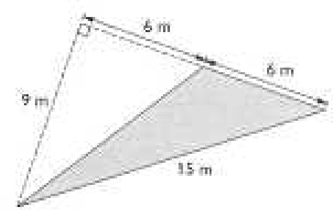
(b)



(c)



(d)

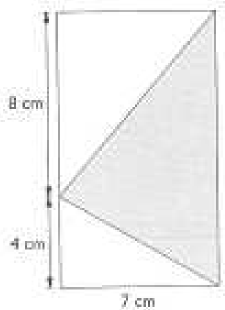


79

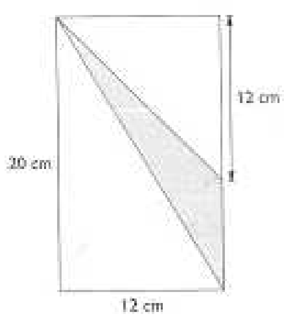
Área del triángulo (5º en Singapur)

2. Find the shaded area of each rectangle.

(a)

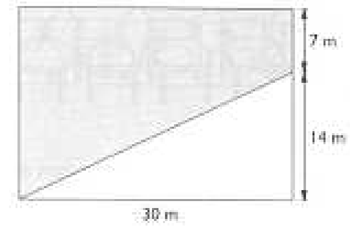


(b)

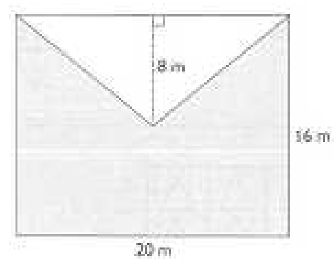


80

(c)



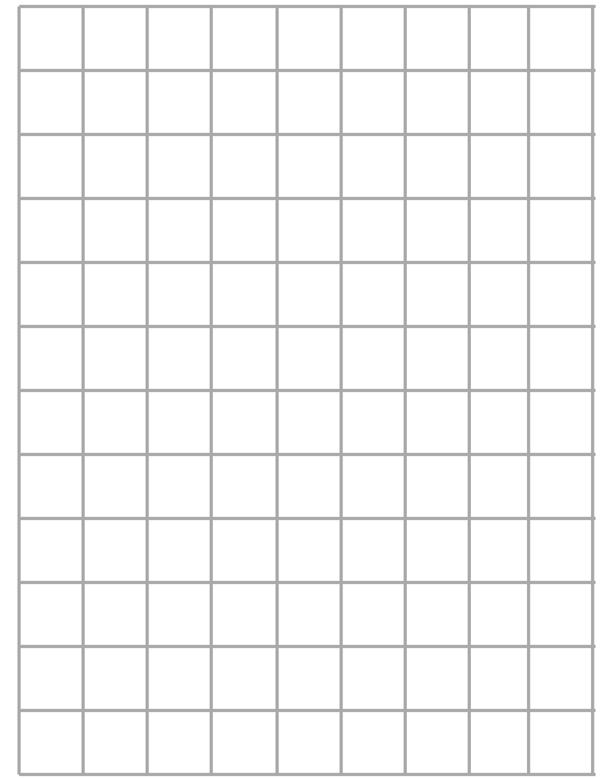
(d)



81

Ejercicio

* Supongamos que los cuadrados de la mallan de la figura miden 1 cm de lado. Queremos construir triángulos con vértices en los vértices de la malla.
  1. Construye ejemplos de triángulos de área 1 que sean “distintos”.
  2. Construye ejemplos de triángulos de área 2 que sean “distintos”.
  3. Construye ejemplos de triángulos de área 3 que sean “distintos”.



* Existe una fórmula que relaciona el área de un triángulo (con vértices en la malla), el número de vértices que contiene y el número de vértices que tiene en las aristas. ¿Sabrías encontrarla a partir de los ejemplos anteriores?