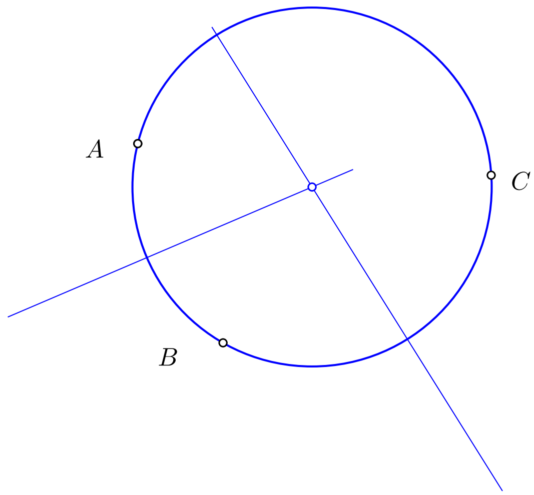
Matemáticas II

9 de enero de 2017

1. Dibuja la circunferencia que pasar por los puntos A, B y C de la figura, razonando el procedimiento utilizado.

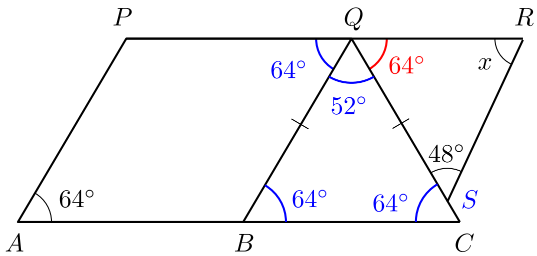


Para que una circunferencia pase por A y B, su centro debe estar en la mediatriz del segmento AB (ya que la mediatariz es el conjunto de puntos que están a la misma distancia de A y B. Lo mismo ocurre con los otros pares de puntos. Por tanto, es suficiente dibujar dos mediatrices, y el centro es la intersección.

El ejercicio pide **razonar** el procedimiento, y razonar distinto de **describir**. La mayoría habéis descrito el procedimiento: "hago esta mediatriz, luego ...". Razonar quiere decir explicar por qué ocurre algo. En este caso, esencialmente, ¿por qué la intersección de las mediatrices es el centro de la circunferencia?

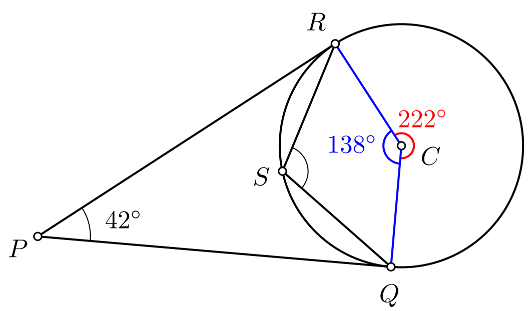
2. *a*) En la figura (a) sabemos que ABC y PQR son líneas rectas. Sabemos además que $ABQP$ es un paralelogramo, y que $\triangle QBC$ es isósceles. Determina la medida del ángulo x.

   b) En la figura (b) sabemos que PQ y PR son tangentes a la circunferencia con centro en C, determina la medida del ángulo $\angle QSR$.



(a)

1. Como AP y BQ son paralelos, $\angle CBQ$ y $\angle BAP$ son correspondientes y, por tanto, $\angle CBQ = 64°$.
2. Como $\triangle BCQ$ es isósceles, $\angle BQC = 180 - 2 \times 64 = 52°$.
3. Los ángulos opuestos de un paralelogramo son iguales, y por tanto $\angle PQB = 64°$.
4. Como $\angle PQB + \angle QBC + \angle QCP = 180°$, deducimos que $\angle QCR = 64°$.
5. Finalmente, como los ángulos del triángulo $\triangle QSR$ suman $180°$, $x = 180 - 64 - 48 = 68°$.



(b)

1. Las tangentes son perpendiculares al radio en el punto de tangencia. Por tanto, los ángulos $\angle PRC$ y $\angle CQP$ son rectos.
2. Consideramos ahora el cuadrilátero $PQCR$. Como sus ángulos suman $360°$ y conocemos tres de sus ángulos, podemos obtener el cuarto:
$$\angle RCQ = 360 - (42 + 90 + 90) = 138°.$$
3. Los ángulos $\angle RCQ$ y $\angle QCR$ forman un ángulo completo. Por tanto, $\angle QCR = 222°$.
4. Finalmente, $\angle QCR$ es el ángulo central correspondiente al ángulo que pide, $\angle QSR$. Por tanto,
$$\angle QSR = \frac{1}{2}\angle QCR = 111°$$

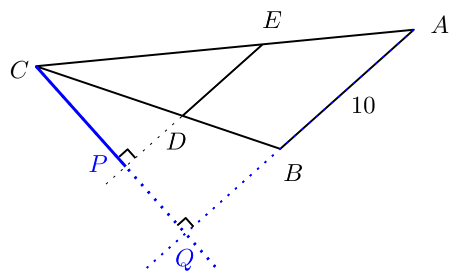
La parte a) está bien en la mayoría de los casos.

En la parte b), los errores más comunes han sido asumir cosas incorrectas: PC no pasa por S, SC no es la bisectriz del ángulo $\angle QSR$, el triángulo $\triangle QSR$ no es isósceles ...

3. *a*) Escribe la definición de altura de un triángulo.

   La altura del triángulo ABC *relativa al lado* BC es el segmento perpendicular desde A a la recta que contiene al lado BC.

   b) En los triángulos de la figura sabemos que los segmentos AB y ED son paralelos. Sabemos además que $|AB| = 10$, que el área del triángulo $\triangle ABC$ es 100 y que el área del triángulo $\triangle EDC$ es 36. Dibuja la altura del triángulo $\triangle EDC$ relativa a la base ED y calcula su longitud.



1. Podemos calcular $|CQ|$, la altura del triángulo $\triangle ABC$ respecto de la base AB. Como $|AB| = 10$ y el área es 100, deducimos que $|CQ| = 20$.

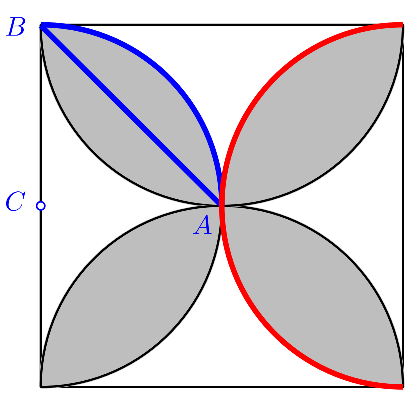
2. Como los segmentos ED y AB son paralelos, los triángulos $\triangle ABC$ $\triangle EDC$ son semejantes. Si llamamos r a la razón de semejanza, sabemos que la razón de sus áreas es r^2. Por tanto,
$$r^2 = \frac{100}{36} \to r = \frac{5}{3}$$

3. Aplicando ahora el Teorema de Tales,
$$\frac{|AB|}{|ED|} = \frac{5}{3} \to |ED| = \frac{3}{5}|AB| = 6$$

4. Finalmente, como conocemos el área del triángulo $\triangle DEC$ su base $|ED|$, podemos calcular la altura $|CP|$:
$$36 = \frac{6\,|CP|}{2} \to |CP| = 12$$

En este problema los errores han sido muy variados. Quizá el más común, no saber que si dos triángulos son semejantes, y la razón de semejanza es r, la razón entre sus áreas es r^2.

4. Sabiendo que el lado del cuadrado de la figura es 2 m, y que todas las curvas son semicircunferencias calcula el perímetro y el área de la región sombreada. Da la solución de forma exacta.



El perímetro de la zona sombreada está formado por 4 semicircunferencias de radio 1 m. Por tanto, $P = 4\pi$.

En la figura una de esas cuatro circunferencias está en color rojo.

El área se puede calcular de varias formas. Por ejemplo, podemos ver que la región está formada por 8 partes como la señalada en azul en la figura.
El área de esta región en azul se puede calcular como el área de un sector circular con centro en C, radio 1 y ángulo 90° menos el área del triángulo $\triangle ABC$.
Por tanto, el área marcada en azul será $\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}$.

Y el área total de la zona sombreada es
$$A = 8 \times \left(\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}\right) = 2\pi - 4$$

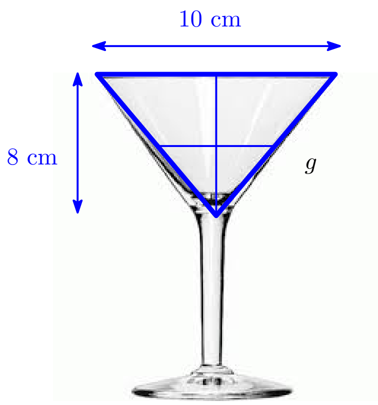
En algunos casos parece que sigue sin estar claro qué es el perímetro de una región. En otros, el problema ha sido no saber identificar las curvas que forman el perímetro de la figura.

En el caso del área, hay que explicar con más claridad. En varios casos he visto la solución "el área es el área de dos círculos menos el área del cuadrado". Aunque el resultado numérico es correcto, el razonamiento no lo es, y no le he dado puntos.

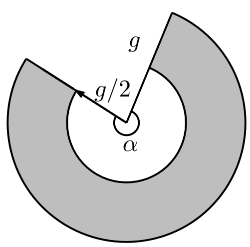
5. El cáliz de la copa de cocktail de la figura tiene forma de cono recto circular. La altura es 8 cm y el diámetro 10 cm. Si se llena hasta la mitad de su altura,

   a) ¿qué fracción del volumen total de la copa ocupa el líquido?

   b) ¿cuál es el área de la superficie del interior de la copa que no está en contacto con el líquido?



1. El volumen total de la copa es
$$V = \frac{1}{3}A_b \times h = \frac{1}{3}\pi \times 5^2 \times 8 = \frac{200\pi}{3}\ \text{cm}^3$$
2. Si llenamos de líquido hasta la mitad de la altura, una sencilla semejanza de triángulos permite deducir que el diámetro a esa altura es 5 cm. Por tanto, el volumen hasta la mitad de la altura será
$$V_m = \frac{1}{3}A_b \times h = \frac{1}{3}\pi \times 2,5^2 \times 4 = \frac{25\pi}{3}\ \text{cm}^3$$
3. Por tanto, la fracción de la copa ocupada por el líquido será
$$\frac{V_m}{V} = \frac{1}{8} = 12,5\%$$



- Para calcular el área de la superficie de la figura que no está en contacto con el líquido, nos damos cuenta de que al considerar el desarrollo del cono corresponde con la región sombreada en la figura.
- El radio de la circunferencia grande corresponde con la generatriz del cono, que se puede obtener usando el teorema de Pitágoras: $g^2 = 8^2 + 5^2 \to g \approx 9.4$ cm.
- El radio de la cirfuncerencia pequeña es $g/2$ (usando de nuevo semejanza de triángulos).

- Por tanto, para calcular el área solo necesitamos el ángulo α, que se obtiene igualando la longitud del arco de circunferencia del desarrollo con el perímetro de la base del cono (que es una cirfunferencia de radio 5):

  $$\frac{\alpha}{360}2\pi g = 2\pi r \quad \to \quad \alpha = \frac{360r}{g} \approx 190.8^\circ$$

- Por tanto, el área será

  $$A = \frac{\alpha}{360}\pi g^2 - \frac{\alpha}{360}\pi (g/2)^2 \approx 111.14\ \text{cm}^2$$

En el apartado a) ha habido dos errores graves y frecuentes:

a) decir que como se llena hasta la mitad de la altura el volumen es la mitad

b) calcular el volumen, pero diciendo que el radio de la base del cono pequeño (el que ocupa el líquido es igual que el de la copa completa

En el apartado b), en muchos casos la superficie se ha interpretado como un trapecio ¿?

6. Tiramos 3 monedas y un dado al aire, y consideramos los siguientes sucesos:

   $A \equiv$ "en las monedas salen dos caras"

   $B \equiv$ "en el dado sale un múltiplo de 2"

   Calcula la probabilidad de los sucesos $A \cup B$ y $A \cap B$.

   a) Al tirar tres monedas tenemos 8 posibles resultados: ccc, cc+, c+c, c++, +cc, +c+, ++c, +++.
   Todos ellos son igualmente probables, y en 3 de ellos hay dos caras.
   Por tanto, según la fórmula de Laplace, $P(A) = \dfrac{3}{8}$.

   b) Al tirar el dado, 3 de los 6 resultados son pares. Por tanto, $P(B) = \dfrac{1}{2}$.

   c) Como los sucesos A y B son independientes, $P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = \dfrac{3}{16}$.

   d) Finalmente, usando el principio de inclusión-exclusión:
   $$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{3}{8} + \frac{1}{2} - \frac{3}{16} = \frac{11}{16}$$

   Un problema casi general ha sido explicar poco o nada el razonamiento empleado.

   También ha causado problemas el concepto de múltiplo: para algunos, 1 es múltiplo de 3, para otros 3 no es múltiplo de 3. (y parecido para los pares)