Tema 4: Dos teoremas básicos. Pitágoras y Tales.

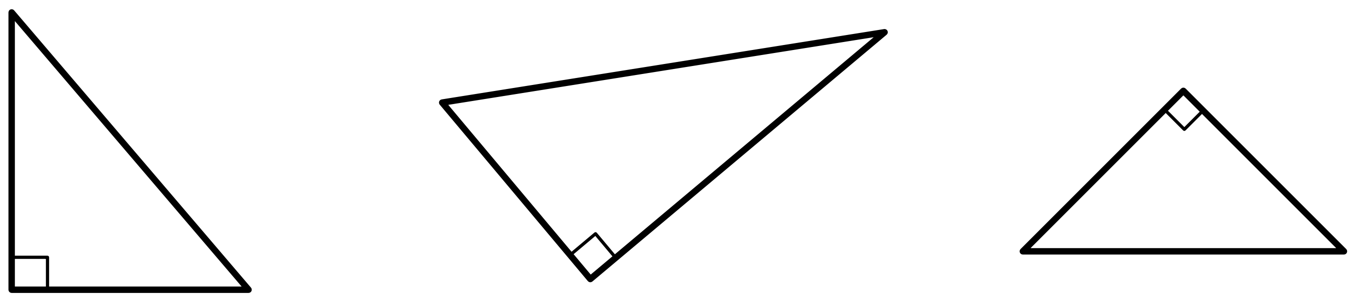
- ⋆ Teorema de Pitágoras.
- ⋆ Aplicaciones.
- ⋆ Figuras semejantes.
- ⋆ Teorema de Tales.
- ⋆ Aplicaciones.

Distancia. Teorema de Pitágoras.

* El Teorema de Pitágoras es seguramente el resultado más importante de la geometría elemental.
* No es parte del curriculum de primaria (ni opino que debiera serlo).
  Lo que sí creo es que es un resultado con muchas consecuencias, y que debe ser conocido y entendido por cualquier profesor de primaria.

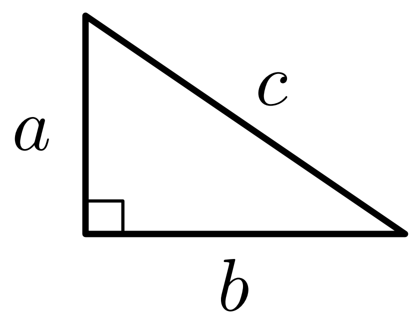
El Teorema (p. 129)

* Un triángulo es rectángulo si tiene un ángulo recto.



* Los dos lados adyacentes al ángulo recto se llaman catetos, y el otro hipotenusa.

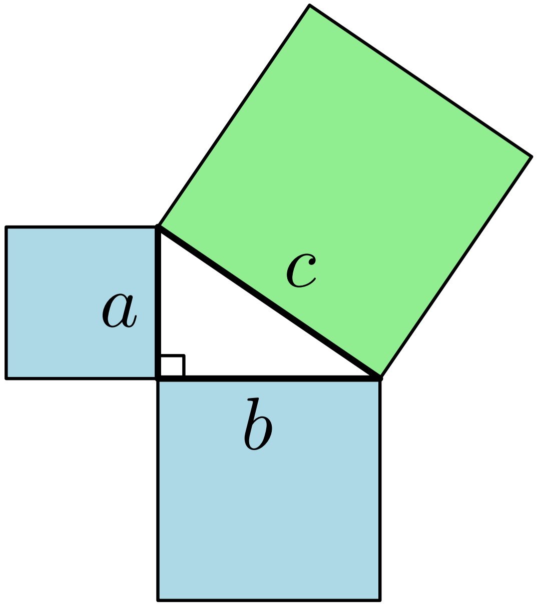
* Teorema de Pitágoras: En cualquier triángulo rectángulo, si a y b son las longitudes de los catetos, y c la de la hipotenusa, se verifica que $c^2 = a^2 + b^2$.



Teorema de Pitágoras

* Interpretación con áreas.

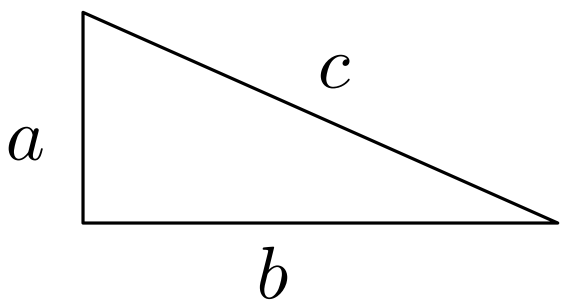
$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2}$$

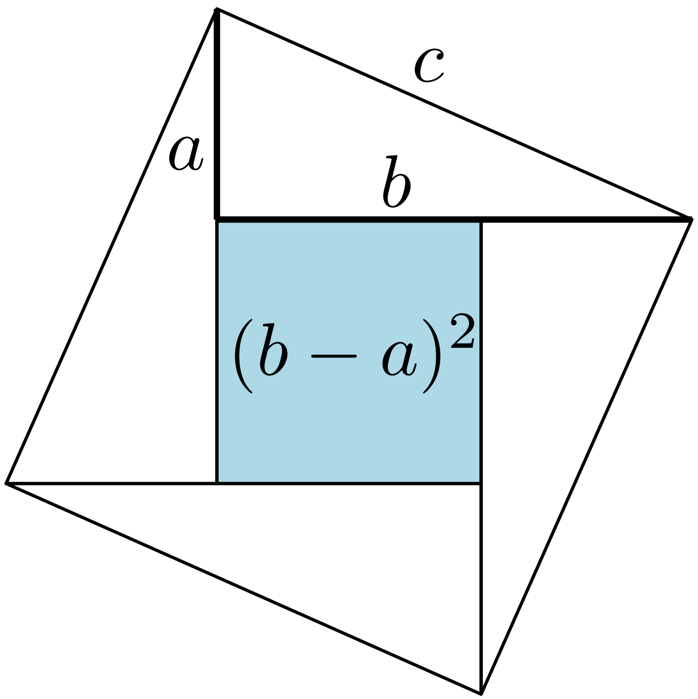


* Un poco de historia:
  * los egipcios y babilonios ya conocían algunas ternas pitagóricas.
  * la primera demostración se debe a Pitágoras (Grecia, $\approx$ 500 a.C).

Demostración del teorema

* En 1927, E. S. Loomis catalogó 367 demostraciones distintas.
* Veamos una especialmente sencilla:

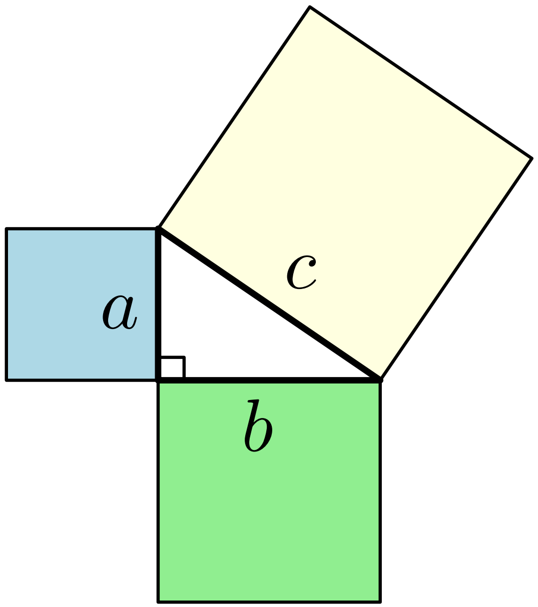


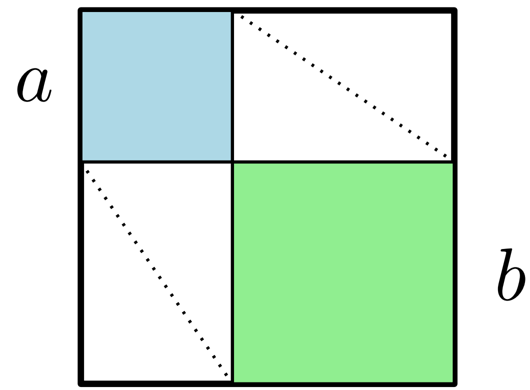


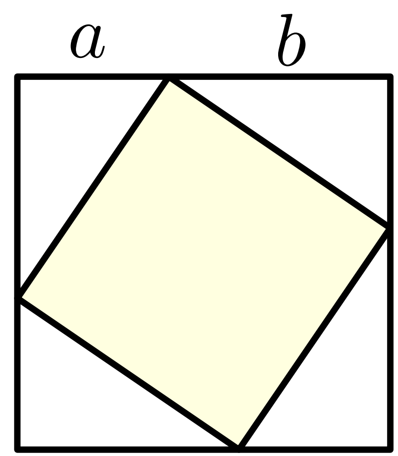
$$c^2 = 4\,\frac{ab}{2} + (b-a)^2 \; = a^2 + b^2$$

Demostración del teorema

* Y una segunda (y última) sin nada de álgebra.







Comentario histórico

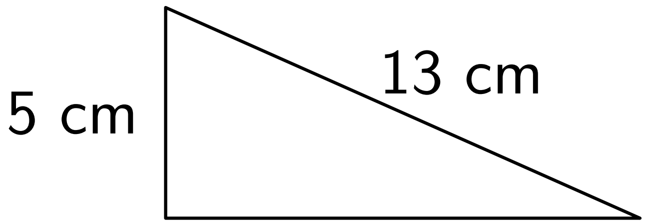
* Una consecuencia importante del teorema fue la conclusión de que la diagonal de un cuadrado de lado 1 mide $\sqrt{2}$.

* Los pitagóricos también comprobaron, horrorizados, que ese número no se podía escribir como cociente de números naturales.

  Habían descubierto los números irracionales.

Problemas

* Calcula el área del triángulo de la figura.



* Calcula el área de un cuadrado cuya diagonal mide 5 m.

* Calcula el área de un triángulo equilátero de perímetro 6 m.

Recíproco del teorema

* El recíproco del teorema también es cierto, es decir:

  Si un triángulo tiene lados de longitudes a, b y c, y se cumple que $c^2 = a^2 + b^2$, entonces el triángulo es rectángulo.

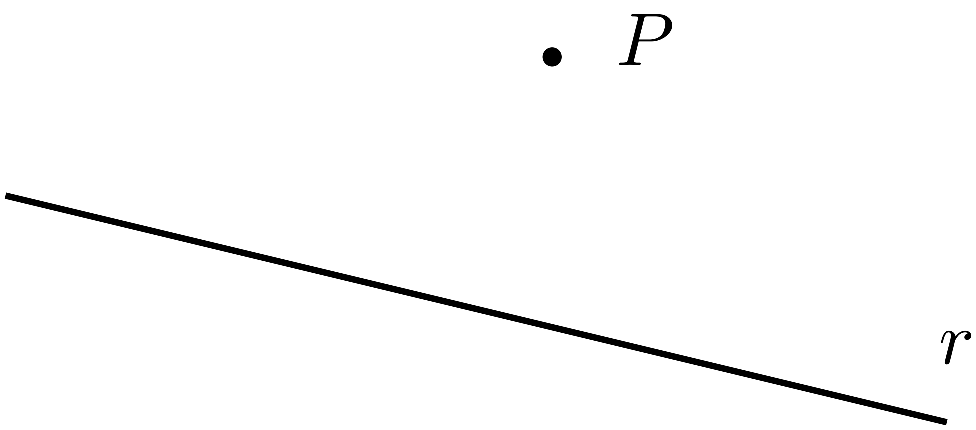
* Veamos la idea de la demostración con un ejemplo:

  Demuestra que un triángulo de lados 6, 8 y 10 es un triángulo rectánculo, siguiendo los siguientes pasos:

  1. Construye un triángulo T con dos lados de longitud 6 y 8, y que formen un ángulo recto entre ellos.
  2. Calcula la longitud del tercer lado de T.
  3. ¿Por qué el triángulo del enunciado y T son iguales?

Algunas aplicaciones

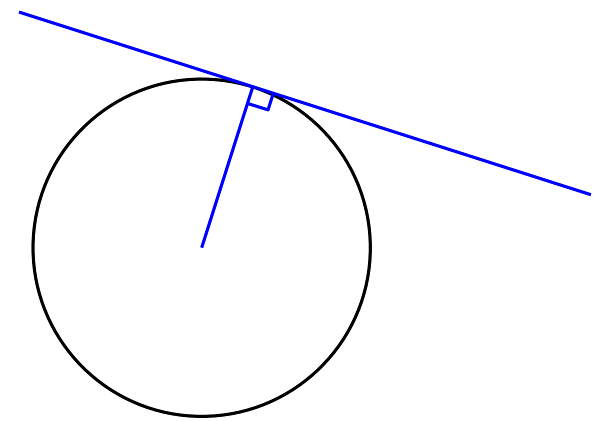
* Distancia de un punto a una recta.



* ¿Cuál es el conjunto de puntos que están a la misma distancia que P de la recta r?

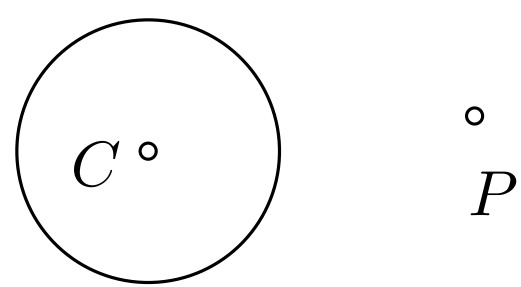
Recta tangente a una circunferencia

∗ Propiedad: La recta tangente a una circunferencia es perpendicular al radio en el punto de tangencia.



∗ Para comprobar que esto es así piensa en el punto de la recta más cercano al centro de la circunferencia.

∗ Esta propiedad es la base de la siguiente construcción: Construye una recta tangente a la circunferencia C desde un punto P (exterior a C).



Ternas pitagóricas (p. 134)

* Tres números (a, b, c) forman una terna pitagórica si cumplen que $c^2 = a^2 + b^2$ (es decir, si existe un triángulo rectángulo con esos lados).

* Para dos números naturales m y n (con $m > n$), considera los números $a = m^2 - n^2$, $b = 2mn$

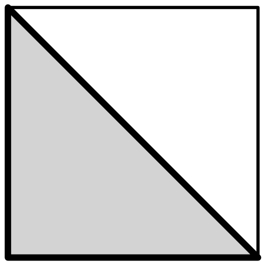
  Obs: $a^2 + b^2$ es siempre un cuadrado perfecto.

* Los números $\begin{cases} a = m^2 - n^2 \\ b = 2mn \\ c = m^2 + n^2 \end{cases}$ forman siempre una terna pitagórica (si $m > n$).

* Ejercicio: construye triángulos rectángulos que tengan un cateto de longitud 40.

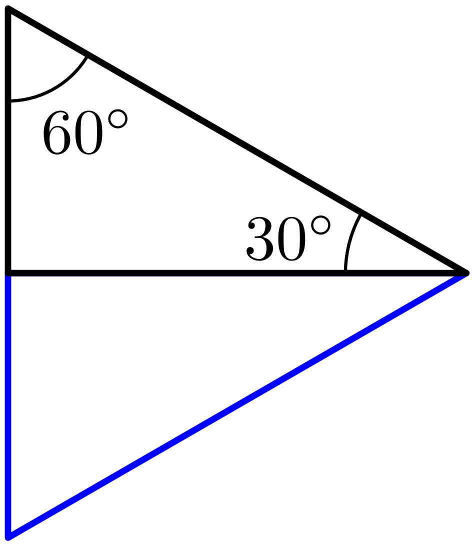
Triángulos rectángulos especiales (p. 139)

* Triángulo rectángulo isósceles.



* Ejercicio: ¿cuál es el área de un triángulo rectángulo isósceles cuya hipotenusa mide 10 cm?

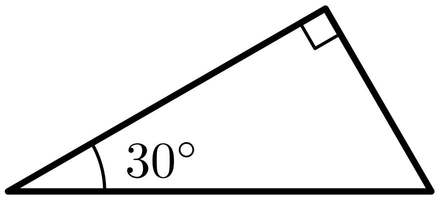
Triángulos 30-60-90 (p. 141)



* Un triángulo rectángulo con ángulos de $30°$ y $60°$ es "la mitad" de un triángulo equilátero.

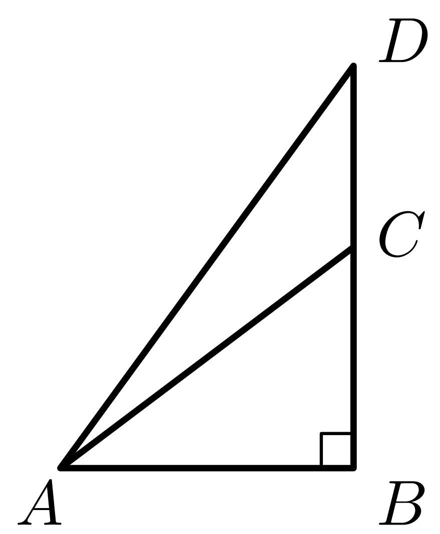
* Por tanto, en estos triángulos el cateto menor mide la mitad que la hipotenusa.

* Ejercicio: Calcula el área del triángulo de la figura.

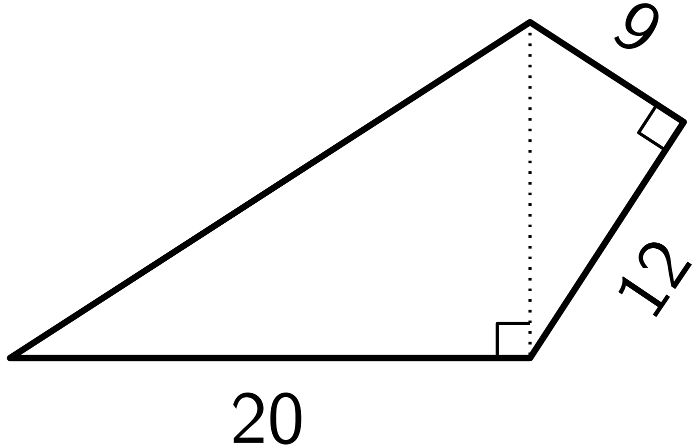


Ejercicios

* En la figura $|BC| = 6$ cm, $|CD| = 5$ cm y $|AC| = 12$ cm. Determina la longitud de AD.

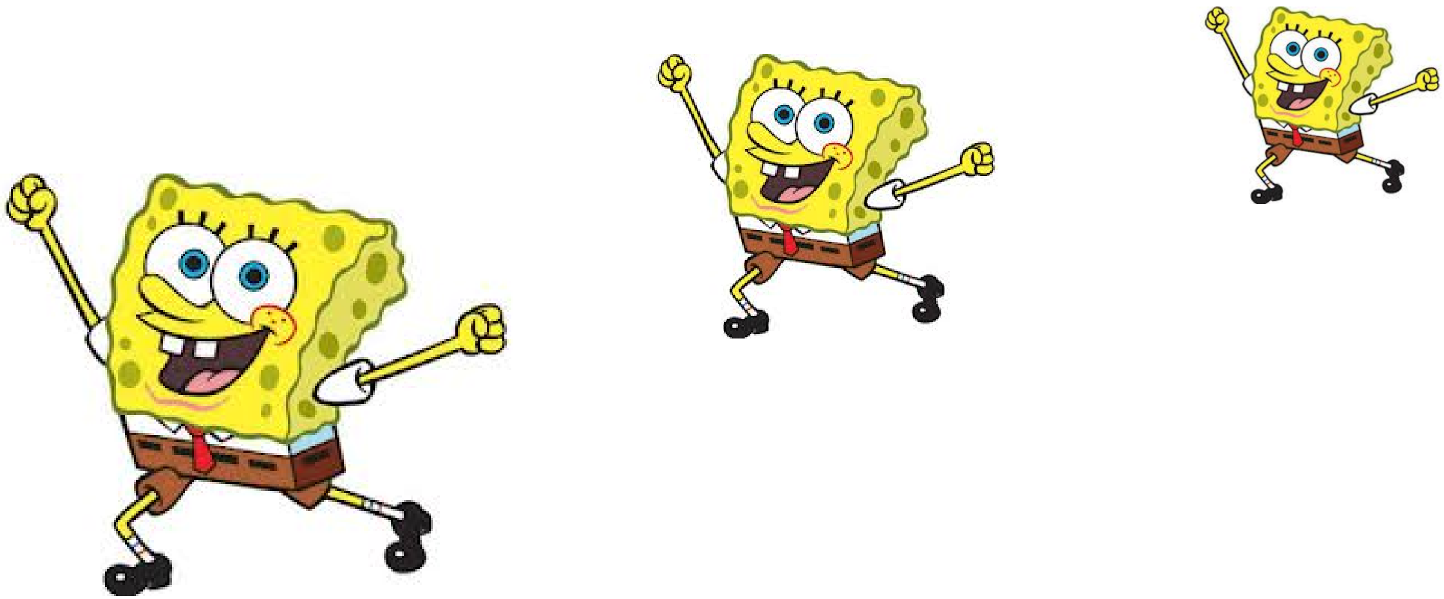


* Calcula el área y el perímetro del cuadrilátero de la figura.



Semejanza

* El cerebro humano está muy entrenado para detectar la semejanza (proporcionalidad).

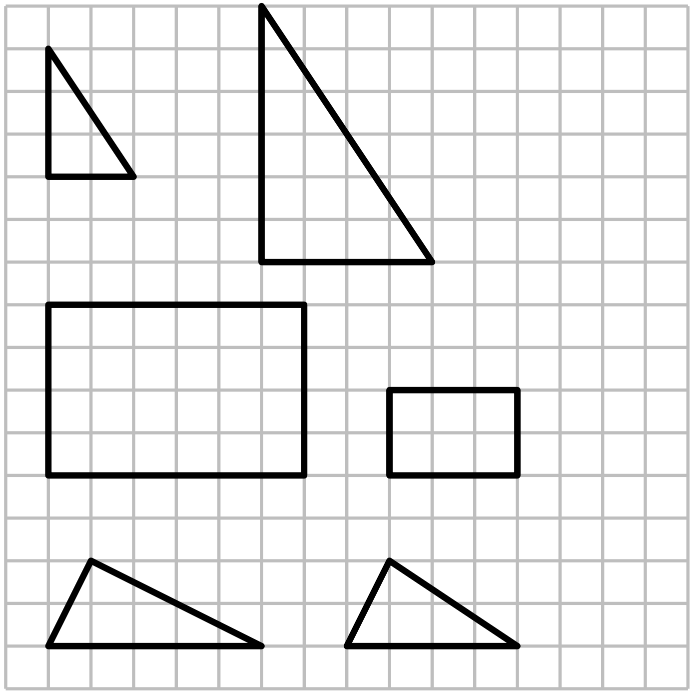


* Esto hace que sea sencillo adquirir la idea intuitiva de figuras semejantes:

  Dos figuras son semejantes si tienen la misma forma (aunque pueden tener distinto tamaño).

Primeros ejemplos

* La cuadrícula facilita la presentación de los primeros ejemplos.

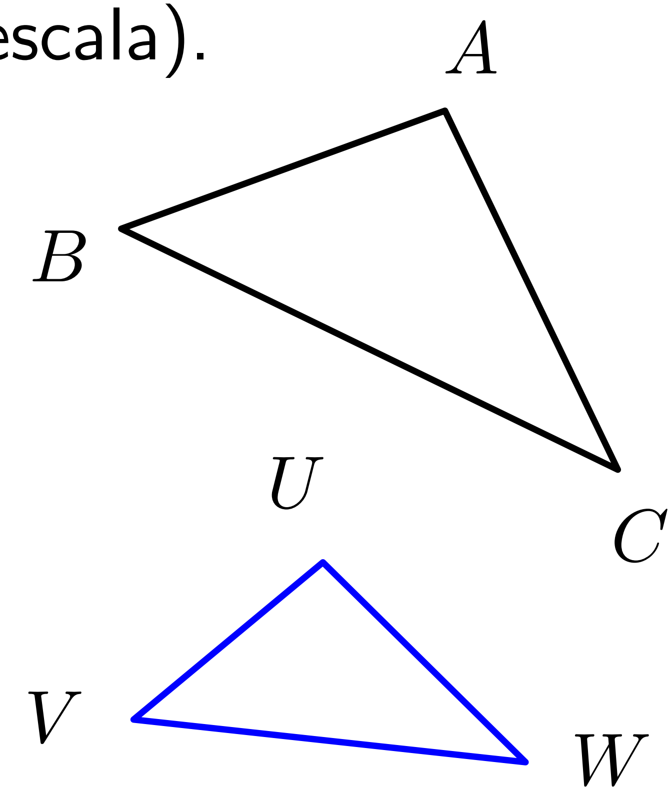


* La semejanza se puede estudiar de forma un poco más precisa en el tercer ciclo (después de la proporcionalidad).

Triángulos semejantes

∗ Definición: Dos triángulos son semejantes si sus ángulos "correspondientes" son iguales y sus lados "correspondientes" son proporcionales.

Al cociente (proporción) de las longitudes de los lados se le llama razón de semejanza (factor de escala).



∗ ABC y UVW son semejantes si:

- ⋆ $\angle CAB = \angle WUV$
  $\angle ABC = \angle UVW$
  $\angle BCA = \angle VWU$
- ⋆ $\dfrac{|AB|}{|UV|} = \dfrac{|BC|}{|VW|} = \dfrac{|CA|}{|WU|} \; (= r)$

Triángulos semejantes

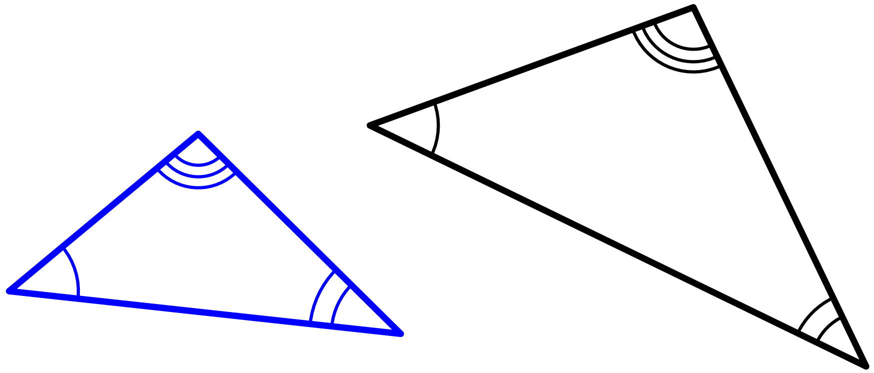
* Una idea fundamental de este tema es que, en el caso de los triángulos, los ángulos determinan la forma. En concreto, si dos triángulos tienen ángulos correspondientes iguales, entonces son semejantes.

* Este hecho se puede motivar en primaria con ejercicios como:
  * construye dos triángulos con ángulos 50°, 60° y 70° y comprueba que sus lados son proporcionales.
  * construye un triángulo de lados 4 cm, 8 cm y 10 cm, y otro de lados 6 cm, 12 cm y 15 cm, y luego mide sus ángulos.

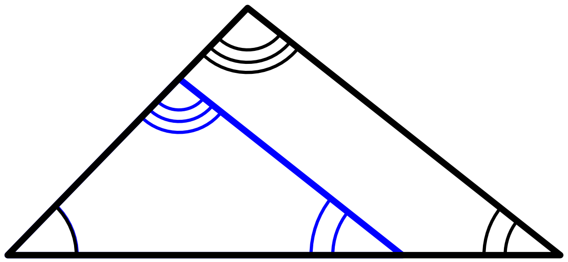
Triángulos semejantes

∗ Si los triángulos ABC y UVW son semejantes, escribimos $ABC \sim UVW$.

∗ Consideremos dos triángulos que tienen ángulos iguales:



∗ Siempre se pueden colocar en esta posición:



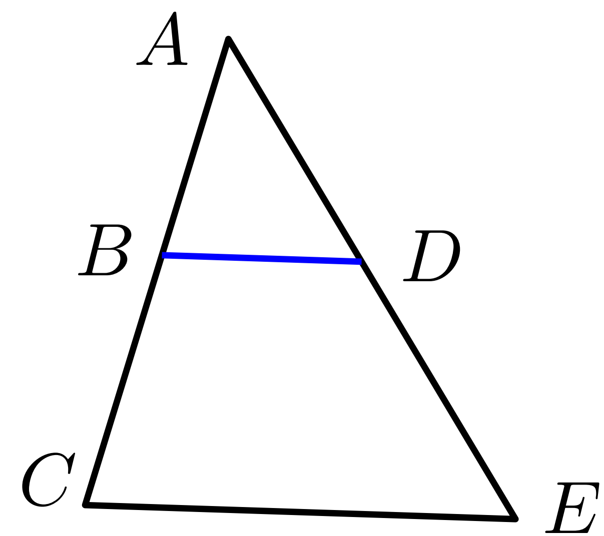
∗ Ahora, los dos lados no coincidentes son paralelos.

∗ Y que los triángulos son semejantes será consecuencia del Teorema de Tales.

Teorema de Tales

∗ Teorema: Si en el triángulo ACE de la figura el segmento BD es paralelo al segmento CE, entonces

$$\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|AD|}{|AE|}$$

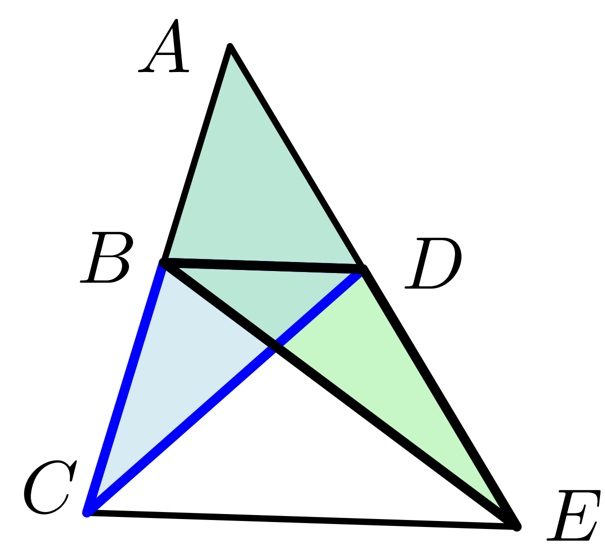


∗ Demostración:

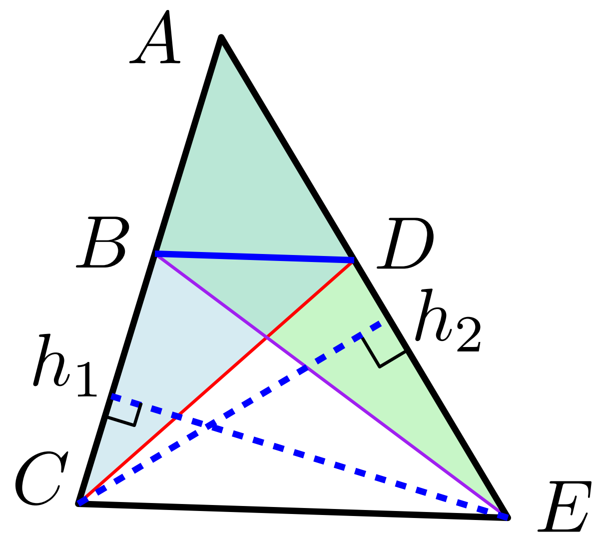
(1) $\text{Área}(CED) = \text{Área}(CEB)$

(2) $\text{Área}(CDB) = \text{Área}(EBD)$

(3) $\text{Área}(CDA) = \text{Área}(EBA)$



Teorema de Tales



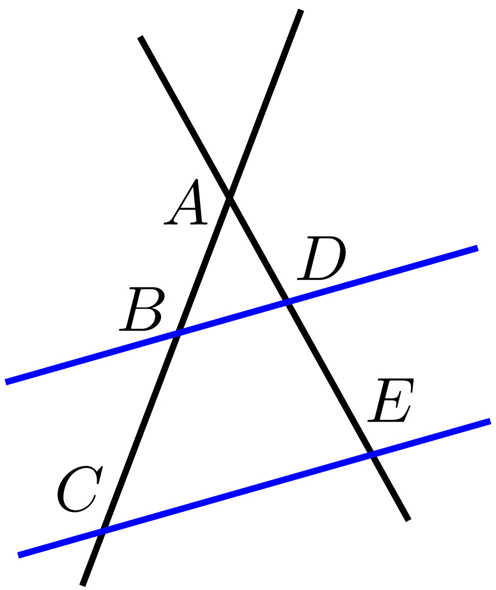
$$(3)\quad \text{Área}(CDA) = \text{Área}(EBA) \quad \longleftrightarrow \quad \frac{|AD|\,h_2}{2} = \frac{|AB|\,h_1}{2}$$

$$(1)\quad \text{Área}(CED) = \text{Área}(CEB) \quad \longleftrightarrow \quad \frac{|DE|\,h_2}{2} = \frac{|BC|\,h_1}{2}$$

Dividiendo, $\dfrac{|AB|}{|BC|} = \dfrac{|AD|}{|DE|} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{|AB|}{|AC|} = \dfrac{|AD|}{|AE|}$

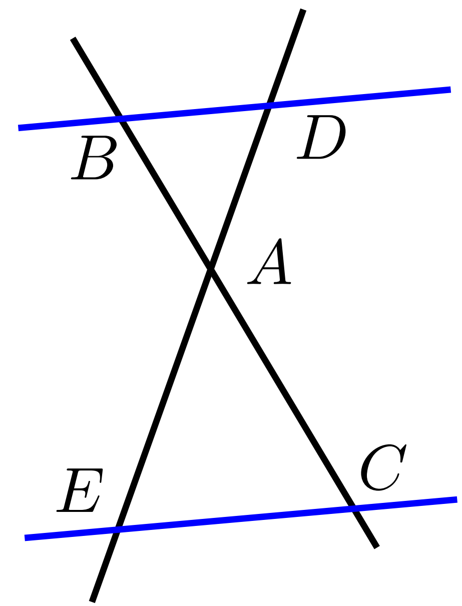
Teorema de Tales: versión extendida

* Si dos rectas secantes son intersecadas por dos rectas paralelas, en la configuración resultante los segmentos correspondientes son proporcionales.



$$\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|AD|}{|AE|} = \frac{|BD|}{|CE|}$$

$$\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|AD|}{|DE|}$$



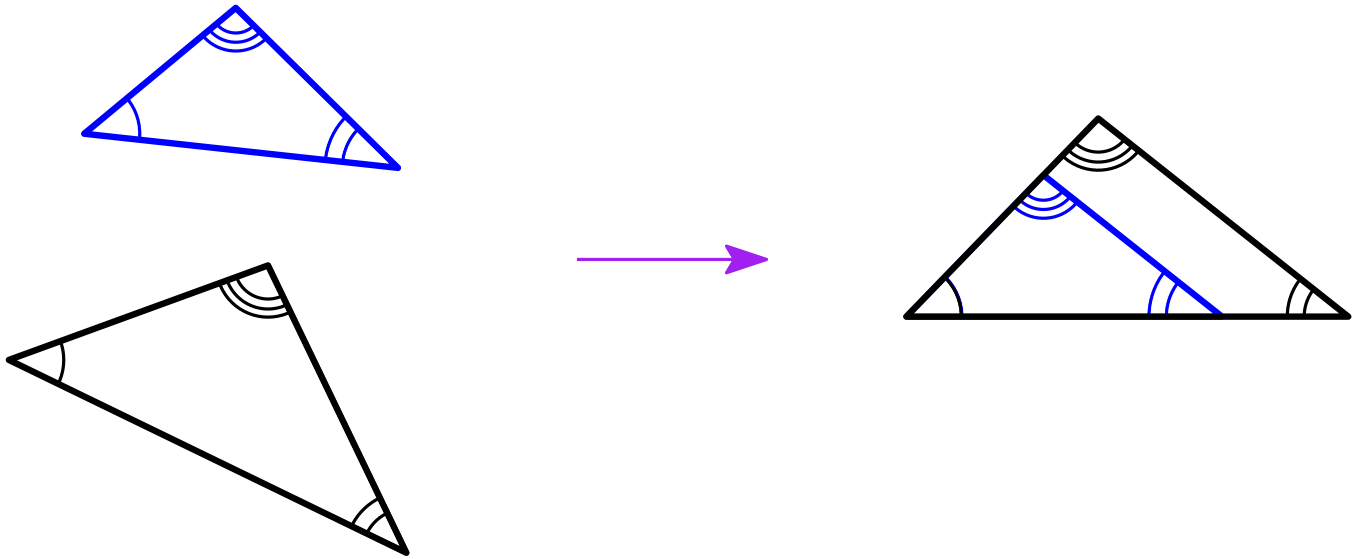
$$\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|AD|}{|AE|} = \frac{|BD|}{|EC|}$$

$$\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|AD|}{|DE|}$$

Triángulos semejantes

* El Teorema de Tales nos da este criterio de semejanza:

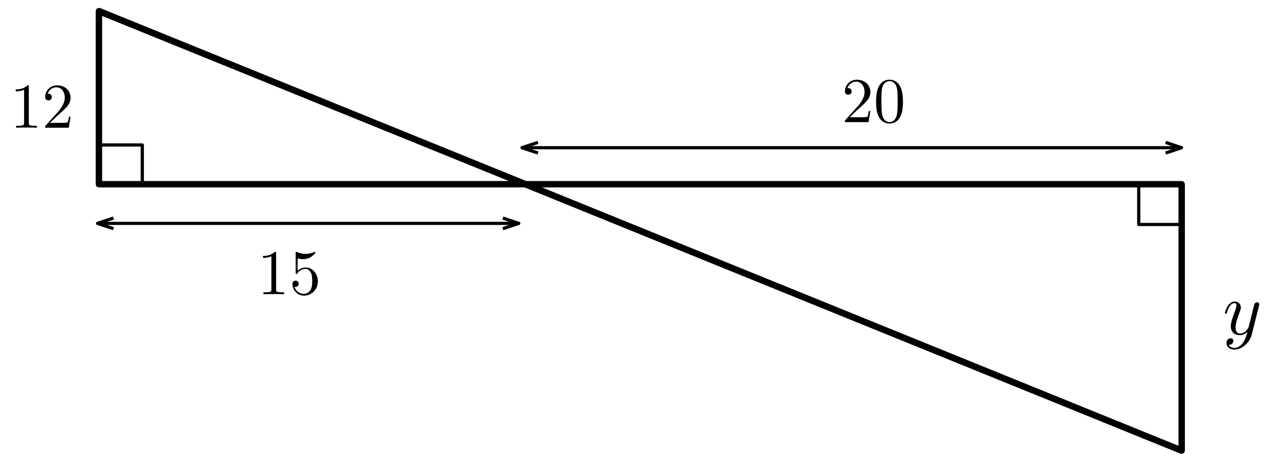
  Criterio AAA: Si dos triángulos tienen ángulos correspondientes iguales, entonces son semejantes.



* Obsérvese que es suficiente comprobar que 2 ángulos son iguales.

Problemas

* En la figura de abajo:
  1. ¿Por qué son semejantes los dos triángulos?
  2. ¿Cuál es la razón de semejanza?
  3. ¿Cuánto vale y?
  4. ¿Cuál es la razón entre las áreas?



* Un comentario: obsérvese que, precisamente gracias a la semejanza, se puede prescindir de las unidades en este tipo de problemas.

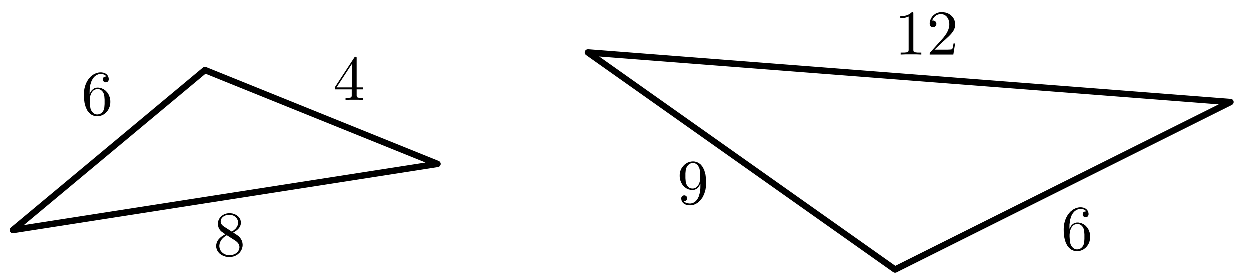
Problemas

* El otro día vi en el puerto de Barcelona un crucero que tenía 300 m de eslora (longitud). Un rato después lo volví a ver desde la playa, y comprobé que se movía paralelo a la costa y que lo tapaba aproximadamente con mi pulgar cuando extendía el brazo. ¿Podrías dar un valor aproximado de a qué distancia se encontraba el crucero en ese momento?

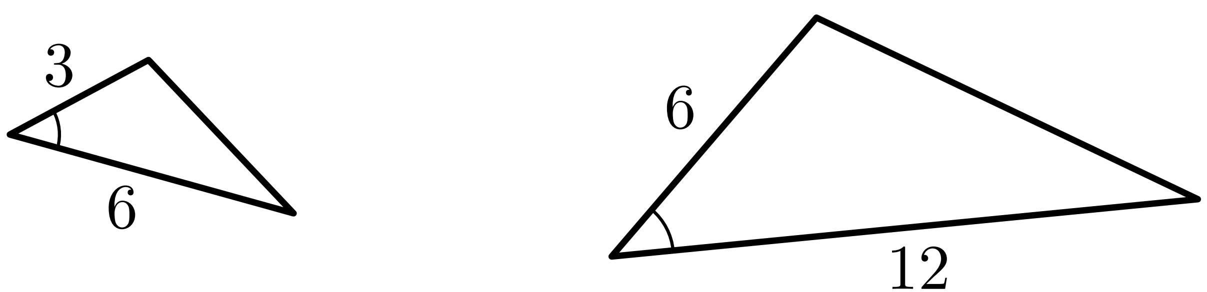
* Construye un triángulo ABC (como quieras). Ahora, con regla (sin graduar) y compás, contruye un triángulo semejante que sea 3 veces mayor.

Criterios de semejanza

* Hay otros dos criterios de semejanza:
* Criterio LLL Si en dos triángulos los lados correspondientes son proporcionales, entonces los triángulos son semejantes.



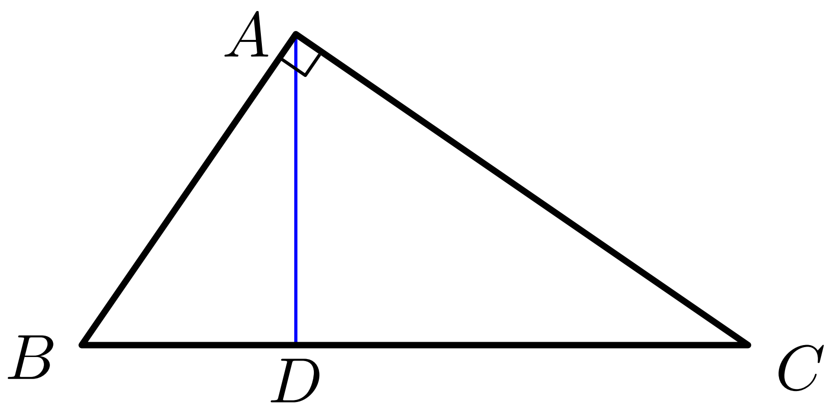
* Criterio LAL: Si dos triángulos tienen un ángulo igual y los lados adyacentes proporcionales, entonces son semejantes.



* La justificación de estos criterios de semejanza es sencilla a partir de los criterios de congruencia.

Problemas

* Demuestra que, en un triángulo rectángulo, la altura sobre la hipotenusa divide al triángulo en dos triángulos que son semejantes entre sí, y semejantes al triángulo completo.

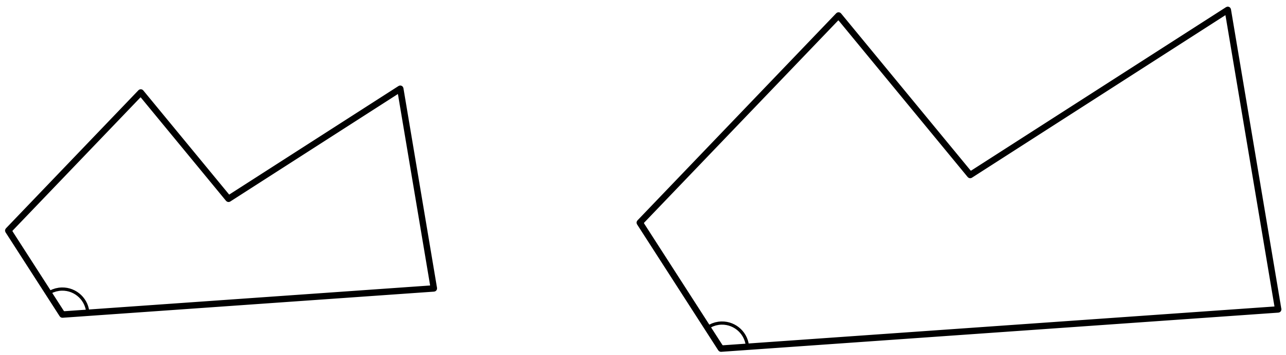


$$ABC \sim DAC \sim DBA$$

* Utilizando sólo un compás y una regla sin graduar, divide el segmento AB en 5 partes iguales.

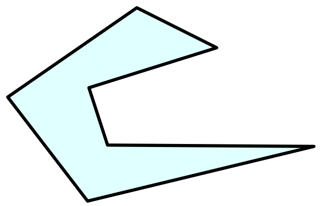
Semejanza de polígonos

- Dos polígonos P y Q son semejantes si se puede establecer una correspondencia entre sus lados de forma que
  - los ángulos correspondientes son iguales
  - los lados correspondientes son proporcionales

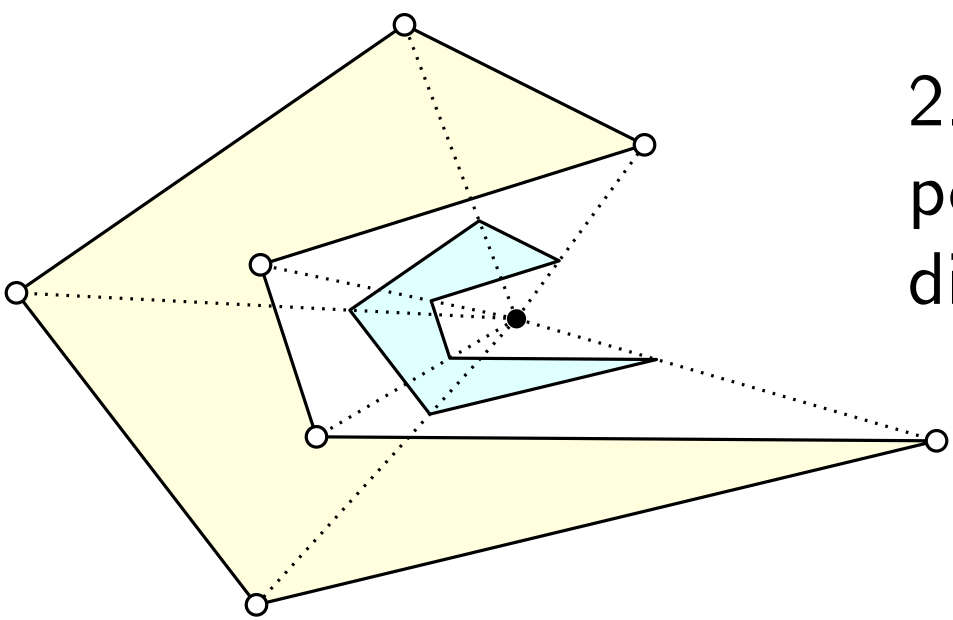


- Ya no se puede eliminar ninguna condición.
  Por ejemplo, dos cuadriláteros pueden tener ángulos correspondientes iguales y no ser semejantes.

Construcción de polígonos semejantes



* Problema: construye un polígono semejante al de la figura con razón de semejanza 3.



1. Elige un punto del plano.

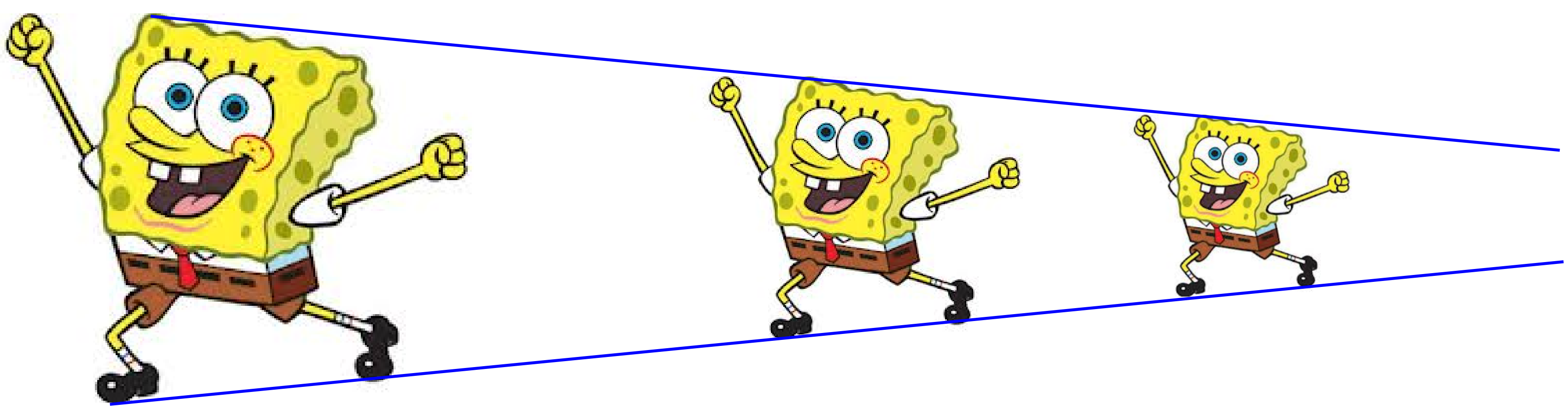
2. Traza rayos desde el punto por los vértices y toma distancia el triple.

Figuras semejantes

- Esta transformación de puede tomar como la definición de semejanza:

  Dos figuras son semejantes si se puede obtener una de la otra con una transformación como la de la transparencia anterior.

- Esto tiene la ventaja de que se puede hablar de semejanza de figuras que no son polígonos.

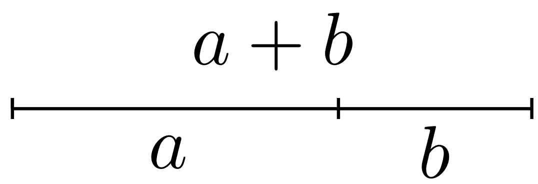


La semejanza en la vida cotidiana

* Un plano es semejante al objeto que representa.
  La razón de semejanza es la escala.

* Una propuesta de actividad para el tercer ciclo de primaria:
  En el mapa se muestra la excursión que hicieron el otro día un grupo de amigos.
  1. ¿Cuál es la escala del mapa?
  2. ¿Podrías aproximar la longitud de la excursión?

La proporción áurea



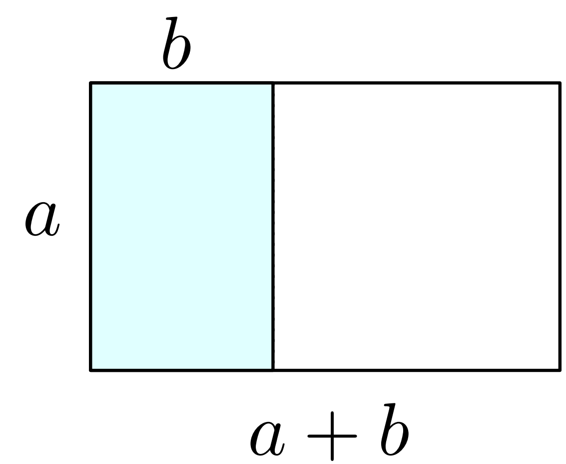
$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} \quad (= \varphi)$$

$$1 + \frac{1}{\varphi} = \varphi \quad \rightarrow \quad \boxed{\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618}$$

número de oro (áureo)

* El rectángulo áureo

* Al recortar un cuadrado a un rectángulo áureo se obtiene un rectángulo semejante al original.



φ: el número de oro (áureo)

* La proporción áurea siempre se ha considerado "bella".
  - ¿lo es intrínsecamente?
  - ¿estamos acostumbrados a ella?

* La proporción áurea es ubicua:
  - en la arquitectura (y en las artes, en general).
  - en nuestras carteras (tarjetas de crédito, dni).
  - en la naturaleza

* ¿Por qué aparece en la naturaleza? Sucesión de Fibonacci

La sucesión de Fibonacci

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ 55,\ 89,\ \ldots$$

* Definición recursiva: $f_n = f_{n-1} + f_{n-2},\ \ (f_1 = 1,\ f_2 = 1)$.

* A partir de esta definición no es difícil obtener una fórmula para f_n.

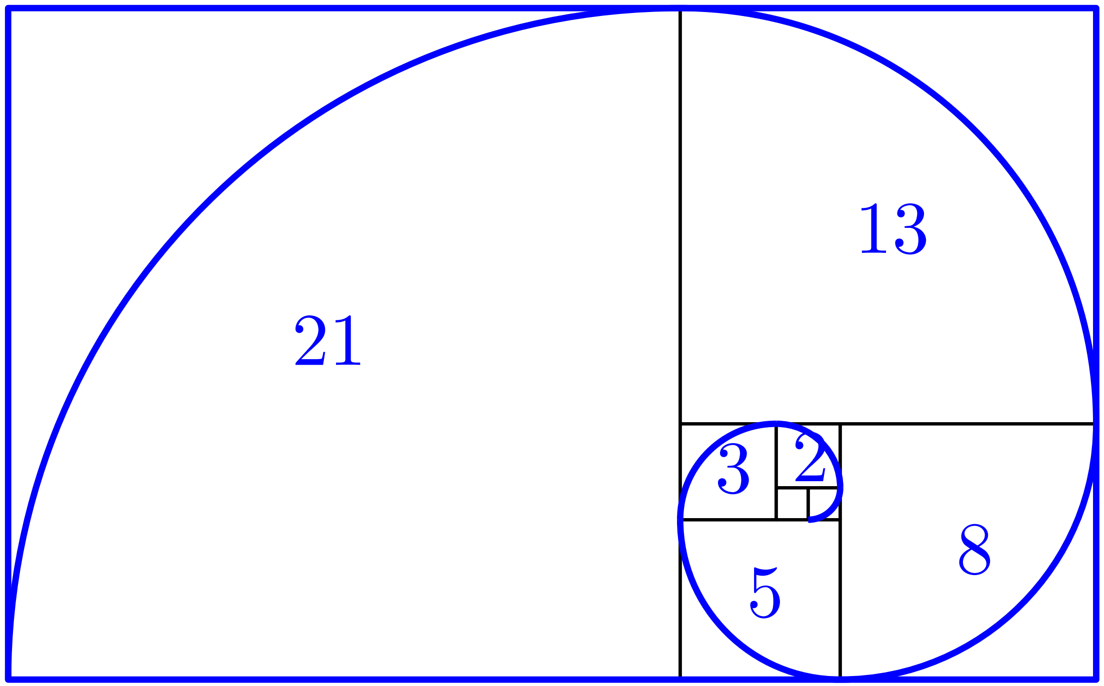
* $f_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$

* Y a partir de esta fórmula es " fácil" ver que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = \varphi$$

Sucesión de Fibonacci y proporción áurea

* Patrones de crecimiento



Espiral logarítmica

Rectángulos áureos

* En los procesos de crecimiento, no ocurre que $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$, sino que $f_n = f_{n-1} + f_{n-3} + f_{n-4}$.
* Para saber más:
  * buscar "Proporción áurea en naturaleza".
  * Ir a http://tinyurl.com/y8ke9cg (en inglés).