Tema 5: Área (II). El círculo. (p. 171)

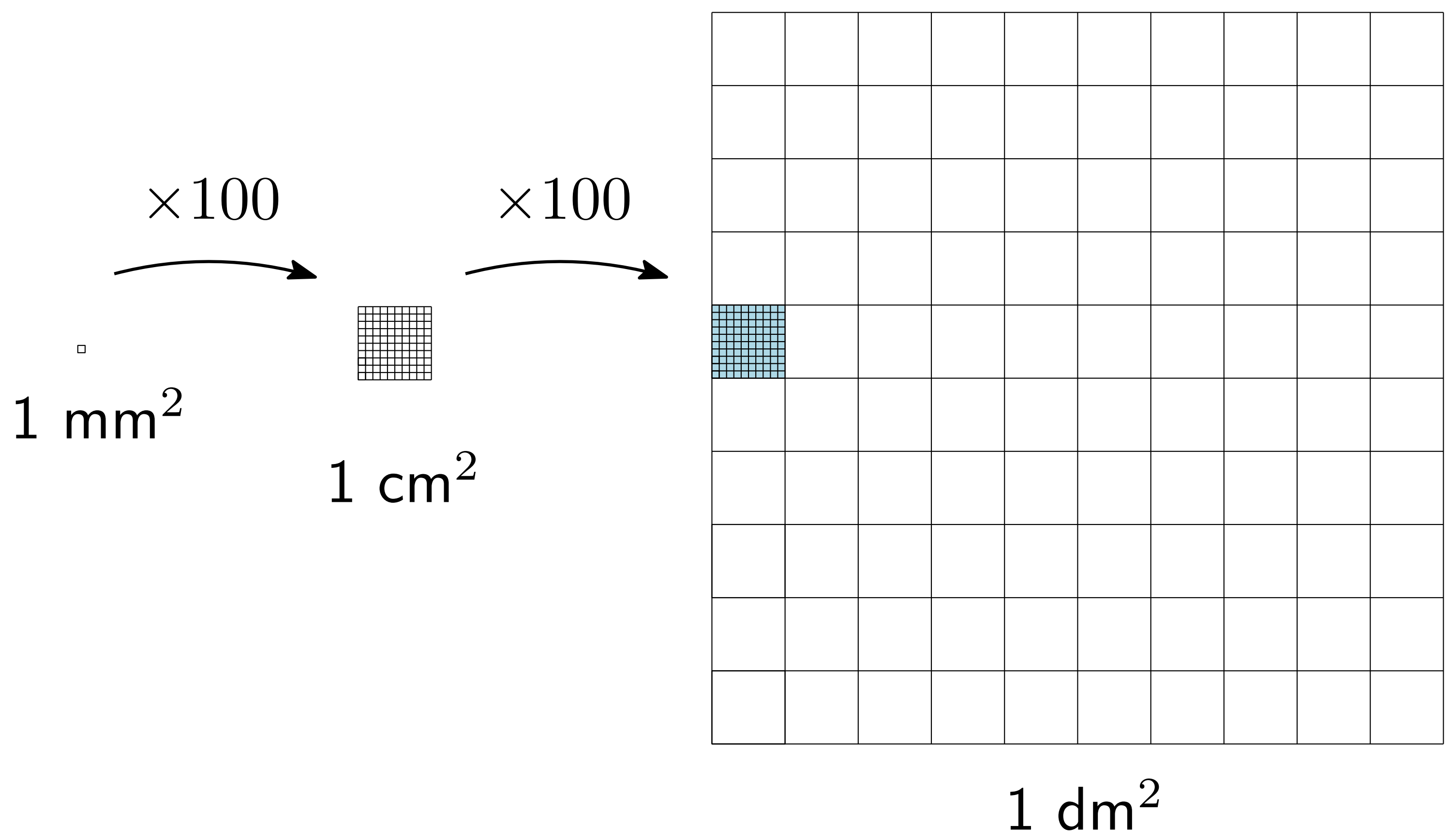
* En el Tema 3 hicimos la introducción del concepto de área, y vimos cómo se puede calcular el área de triángulos y cuadriláteros.

  En este tema continuaremos con el estudio del área:

  1. Unidades de área. Cambio de unidades.
  2. Área y semejanza.
  3. Circunferencia y círculo. El número π.
  4. Área del círculo.
  5. Aproximación y errores.

Unidades de área

* Ver una vez que 1 dm^2 son 100 cm^2 y que cada cm^2 tiene 100 mm^2 puede ser muy instructivo.



Cambio de unidades

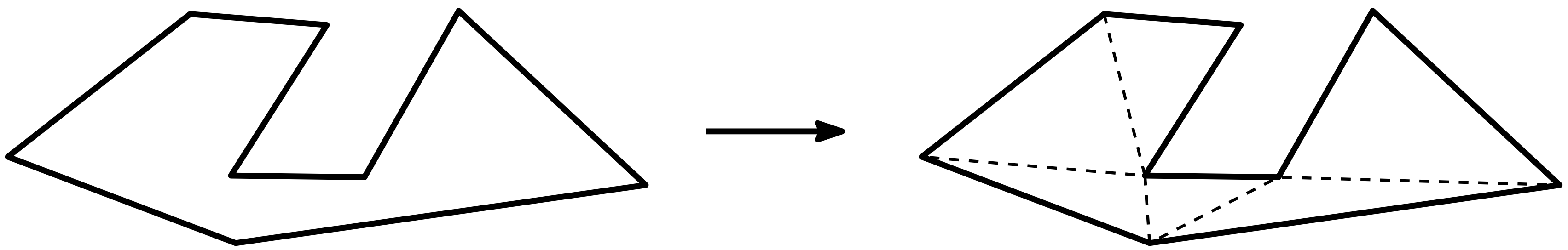
* Por supuesto, hay que huir de recetas del tipo: hacemos una lista, igual que en las medidas de longitud. Pero ahora, en cada paso hay que añadir o quitar dos ceros ...

* Los argumentos deben ser del tipo:
  * Como 1 dm^2 son 100 cm^2, para cambiar unidades entre dm^2 y cm^2 hay que ...
  * Como 1 km son 1000 m, 1 km^2 son 1000×1000 m^2 y por tanto ...

* Ejercicio: un campo de fútbol tiene una superficie de aproximadamente $3/4$ Hm^2. ¿Cuántos m^2 mide aproximadamente un campo de fútbol?

Área de polígonos

* Como ya hemos visto, cualquier polígono se puede descomponer en triángulos. Esto permite calcular el área de cualquier región poligonal.

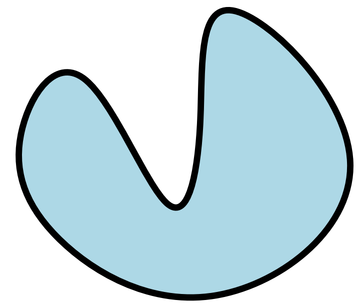


¿Área?

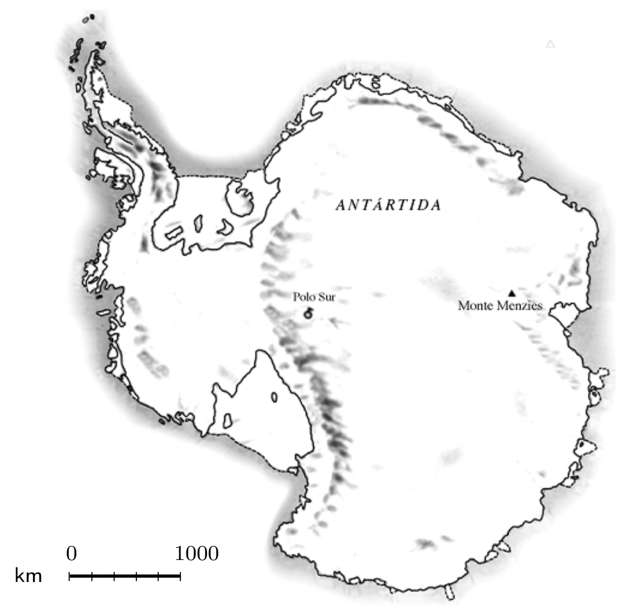
* Ejercicio: haciendo las medidas necesarias con la regla, calcula (de manera aproximada) el área del polígono de la figura.

Más allá de los polígonos

* ¿A qué llamamos área de una región como la de la figura?

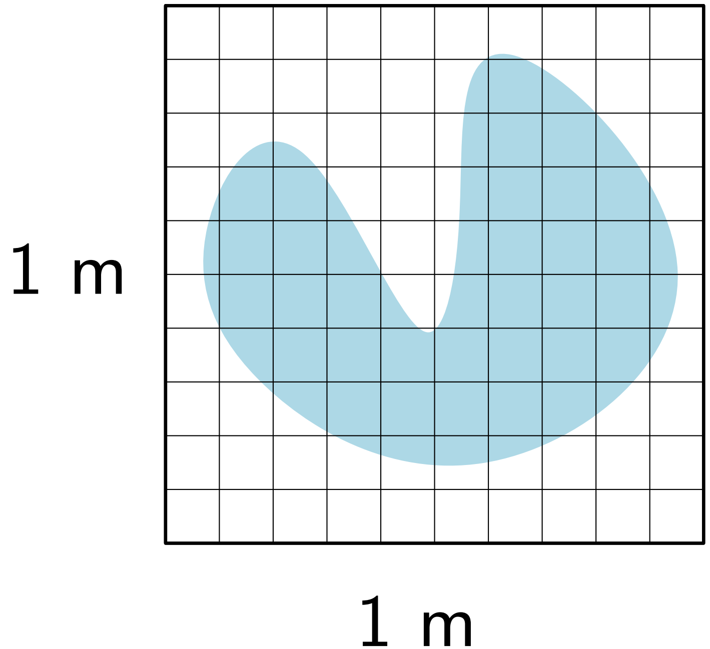


* Pregunta de la prueba de PISA (año 2000). Haz una estimación del área de la Antártida, utilizando la escala que acompaña al mapa.



Más allá de los polígonos

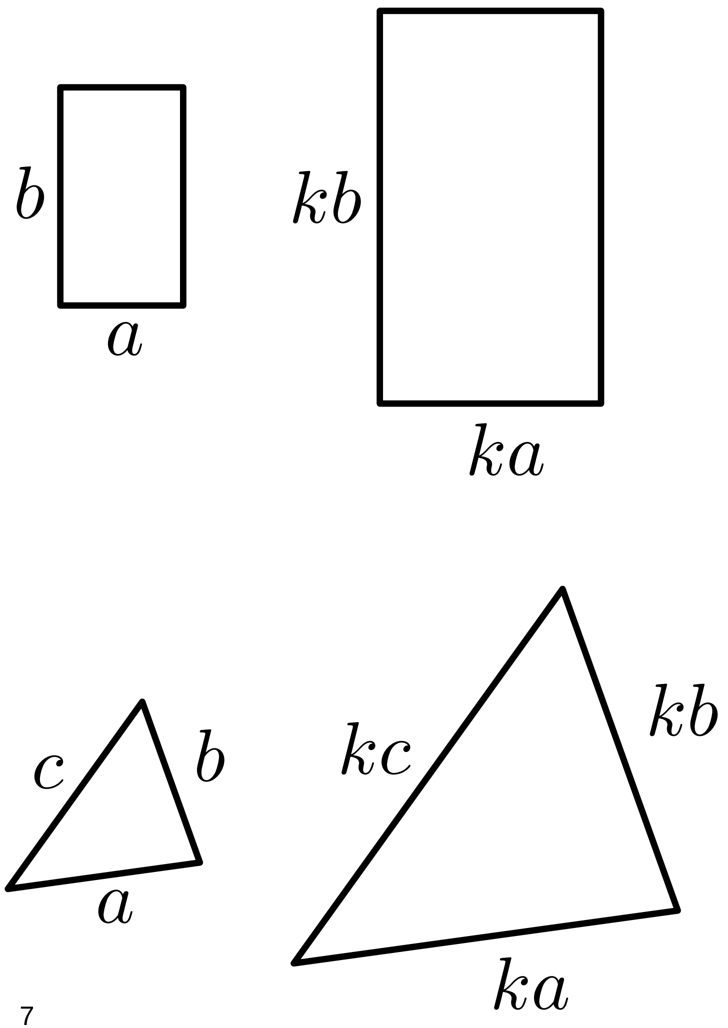
* ¿Cómo se podría dar una buena aproximación del área de la región de la figura?



* Intuitivamente, está claro que, a base de considerar cuadrículas suficientemente finas, podemos aproximar el área de la figura tanto como queramos.

Semejanza y área

* Si dos figuras son semejantes y la razón de semejanza es k, ¿cuál es la relación entre las áreas?



* Si dos figuras son semejantes y la razón de semejanza es k, la proporción entre el área de las regiones correspondientes es k^2.

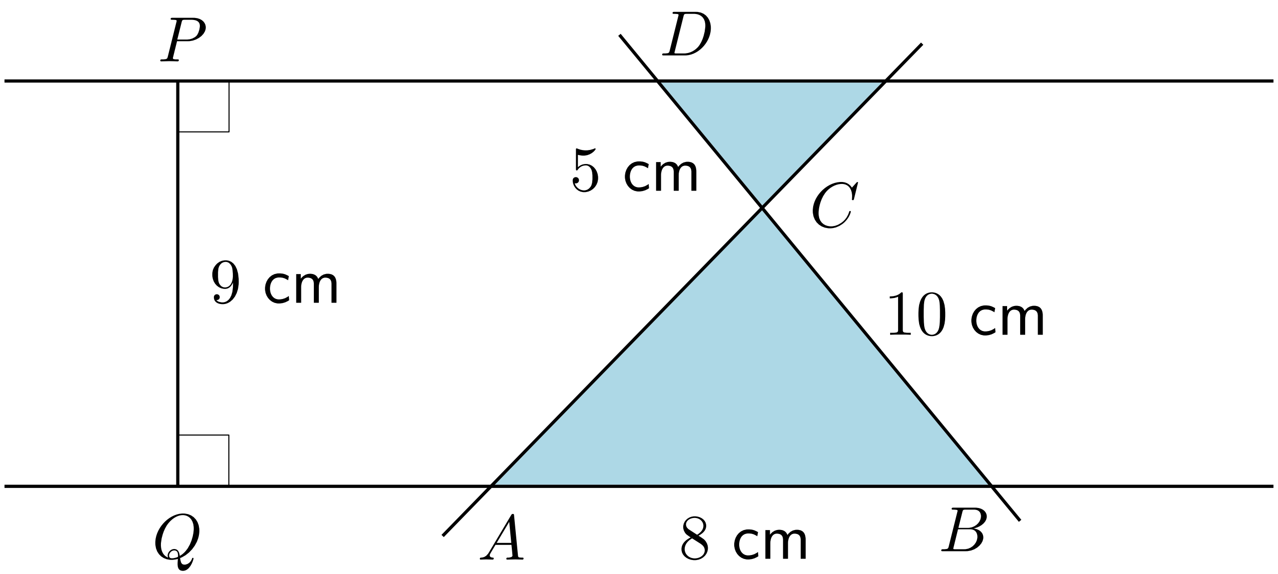
Semejanza y área

* Seguramente, que el área aumente de forma cuadrática es la razón principal por la que nuestra percepción intuitiva del área es a veces pobre.

* Problema: Supongamos que ponemos a todas las personas de la tierra en fila. ¿Cuál sería la longitud de la fila? ¿Cuántas veces daría la vuelta a la tierra? (radio medio aprox. 6370 km)
  Ahora queremos que toda la humanidad venga a la provincia de Guadalajara. ¿Cabríamos? ¿Cuánto espacio le tocaría a cada persona?

Problema

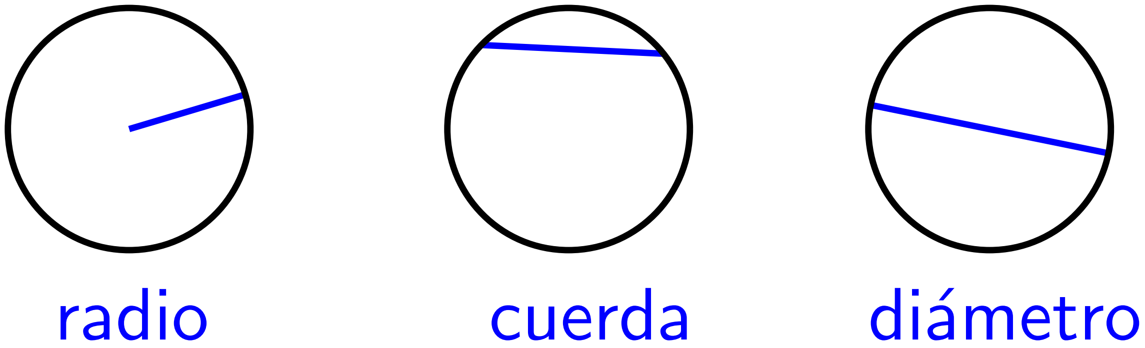
* Calcula el área de la región sombreada de la figura, y la proporción entre las áreas de los dos triángulos (las dos rectas horizontales son paralelas).



La circunferencia (p. 177)

* Definición: La circunferencia de centro el punto C y radio r es el conjunto de puntos que están a distancia r de C.

* Segmentos importantes en la circunferencia:



* Un radio es un segmento que une el centro con un punto de la circunferencia.

  Una cuerda es un segmento que une dos puntos de la circunferencia.

  Un diámetro es una cuerda que pasa por el centro de la circunferencia.

Cuerdas y radio

* Es importante aclarar que las palabras radio y diámetro se usan tanto para designar el segmento como su longitud.

* Ejercicio: En una circunferencia de radio 15, consideramos una cuerda de longitud 8.
  1. ¿A qué distancia está del centro?
  2. ¿Cuál es el área del triángulo que determinan los extremos de la cuerda y el centro de la circunferencia?

Longitud de la circunferencia

* Se estudia en el tercer ciclo, y es importante darse cuenta de que es un problema nuevo ...

* ... que no se puede zanjar diciendo: "La longitud de la circunferencia es πd.

* Una posible secuencia didáctica:
  1. Nos planteamos el problema: ¿cómo se puede medir la longitud de una circunferencia? (Mejor con objetos "físicos").
  2. Tarea para casa: buscar tres objetos circulares, medir las longitudes de circunferencia y diámetro.
  3. En clase, calculamos los cocientes de los resultados de la tarea, y comprobamos que son siempre muy parecidos.

Longitud de la circunferencia

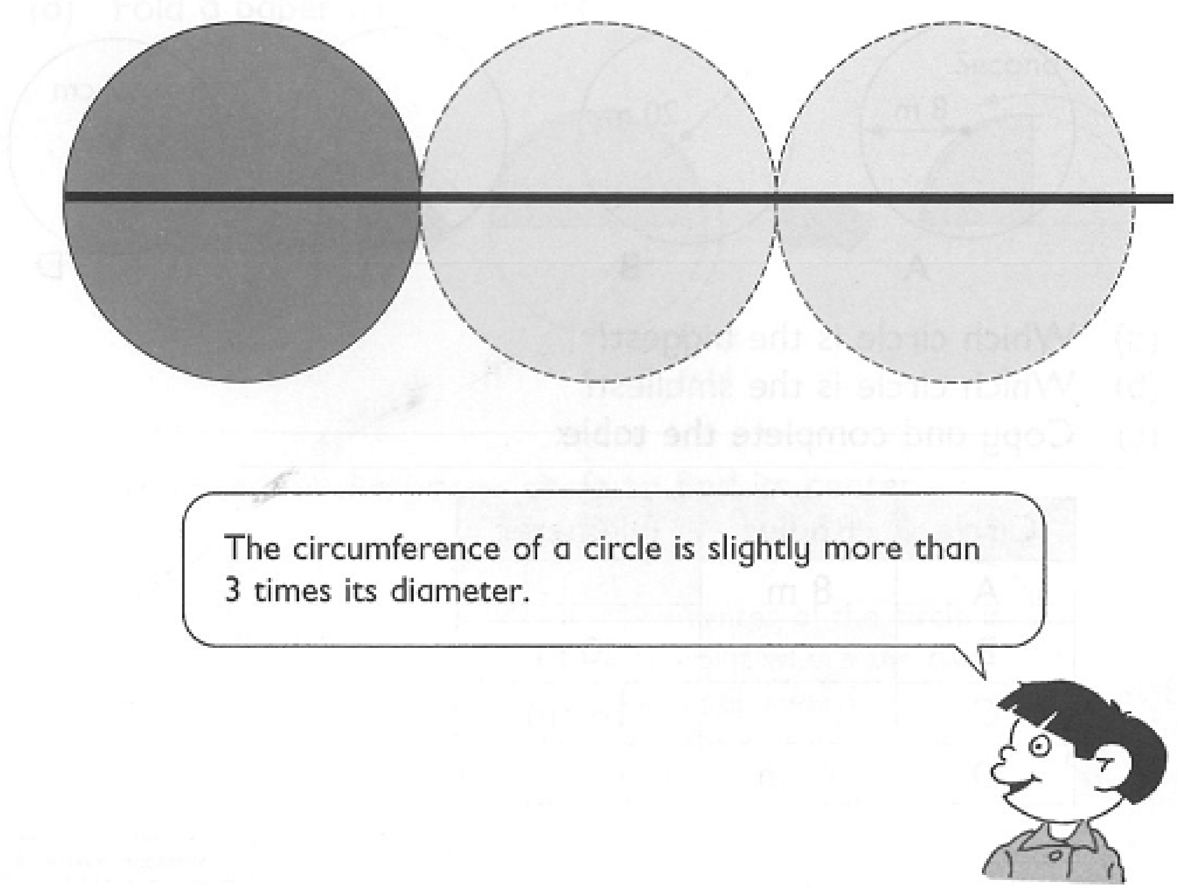
* Ahora ya sí podemos decir que el cociente entre longitud y diámetro es un número tan importante que tiene nombre propio: $\pi \approx 3'1416 \approx \frac{22}{7}$. Por tanto, $\ell = \pi d \ (= 2\pi r)$.

* La historia del número π puede ser un buen tema de trabajo en grupo, o como ampliación para algún alumno de altas capacidades.

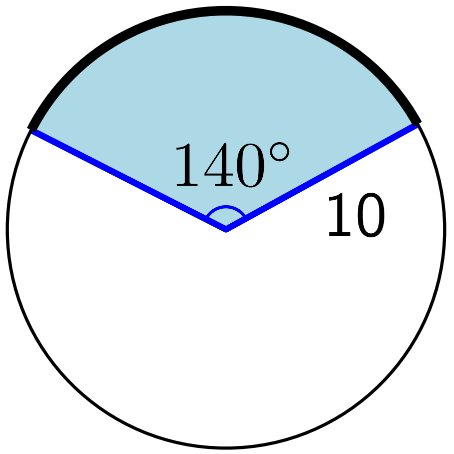
  Arquímedes (siglo III a.C.) calculó que π estaba entre $\frac{223}{71}$ y $\frac{22}{7}$.

* Un comentario sobre la terminología en inglés:
  Usan *circle* para circunferencia, y *circumference* es la longitud de la circunferencia. Para el círculo usan *disk*.

Una buena ilustración



Arcos de circunferencia

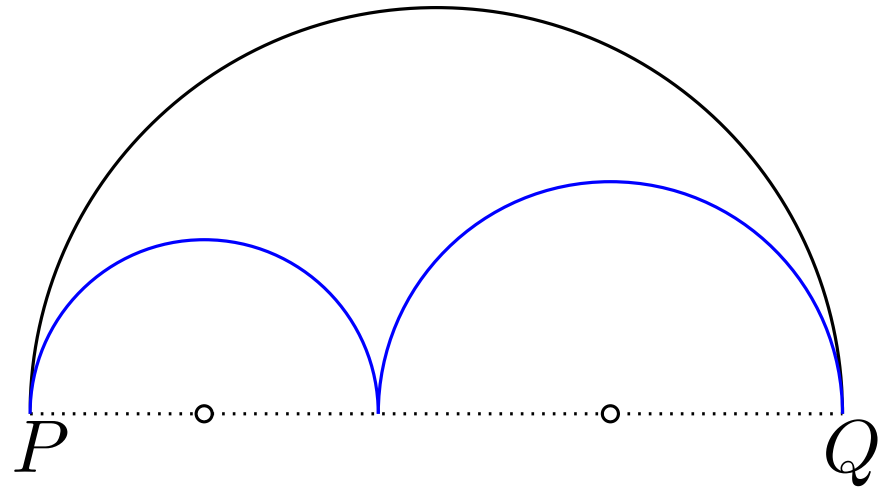


* Un ángulo central es un ángulo con vértice en el centro de la circunferencia.
* Un arco de circunferencia es la parte de la circunferencia contenida en un ángulo central.
* No debería ser necesaria una fórmula adicional para calcular la longitud del arco de circunferencia de la figura.
* Problema: Sabemos que la longitud de un arco de circunferencia mide lo mismo que el radio. ¿Cuánto mide el ángulo central correspondiente?
* Esta medida de ángulo ($\approx 57'3^\circ$) se llama radián y se utiliza en matemáticas de secundaria y posteriores.

Problema

* En un extraño planeta a los habitantes les encanta la geometría, y solo saben andar describiendo medias circunferencias. Un grupo de amigos tiene que ir desde P hasta Q. La distancia de P a Q es 100 m (en línea recta). El primer amigo hace un único arco y el segundo decide hacer dos arcos, el primero de los cuales tiene radio 20 m.

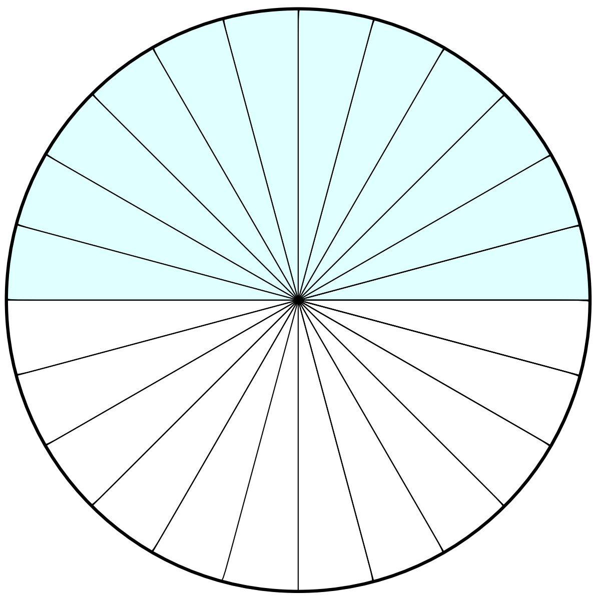
1. ¿Cuál de los dos recorre menos distancia?
2. ¿Sabrías llegar recorriendo menos distancia? (Moviéndote como ellos).

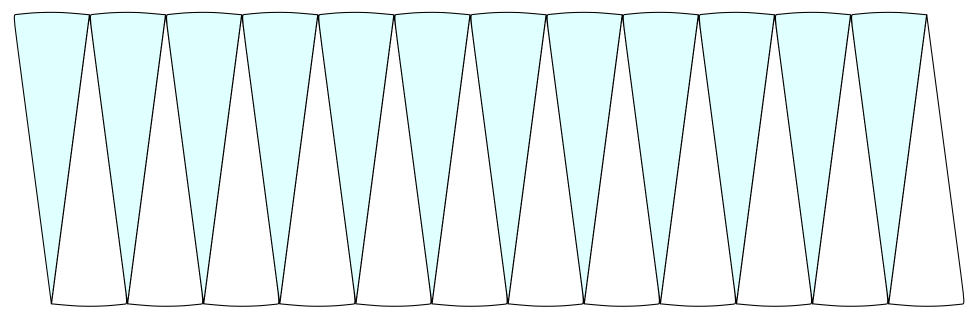


Área del círculo (p. 182)

* Vamos a ver tres opciones para deducir la fórmula del área del círculo.

Opción 1





$$h \approx r$$

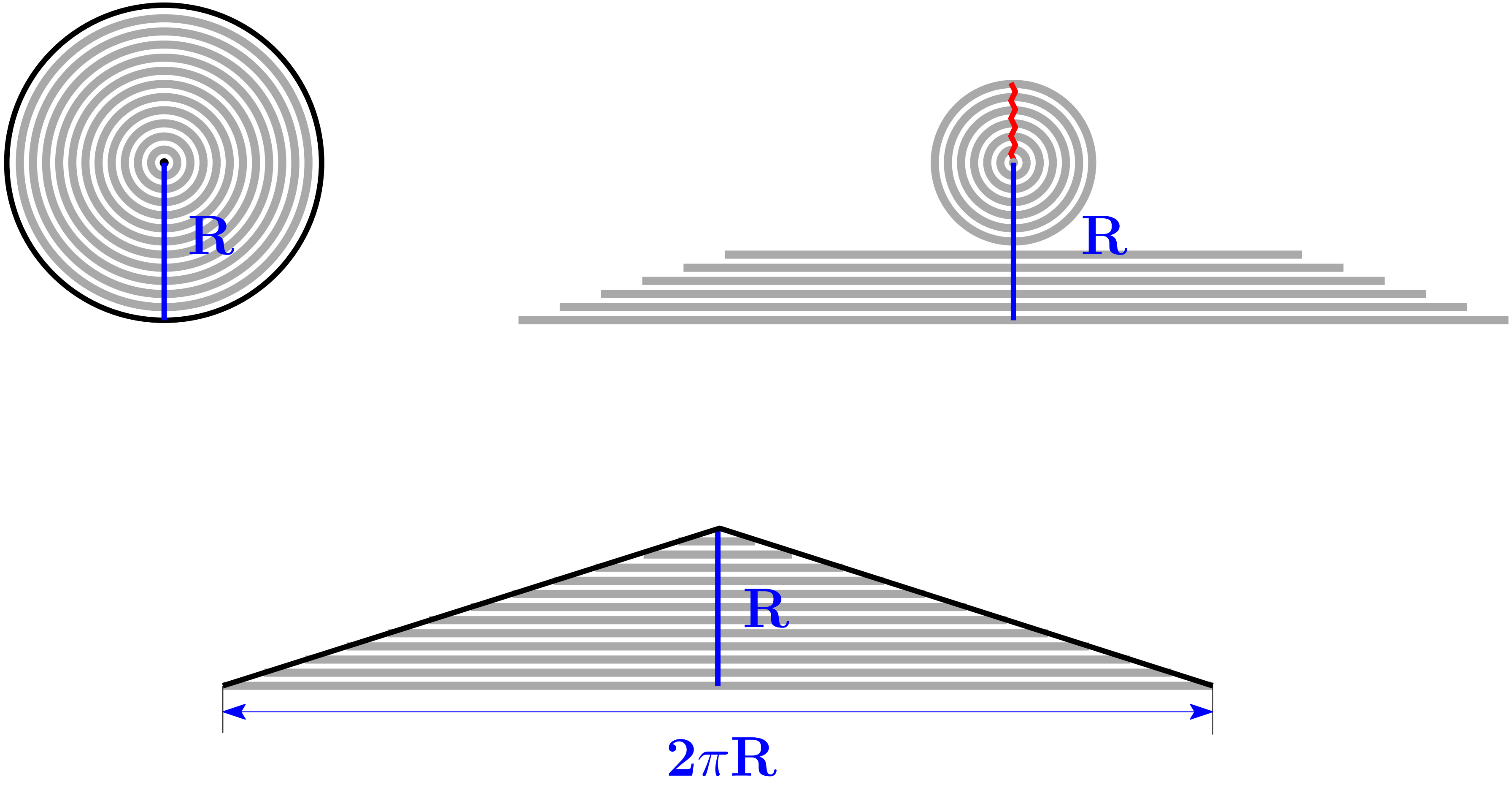
$$b \approx \pi r$$

"Aproximadamente" un paralelogramo

$$A = \pi r^2$$

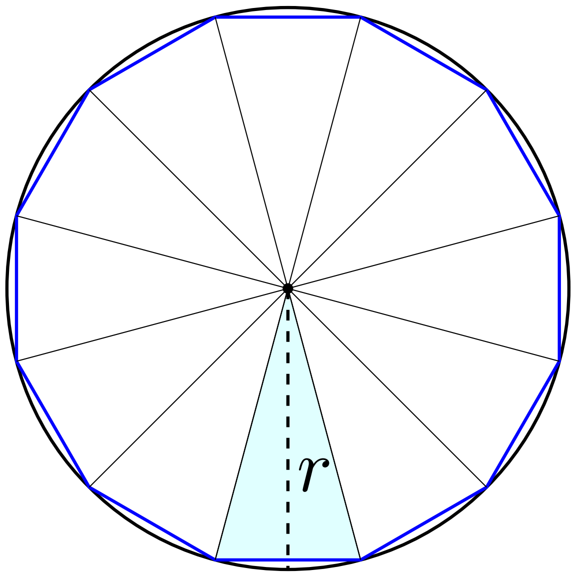
Área del círculo

Opción 2



Área del círculo

Opción 3



Aproximamos el círculo con un n-gono regular.

Área de un triángulo: $\frac{1}{2}\frac{2\pi r}{n}r$

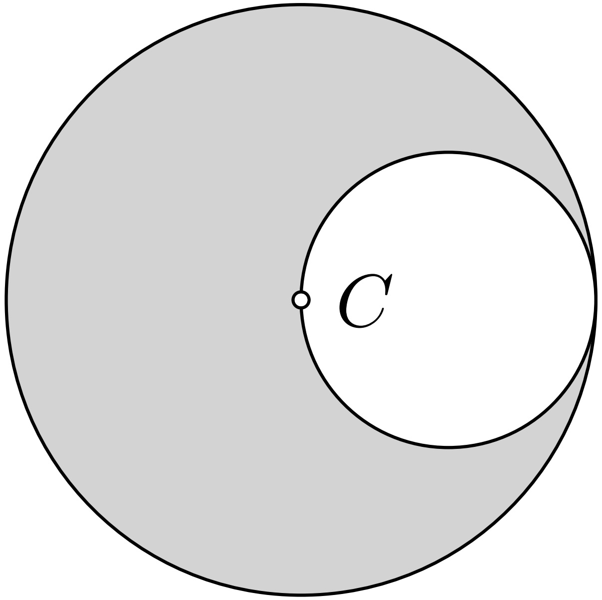
Aproximamos en área del círculo por el área de n triángulos y, “en el límite”, se tiene

$$A = \pi r^2$$

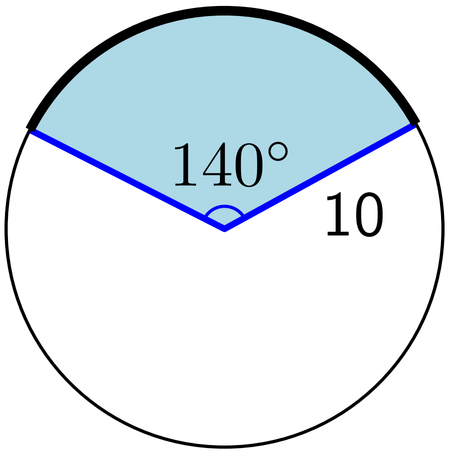
Problemas

- Calcula el área de la región comprendida entre un hexágono regular de lado 5 y la circunferencia que pasa por sus vértices.

- La figura muestra dos circunferencias tangentes. La mayor tiene centro en C y radio 4. Calcula el área de la región sombreada de forma exacta (en función de π).



Sectores circulares



* Un sector circular es la parte del círculo contenida en un ángulo central.

* Al igual que ocurría con los arcos de circunferencia, calcular el área de un sector circular es un problema sencillo de proporcionalidad (sin necesidad de ninguna fórmula adicional).

* Ejercicio:
  Considera un sector circular de amplitud 100° y radio 1. ¿Qué proporción de su área está formada por puntos a distancia mayor que $1/2$ del centro?

Cálculo con medidas aproximadas

* Supongamos que hemos medido la base y la altura de un rectángulo con una cierta aproximación. ¿Qué podemos decir de la aproximación que obtenemos para su área?

* El error absoluto en una medida es la diferencia entre el valor medido y el real.

  Ejemplo: la base de un rectángulo mide $10 \pm 0,2$ metros.

* En la práctica, el error absoluto sólo se puede estimar.

* Error relativo: $$\text{Error relativo} = \frac{\text{Error absoluto}}{\text{Valor medido}}$$

* En una báscula con una precisión de 50 kg. hemos pesado un elefante. El peso ha sido de 5700 kg. ¿Cuál es el error relativo del peso obtenido?

Cálculo con medidas aproximadas

* Supongamos que la base y la altura de un rectángulo miden, respectivamente, 3 y 5 metros. La precisión del instrumento de medida es de 1 cm.
  1. Calcula el error relativo en las medidas de los lados del rectángulo.
  2. Si calculamos el área con estas medidas, ¿cuál es el error absoluto que cometemos?
  3. ¿Y cuál es el error relativo para el área?