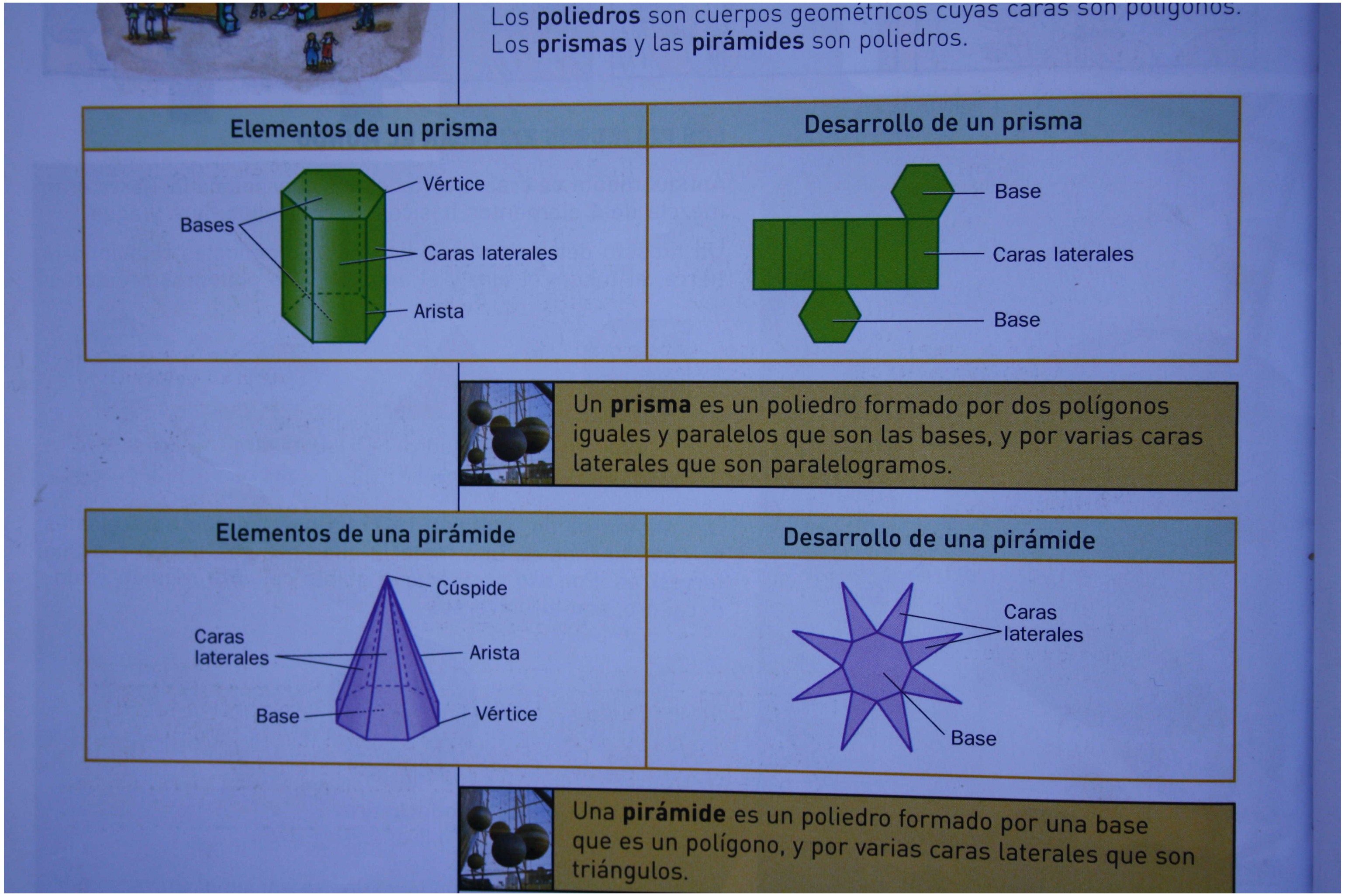
Tema 6: Geometría en dimensión 3

* Contenidos:
  1. Introducción.
  2. Poliedros.
  3. Volumen. Capacidad. Unidades.
  4. Volumen de sólidos básicos: prismas y cilindros.
  5. Volumen de pirámides y conos.
  6. Volumen de la esfera.
  7. Superficie.

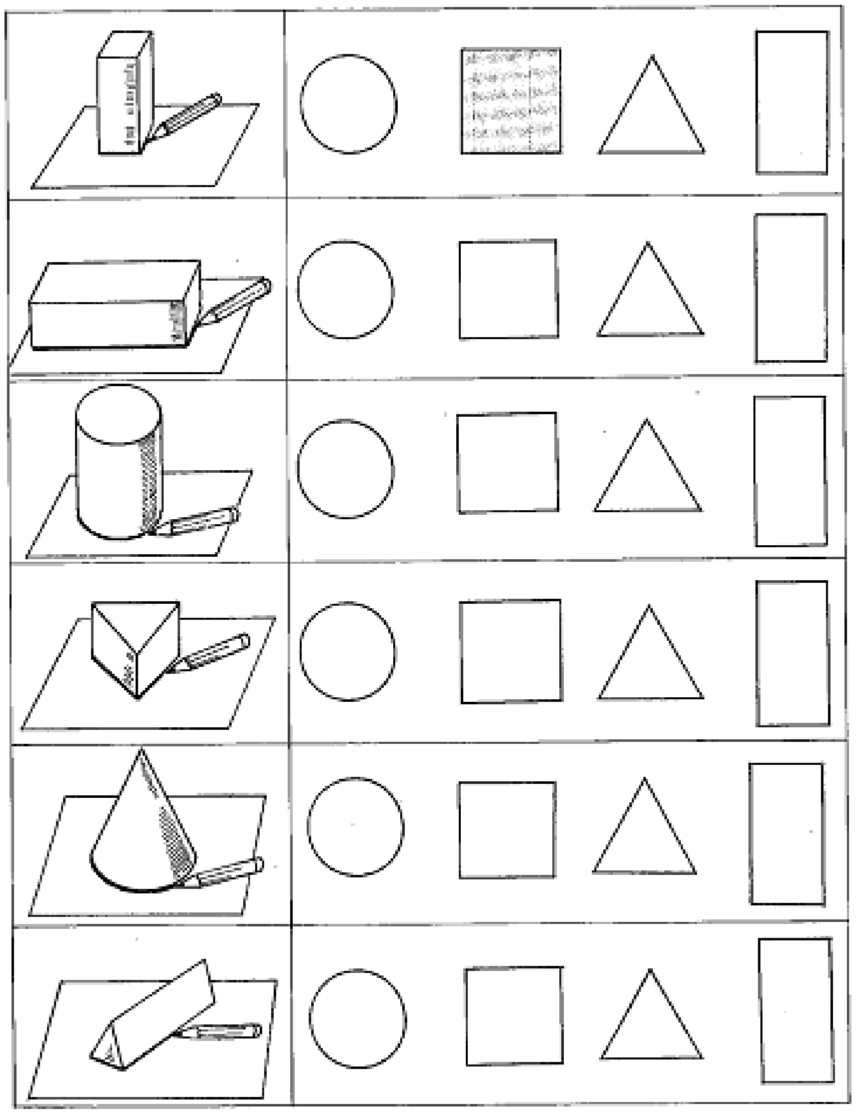
La situación en nuestras matemáticas de primaria

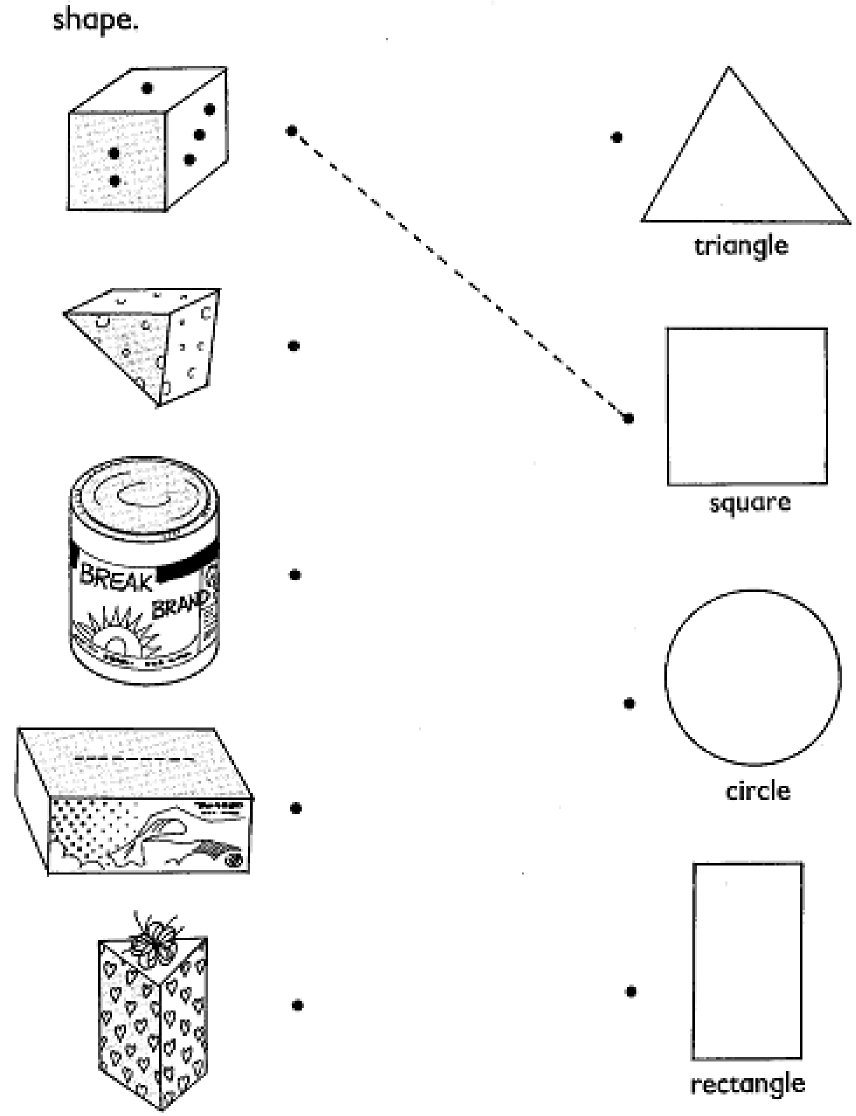
* Se estudia muy poco, básicamente terminología.



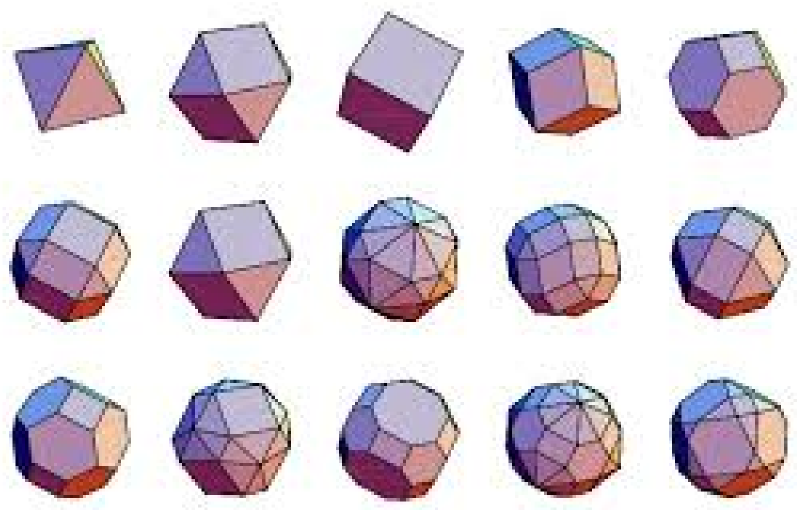
Un ejemplo de 6º de primaria

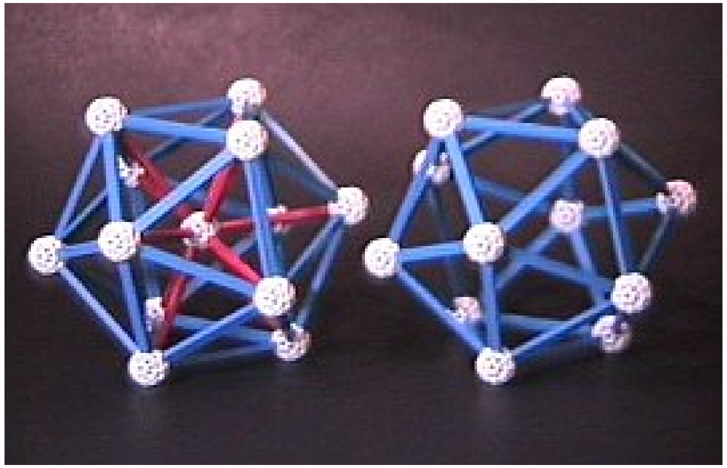
Un ejemplo de otros lugares ...





Poliedros





* En este tema, y especialmente en primaria, la componente manipulativa es esencial.

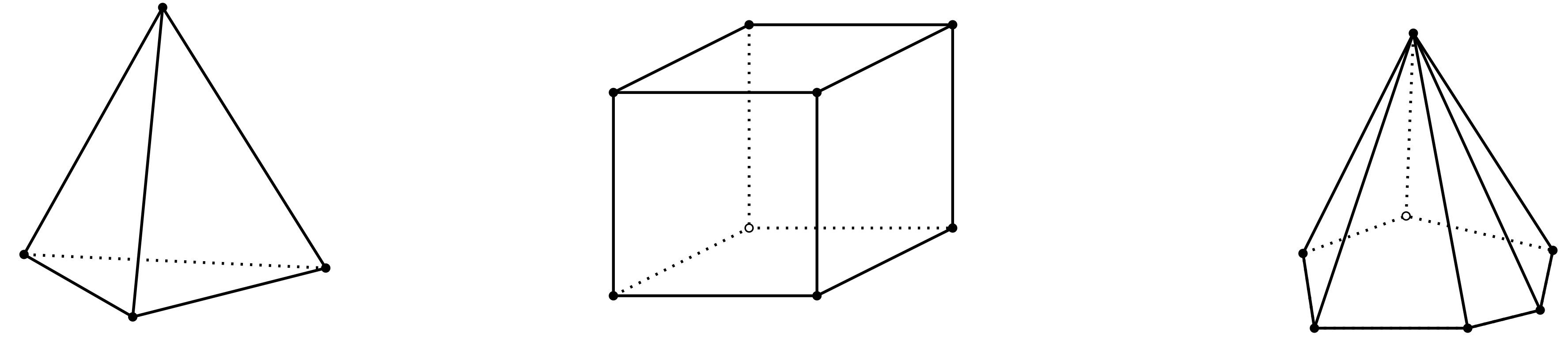
* En los últimos años han proliferado las herramientas para construir modelos físicos.
  - Venxmas: http://tinyurl.com/cdk34ds
  - Zometool: http://www.zometool.com

Una identidad básica

- ⋆ Tomemos un poliedro, y contemos su número de caras, C, su número de aristas, A, y su número de vértices, V.

  Siempre se verifica la fórmula de Euler:

$$C - A + V = 2$$



Poliedros regulares

∗ Los poliedros regulares (sólidos platónicos) han atraído la atención del hombre desde los orígenes de la civilización.

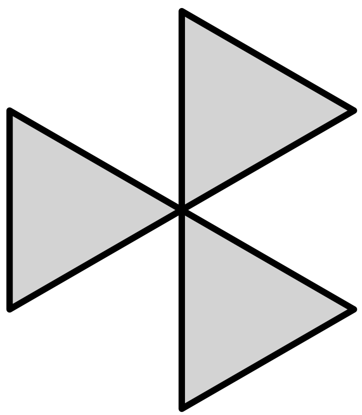
∗ Se dice que un poliedro es regular si todas sus caras son polígonos regulares (iguales) y todos sus vértices “son iguales” (los ángulos adyacentes son iguales).

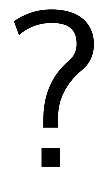
∗ Los griegos ya sabían que sólo existen 5 poliedros regulares (tetraedro, hexaedro, octaedro, dodecaedro, icosaedro).

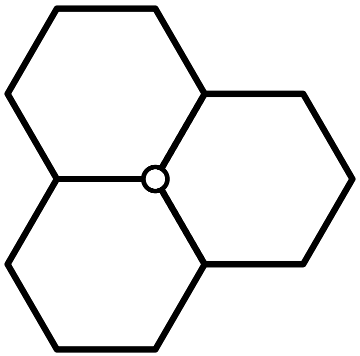
∗ ¿Por qué no puede haber más?

Poliedros regulares

* Las caras son polígonos (regulares) de n vértices.
  ¿Qué valores de n son posibles?







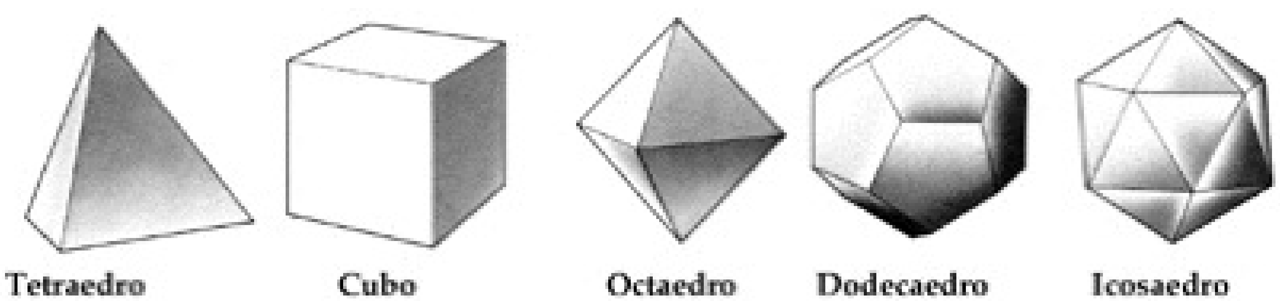
$n = 3$ $\quad n = 4 \quad n = 5 \quad$ $n = 6$

* Si en cada vértice coinciden k caras, ¿qué valores de k son posibles?

Poliedros regulares

* Si $n = 3$ (caras triangulares), tenemos:
  - $k = 3$, el tetraedro.
  - $k = 4$, el octaedro.
  - $k = 5$, el icosaedro.

* Si $n = 4$ (caras cuadradas), la única opción es $k = 3$, el hexaedro (cubo).
* Si $n = 5$ (caras pentagonales), la única opción es $k = 3$, el dodecaedro.



Recursos on-line

* Existen infinidad de recursos para ver (y manipular) poliedros.

  Para aprender más sobre poliedros regulares:

  "Los sólidos platónicos: historia de los poliedros regulares"

  Divulgamat: http://tinyurl.com/cfpaqdo

* Para ver poliedros
  http://tinyurl.com/cll63q4

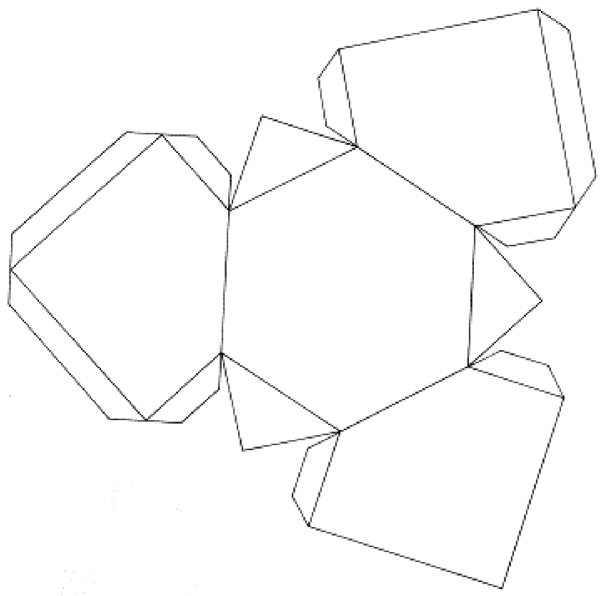
* Para ver y manipular objetos tridimesionales (Javaview)
  http://www.javaview.de/

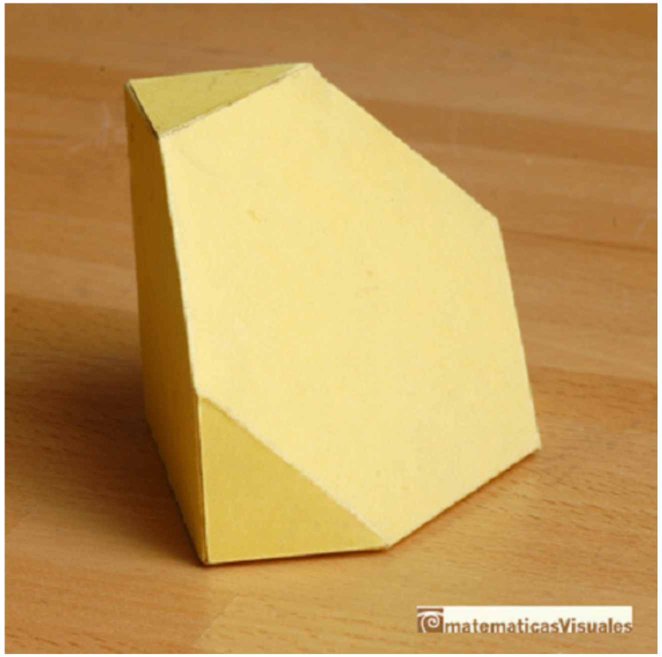
* Geogebra (y otras herramientas) han lanzado o están lanzando versiones 3D.

Desarrollos de poliedros

* De http://www.matematicasvisuales.com

  http://tinyurl.com/ooprmll





Volumen - Capacidad

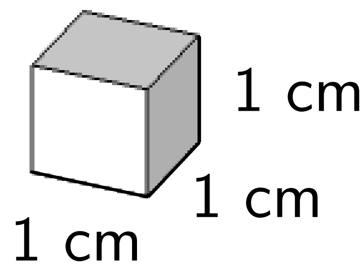
* La primera aproximación al concepto de volumen en el curriculum de primaria es a partir del concepto de capacidad, y sus correspondientes unidades: el litro, el centilitro, el mililitro.

  En el segundo ciclo (normalmente, en 4º curso).

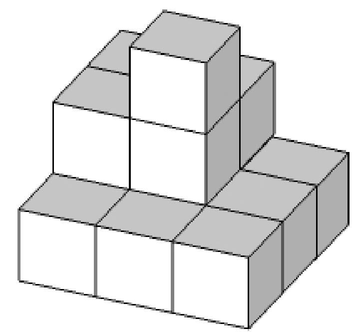
* Desde un punto de vista teórico, la distinción entre volumen y capacidad es, como mínimo, problemática.

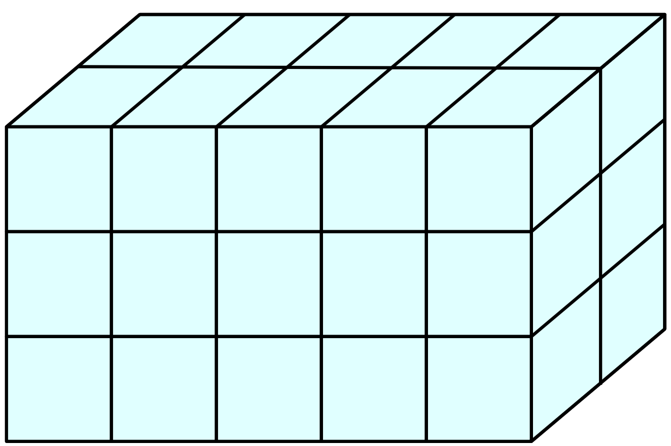
Volumen de sólidos

* En el tercer ciclo se introduce el volumen de "sólidos elementales".



$1\ \text{cm}^3$





El volumen de un ortoedro es el producto de sus dimensiones.

$$5 \times 2 \times 3$$

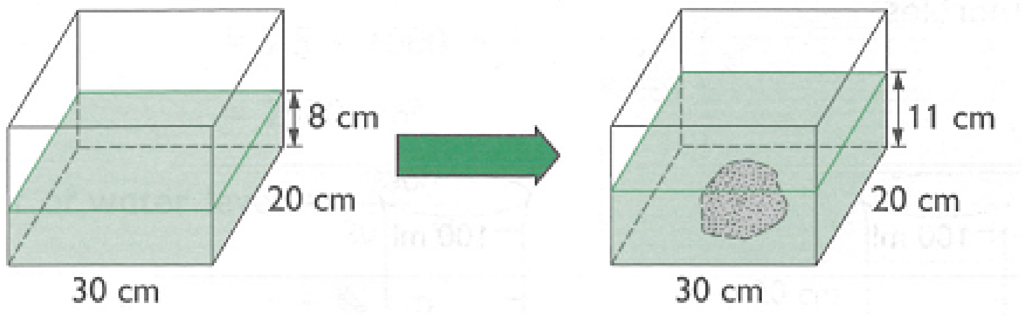
En castellano nos falta un término sencillo para estos sólidos. ¿Cuboide?

Volumen - Capacidad

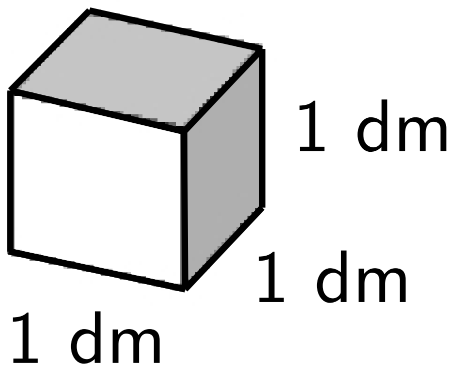
* Hay un salto conceptual entre la intuición del concepto capacidad (desarrollada al medir líquidos) y el volumen de un sólido.

¿Volumen? ¿Capacidad?

* La mejor opción para conectar los conceptos:



Unidades



$1\ \text{dm}^3 = 1$ litro ¿por qué?

1 litro de agua pesa 1 kg ¿por qué?

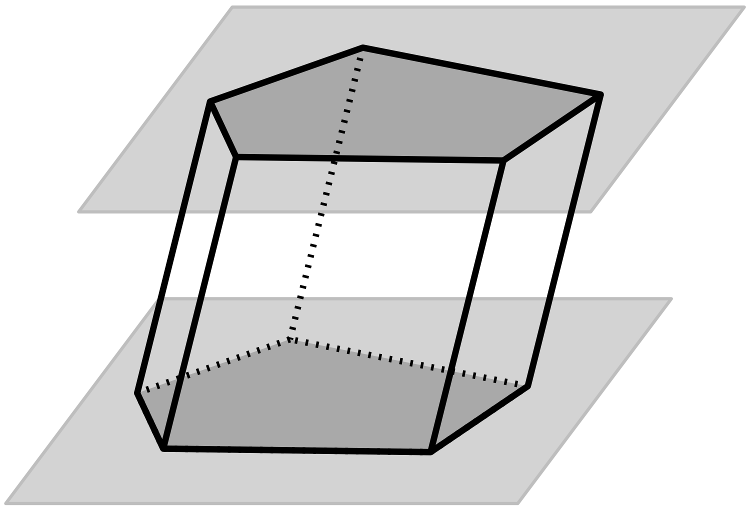
* $1\ \text{dm}^3 = 1$ litro $=$ $\boxed{}$ centilitros $=$ $\boxed{}$ cm^3

* $1\ \text{m}^3 =$ $\boxed{}$ litros

  $1\ \text{m}^3$ de agua pesa $\boxed{}$ kg

Prismas

* Un prisma es un sólido que se obtiene cuando un polígono se desplaza (de forma paralela) a lo largo de una recta.



* Las bases son los dos n-gonos congruentes que limitan el sólido.
* Las caras laterales son paralelogramos.
* Una arista lateral es una arista que une un vértice de una base con el correspondiente de la otra.

* Un prisma recto es un prisma cuyas aristas laterales son perpendiculares a la base.

  Si un prisma no es recto, se dice que es oblicuo.

Prisma

* Los prismas se nombran de acuerdo a si son rectos u oblicuos, y según sus bases.

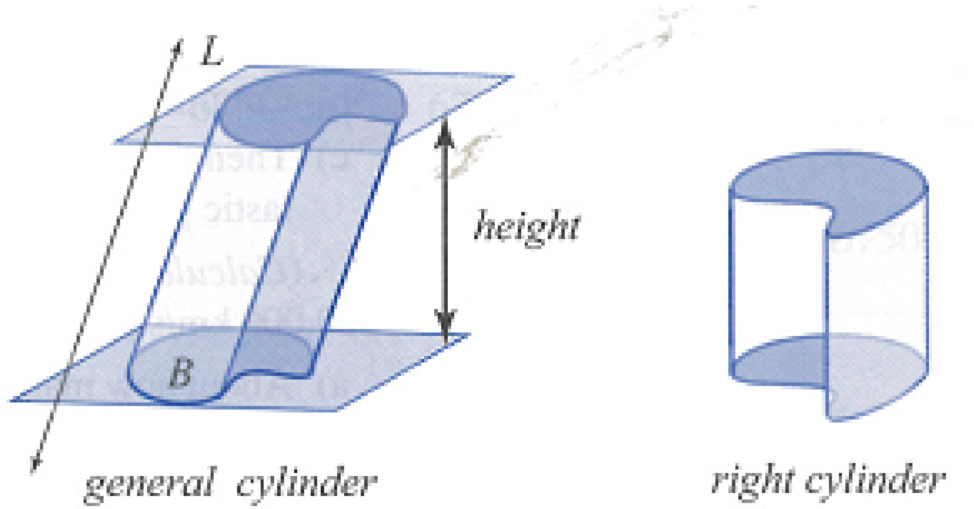
  Ejercicio: dibuja un prisma recto hexagonal y un prisma oblicuo triangular.

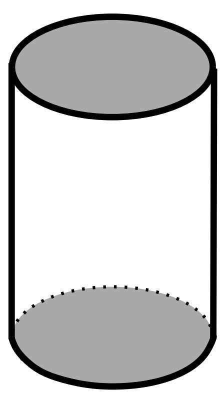
* Un paralelepípedo es un prisma cuyas bases son paralelogramos.

* Un ortoedro es un prisma rectangular recto.

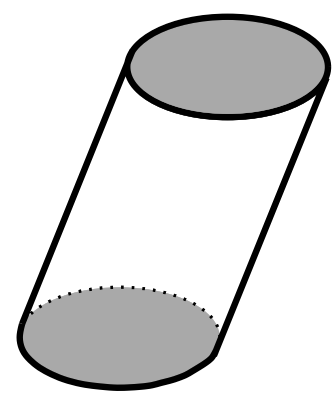
Cilindros

* Los cilindros generalizados se pueden definir por analogía con los prismas.





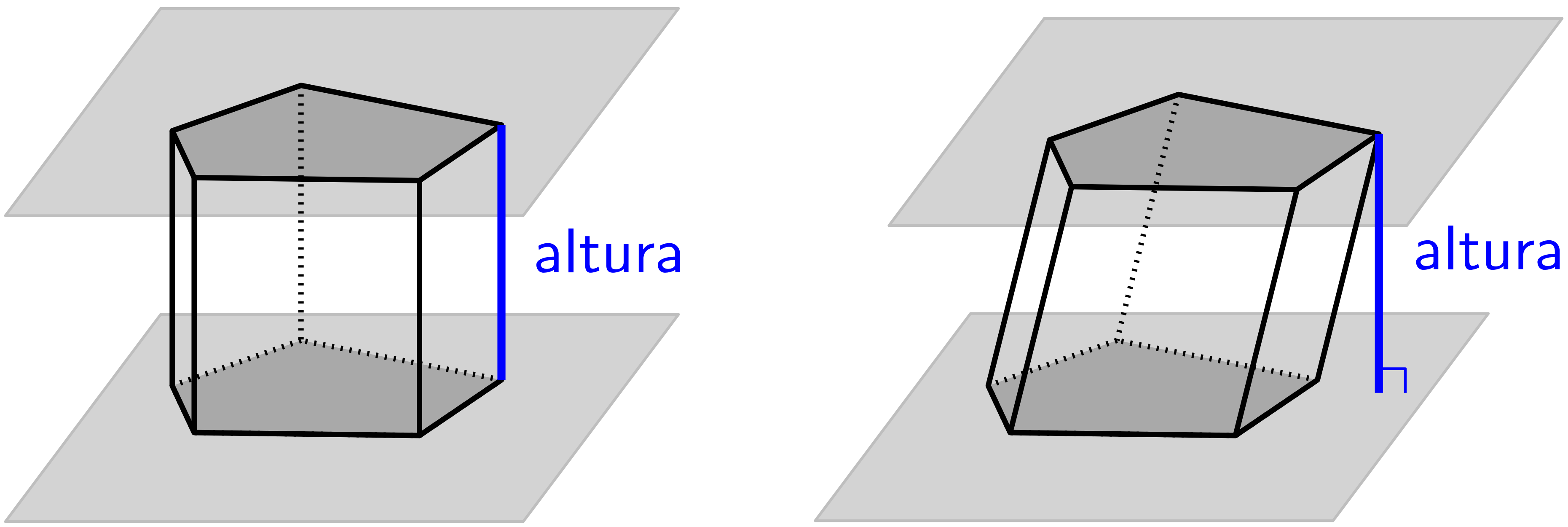
cilindro circular recto



cilindro circular oblicuo

Volumen de los prismas

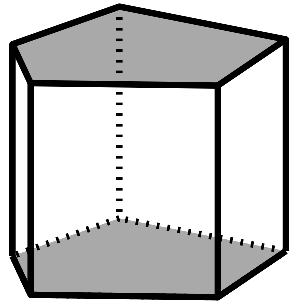
* La altura de un prisma es la distancia entre los planos que contienen a sus bases.



* Ojo: un error común es confundir la altura con la longitud de las aristas laterales en los prismas oblicuos.

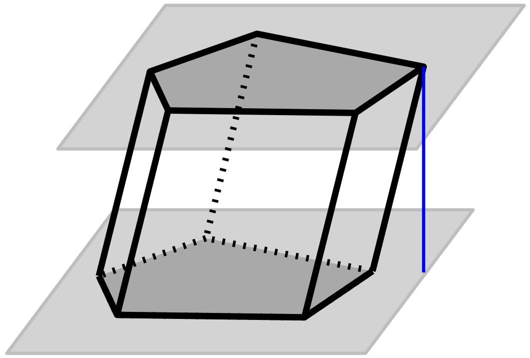
Volumen de los prismas

* Volumen de un prisma recto:



$$V = A_{\text{base}} \times \text{altura}$$

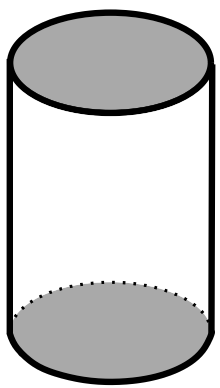
* Volumen de un prisma oblicuo:

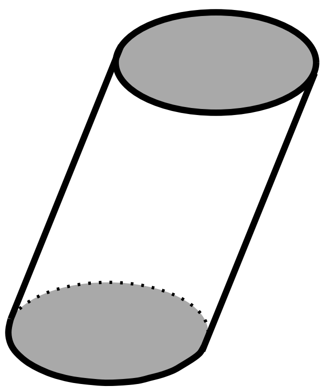


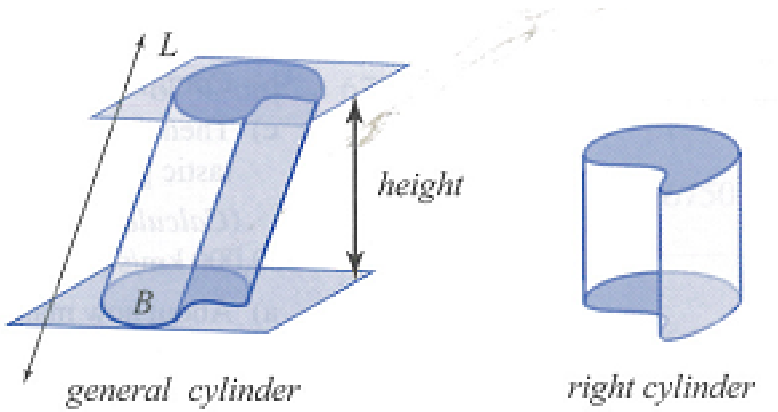
$$V = A_{\text{base}} \times \text{altura}$$

Volumen de los cilindros

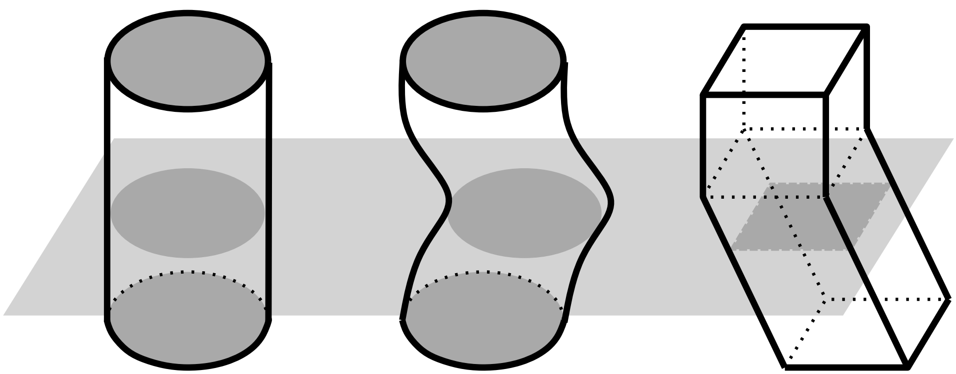
* La misma fórmula se generaliza para cilindros (rectos y oblicuos, circulares y generalizados).







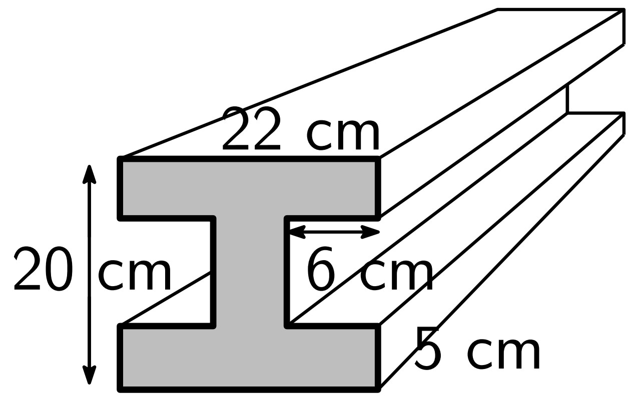
* Principio de Cavalieri



Si todas las secciones por planos paralelos de dos figuras tienen la misma área, las dos figuras tienen el mismo volumen.

Ejercicio

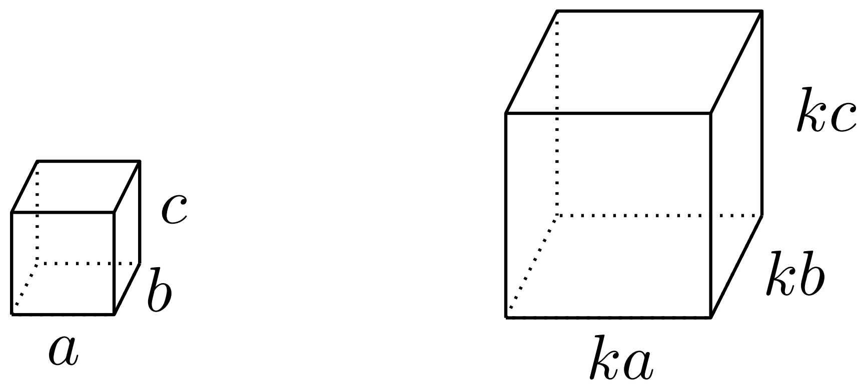
* En la figura se representa una viga con sección en forma de H. La sección es simétrica, tanto horizontal como verticalmente. La longitud de la viga es 3 m.
  1. Calcula el volumen de la viga en cm^3 y en dm^3.
  2. Si la viga es sólida y está fabricada con un acero de densidad $7'75$ gr/cm^3, calcula su peso en kilos.



Volumen de sólidos semejantes

* Ya vimos la relación entre el área de dos figuras semejantes, con razón de semejanza k.

  ¿Qué ocurre con el volumen?



$V = abc$ $\qquad$ $V = k^3abc$

Volumen de sólidos semejantes

* Esto es algo que se podría trabajar, de forma experimental, en primaria. Por ejemplo, con el calibre y el peso de la fruta.

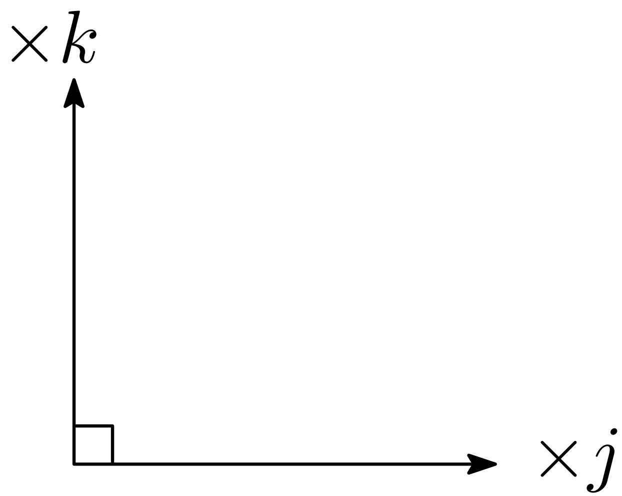
* Que el volumen aumente con el cubo de la razón de semejanza hace que la intuición nos pueda traicionar.

  Problema: ¿Cuál es el volumen de la humanidad?

* Una civilización extraterrestre nos ataca, y quiere hacer una fosa en la que pueda enterrar a toda la humanidad. Si quiere hacerla en un terreno cuadrado de lado 1 km, ¿qué profundidad es necesaria?

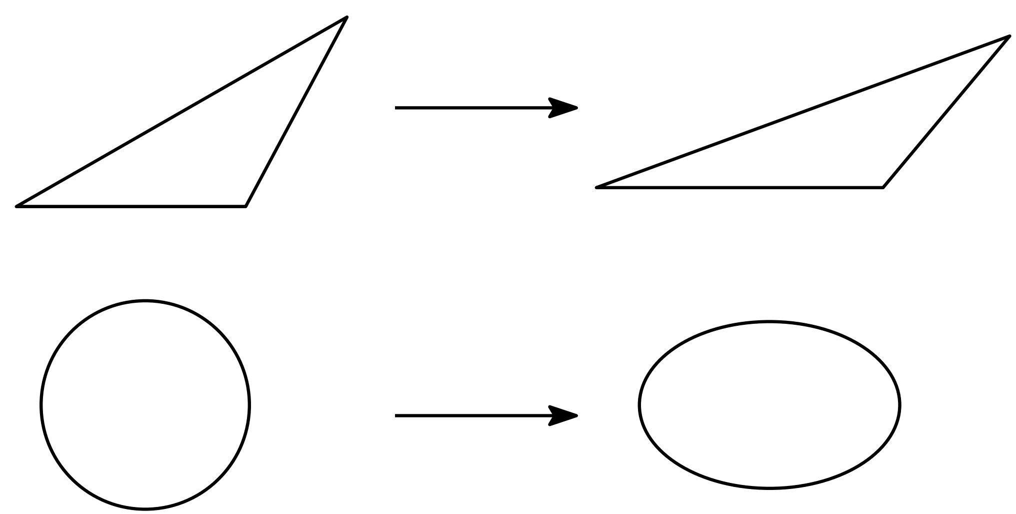
Un principio más general para el área y el volumen

* Consideramos ahora un cambio más general que la semejanza: la proporción es j en una dirección, y k en la dirección perpendicular.



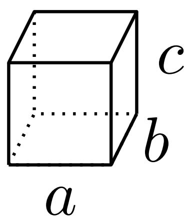
$$A = ab \qquad A' = jkab = jkA$$

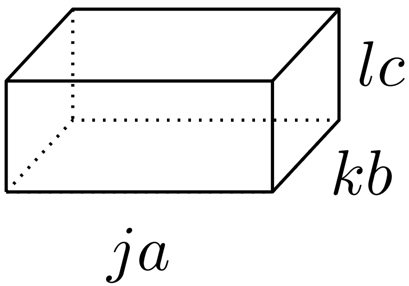
* Este principio se generaliza a cualquier figura.



Un principio más general para el área y el volumen

* El principio se generaliza a volúmenes. (Ahora podemos tener 3 factores de escala, uno para cada dirección).



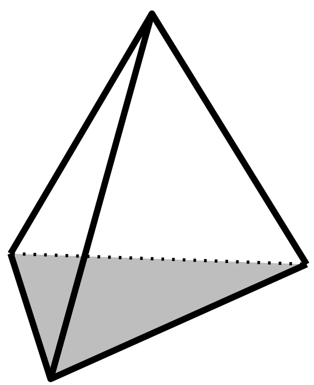


$V = abc$ $\qquad$ $V = jkl\,abc$

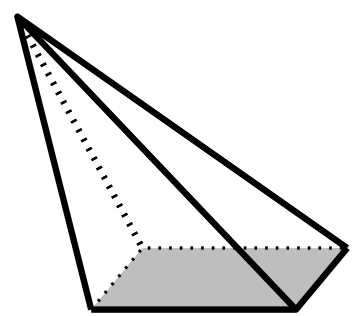
* Ejercicio: en un cilindro circular recto el radio de la base aumenta un $10\,\%$ y la altura disminuye un $10\,\%$. ¿Cómo cambia el volumen?

Pirámides

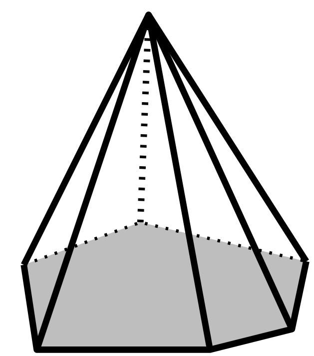
* Consideremos un polígono (la base) y un punto fuera del plano que contiene al polígono (el vértice). Una pirámide es el sólido limitado por la base y los triángulos definidos por el vértice y las aristas de la base.



pirámide
triangular



pirámide
cuadrangular



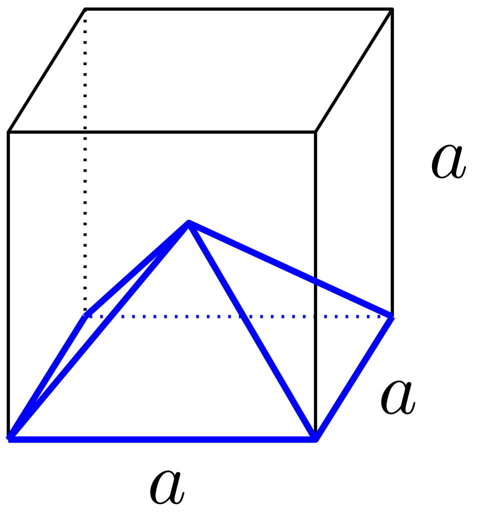
pirámide
hexagonal

* La altura de una pirámide es la distancia entre el vértice y el plano de la base.

El volumen de las pirámides

* Sencillo en este caso particular:

$$V = \frac{1}{6}a^3$$

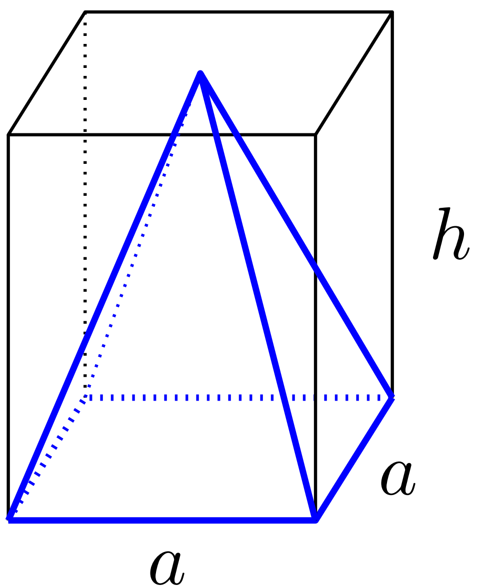


* Ahora consideramos altura h (sin cambiar la base):

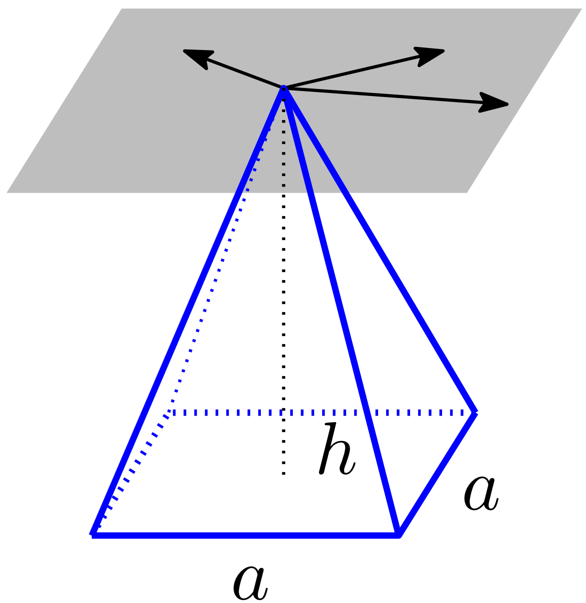
Altura: $\frac{a}{2} \to h$

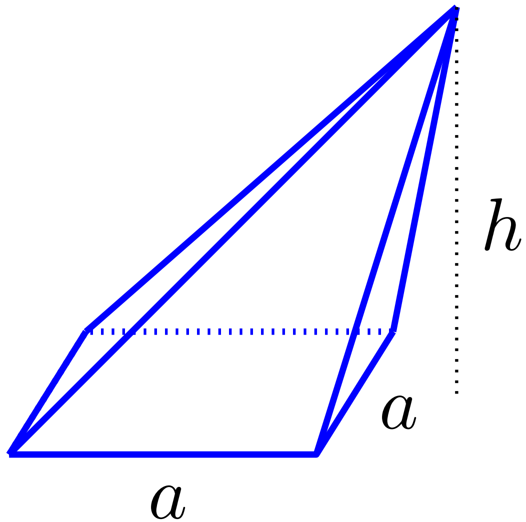
(el volumen es un tercio del volumen del prisma)

$$\boxed{V = \frac{1}{3}a^2 h}$$



El volumen de las pirámides



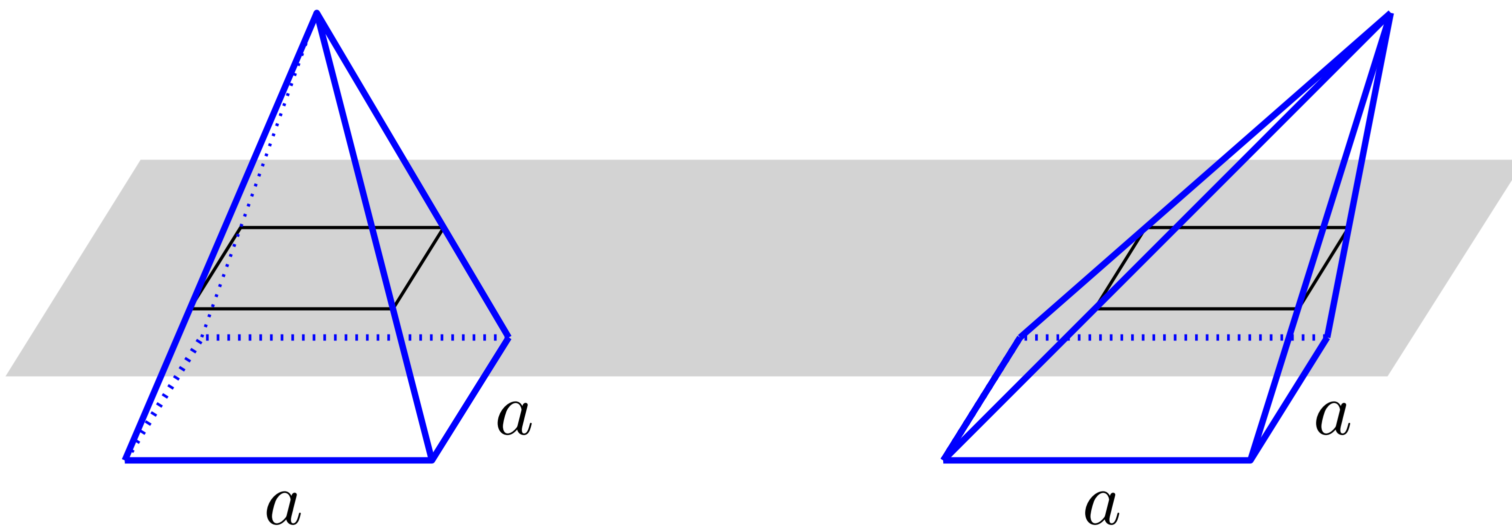


* Si movemos el vértice en un plano paralelo a la base (la altura no cambia), el volumen es el mismo.

* Esto es una consecuencia del Principio de Cavalieri y de la siguiente observación:

El volumen de las pirámides

* Si una pirámide (recta u oblicua) se corta por un plano paralelo a la base, el polígono que se obtiene es semejante a la base, y la razón de semejanza depende sólo de la altura del plano.



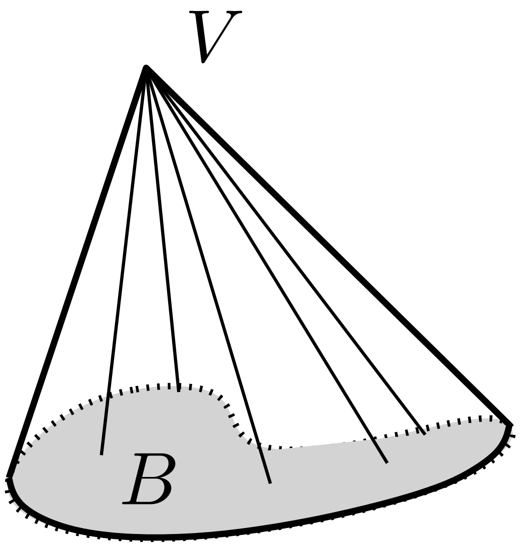
* Hemos deducido que, para cualquier pirámide cuadrangular,

$$V = \frac{1}{3} A_b \, h$$

Pirámides y conos

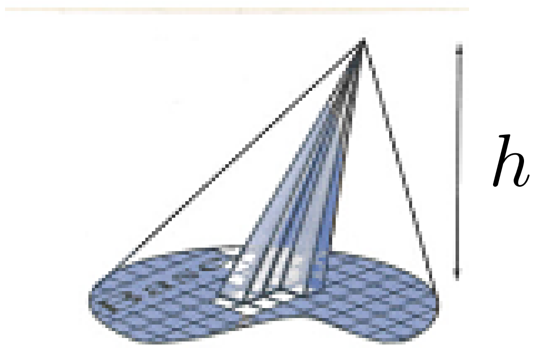
* Conocido el volumen de las pirámides cuadrangulares, es fácil deducir el volumen de cualquier pirámide, y también de los conos generalizados.

* Dada una región B del plano y un vértice V fuera del plano, el cono generalizado de base B y vértice V es el conjunto de segmentos que unen V con puntos de B.



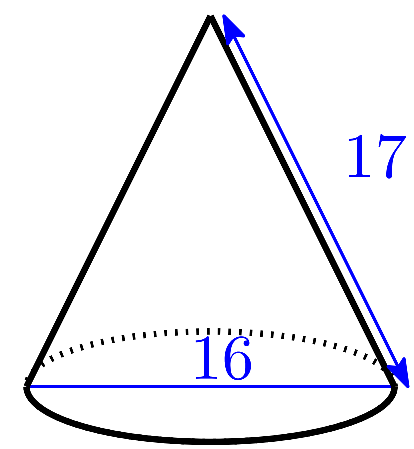
* El volumen de cualquier pirámide o cono generalizado es

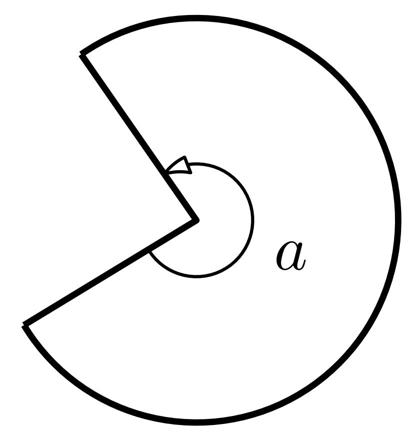
$$\boxed{V = \frac{1}{3} A_b \, h}$$



Ejercicio

* En el cono circular recto de la figura el diámetro de la base es 16 cm, y la distancia desde el vértice hasta un punto de la circunferencia de la base es 17 cm. Calcula el volumen y el área lateral del cono.

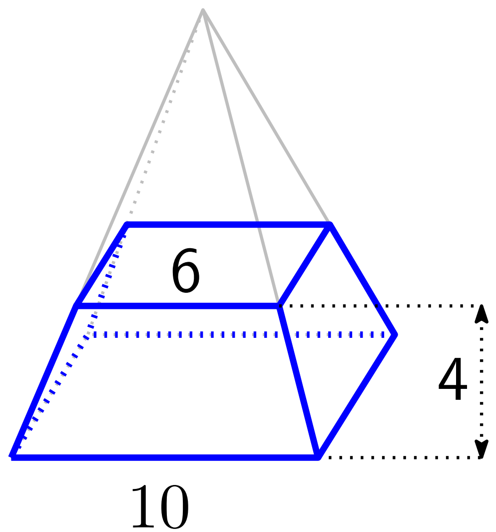




Troncos de pirámide y de cono

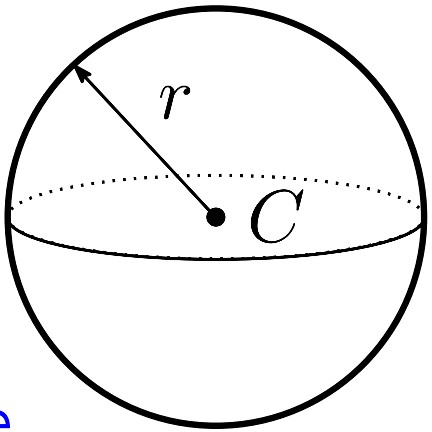
- Un tronco de pirámide es la parte de una pirámide delimitada por la base y un plano paralelo a ella. La definición para tronco de cono es análoga.

- Calcula el volumen y el área lateral del tronco de cono de la figura, sabiendo que se trata de una pirámide cuadrangular recta (el vértice está en la vertical del centro del cuadrado).



La esfera

- Definición: Consideremos un punto del espacio C y una distancia r. La esfera con centro C y radio r es el conjunto de puntos que están a distancia r de C.



- Esta definición es de la esfera como superficie. Tenemos un problema de terminología en castellano, nos falta una palabra para la esfera como sólido.

- Desde el punto de vista matemático, es la misma definición que para la circunferencia.

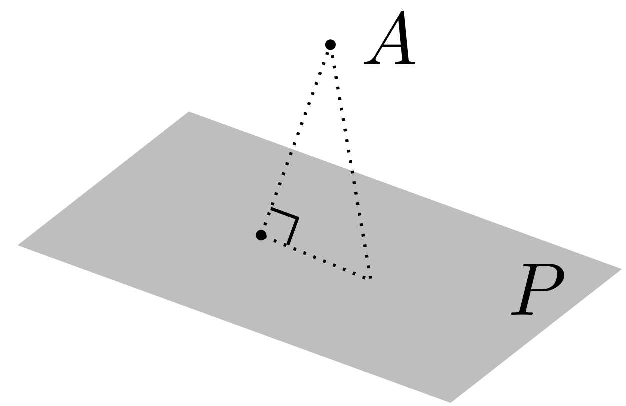
  Introducirla de manera adecuada en primaria es más complicado.

- Una primera actividad: nos dan una esfera. ¿Cómo podemos medir su radio?

Planos y esferas

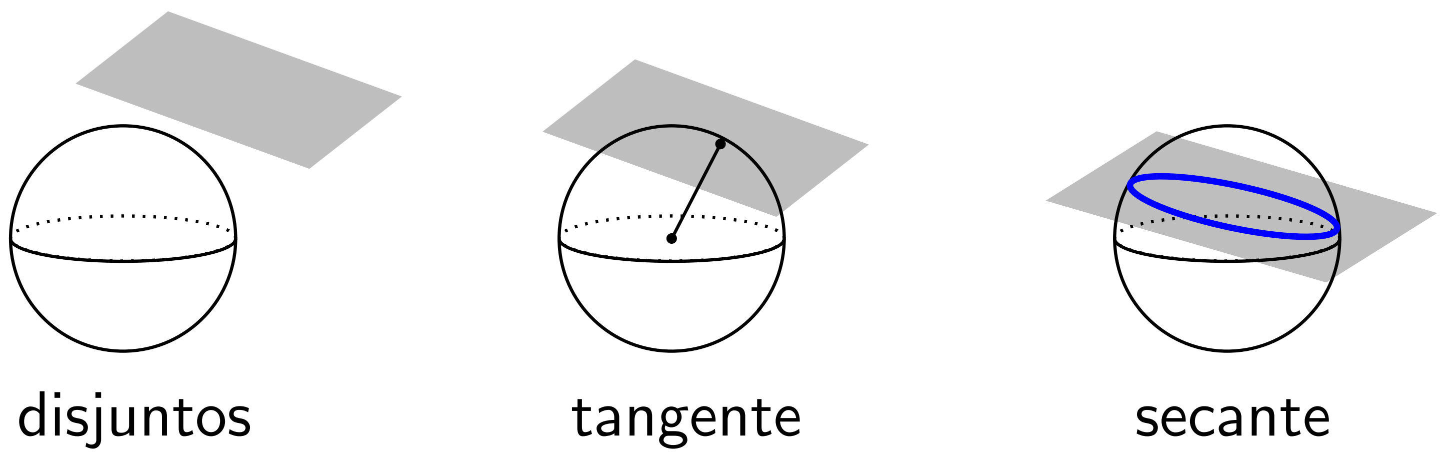
* Distancia de un punto a un plano:

  Dado un plano P y un punto A fuera de él, la distancia de A a P es la distancia entre A y el punto de P más cercano a A.



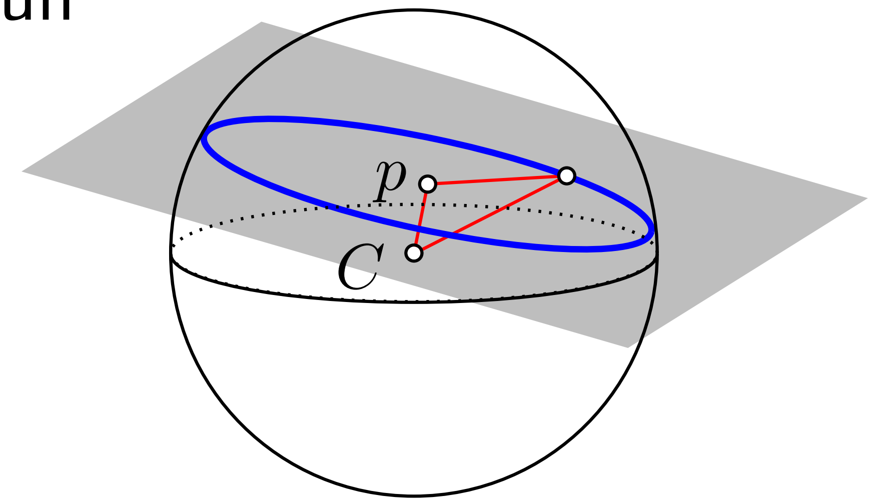
* El punto a distancia mínima está definido por la perpendicular.

* Plano y esfera: posiciones relativas



Planos y esferas

* La intersección de una esfera y un plano es una circunferencia.

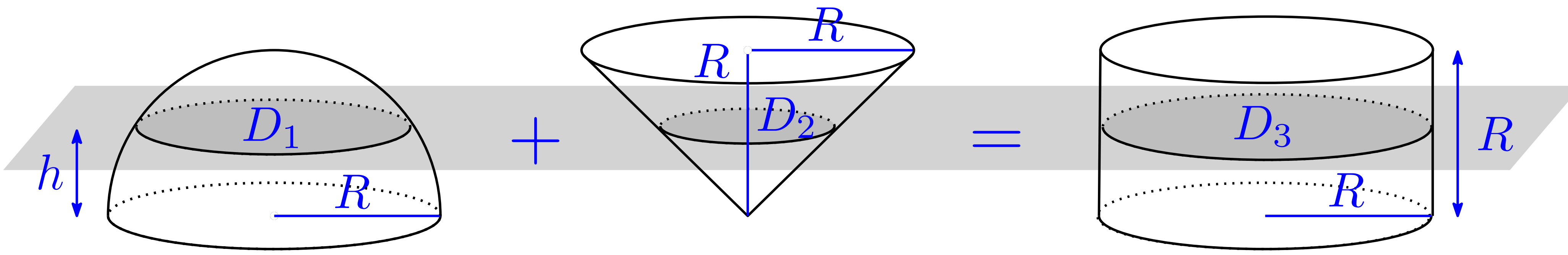


* Distancias en la esfera:

* Dos posibles actividades:
  1. un globo terráqueo y un hilo.
  2. http://tinyurl.com/29yxh8p

Volumen de la esfera (sólida)

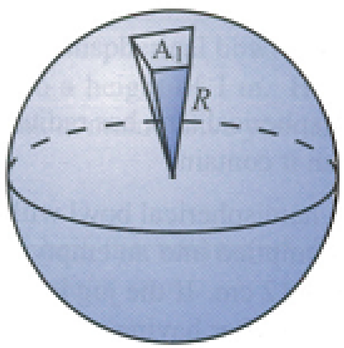
* Arquímedes ($\approx$ 250 a.c.)

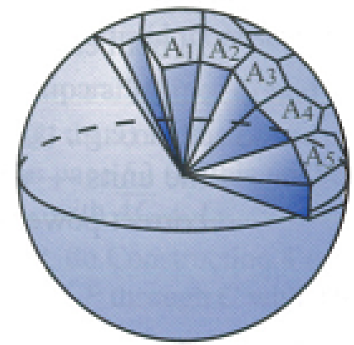


$$A(D_1) + A(D_2) = A(D_3)$$

* Volumen de la esfera: $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3$

Superficie de la esfera





$$V_{\text{cono}} \approx \frac{1}{3} A_{\text{base}}\, R$$

$$V_{\text{esfera}} = V_{c_1} + V_{c_2} + \ldots$$

$$\text{Área}_{\text{esfera}} = 4\pi R^2$$

- En los libros suelen aparecer muchas más fórmulas: superficies laterales de prismas y pirámides, volúmenes de pirámides y conos truncados ...
- No las utilizaremos. **No se podrán usar**

Problemas

* Un gramo de agua forma una gota en forma de esfera. ¿Cuál es su superficie?

* Tenemos un vaso cilíndrico de radio 8 cm lleno de agua hasta la mitad. Ponemos dentro una esfera que se hunde completamente, y observamos que el nivel del agua ha subido 2 cm. ¿Cuál es la superficie de la esfera?