

Tema 7: Introducción a la probabilidad

* A veces, la probabilidad es **poco intuitiva**.

(1) El problema de Monty Hall
(El problema de las tres puertas)

(2) El problema del cumpleaños.

Hay n personas en una habitación (las personas están elegidas al azar). Ahora apostamos a que hay al menos dos personas que cumplen años el mismo día.

¿Para qué valores de n apostarías a favor o en contra de este hecho?

Bastante bien explicado aquí:

<http://www.estadisticaparatodos.es/taller/cumpleanos/cumpleanos.html>

$$n = 23, P \approx 50'7\% \quad n = 30, P \approx 70'6\% \quad n = 40, P \approx 89.1\%$$

Introducción a la probabilidad

- * La **probabilidad** se ocupa del estudio de **experimentos aleatorios**.

No se puede predecir el resultado del experimento, pero sí se pueden decir cosas sobre conjuntos de experimentos.

- * Ejemplos:

- a) lanzar una moneda al aire.
- b) lanzar un dado al aire.
- c) lanzar dos dados y sumar los puntos.

- * El conjunto de posibles resultados se llama **espacio muestral**.

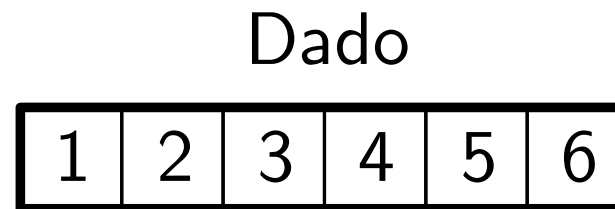
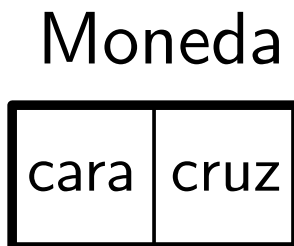
Un ejemplo

- * Tenemos tres bolas en una urna, de colores blanco, negro y rojo. Sacamos una bola al azar, la devolvemos a la urna, y sacamos otra.
¿Cuál es la probabilidad de haber sacado una bola negra al menos una de las veces?
- * Se pueden considerar espacios muestrales distintos.

Modelos de probabilidad

- * Un **modelo de probabilidad** es una asignación de probabilidades a cada uno de los posibles resultados del experimento, de manera que la suma total sea 1. (Si damos la probabilidad en %, la suma debe ser 100).
- * Una forma intuitiva de representar modelos de probabilidad es el **modelo de áreas**.

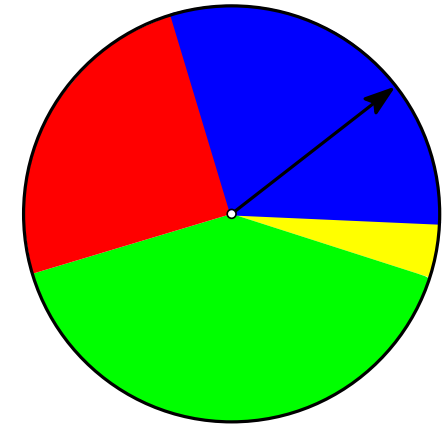
El espacio muestral se representa como un rectángulo, dividido en los posibles resultados. El área de cada posible resultado es proporcional a su probabilidad.



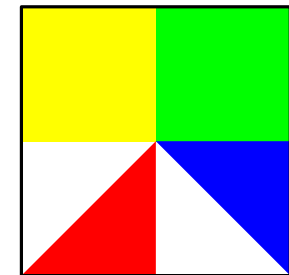
Modelo de áreas

* Es la vía para generalizar la probabilidad a experimentos con infinitos posibles resultados.

* ¿De qué depende la probabilidad de que la aguja se pare en cada una de las regiones en la ruleta de la figura?



* Elegimos un punto al azar en el cuadrado de la figura. ¿Cuál es la probabilidad de que sea rojo?



* Se trata de un modelo matemático. Cómo se podría hacer esto en la práctica, es otra cuestión ...

Sucesos

- * Un suceso es un conjunto de posibles resultados.

Definiciones básicas:

1. **Suceso elemental**: formado por un único resultado.
 2. **Suceso seguro**: formado por todos los posibles resultados.
 3. **Suceso complementario (o contrario)** de un suceso A : es el que ocurre cuando no ocurre A .
Se denota A^c , \bar{A} o A' .
- * Tiramos 5 monedas al aire y consideramos el espacio muestral “número de caras que se obtienen”.
- Da ejemplos de suceso elemental, suceso seguro y suceso complementario.

Operaciones con sucesos

* Operaciones con sucesos:

★ $A \cup B$ (A unión B). Es el que ocurre cuando ocurre alguno de los dos (pueden suceder los dos).

★ $A \cap B$ (A intersección B). Es el que ocurre cuando ocurren los dos.

* Lanzamos un dado y consideramos los sucesos:

$A \equiv$ “sale un número par” $B \equiv$ “sale un múltiplo de 3”

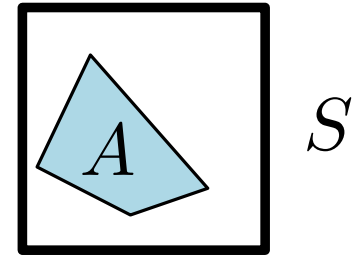
Determina los siguientes sucesos y calcula sus probabilidades:

a) B^c b) $A \cup B$ c) $A \cap B^c$

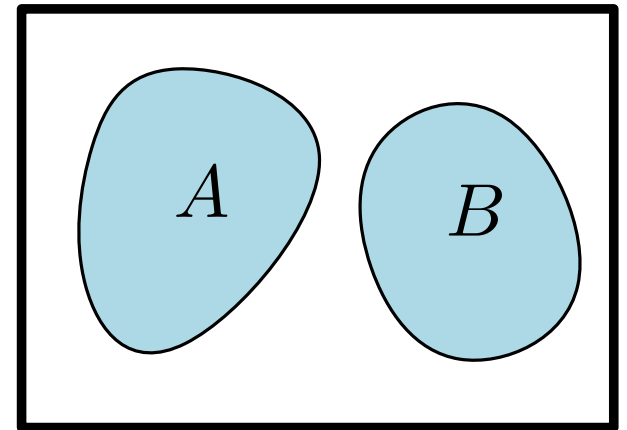
Propiedades de la probabilidad

* $0 \leq P(A) \leq 1$

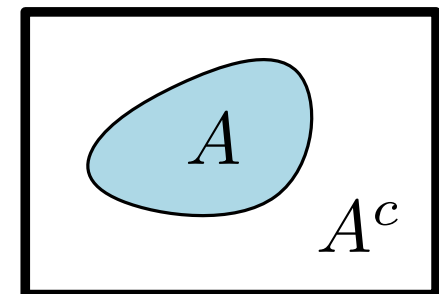
* Si S es el suceso seguro, $P(S) = 1$



* Si $A \cap B = \emptyset$ (sucesos **disjuntos**),
 $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$



* $P(A) + P(A^c) = 1$



Fórmula de Laplace

- * **Fórmula de Laplace:** Nos dice las probabilidades de los sucesos de experimentos con n posibles resultados, **todos igualmente probables**.

$$P(A) = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}}$$

- * Ejemplo: tenemos una bolsa con 2 bolas blancas y 3 bolas negras. Extraemos una bola al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que sea blanca?
- * De la misma bolsa ahora extraemos dos bolas (sin reemplazamiento).
¿Cuál es la probabilidad de que las dos sean negras?
- * Opciones: diagrama de árbol, enumeración del espacio muestral, modelo del rectángulo para asignar probabilidades.

Ejercicios

- * Tiramos dos dados y sumamos los resultados.
 1. ¿Cuál es la probabilidad de que la suma sea 7?
 2. ¿Cuál es la probabilidad de que la suma sea distinta de 6?

- * Tiramos 4 monedas al aire.
 1. ¿Cuál es la probabilidad de sacar tres caras?
 2. ¿Cuál es la probabilidad de sacar al menos una cruz?

- * Tenemos 2 bolas rojas y 3 bolas blancas en una urna, y las vamos sacando, sin reemplazamiento. Quieres apostar por el momento en el que sale la primera bola roja. ¿Por qué extracción apostarías?

Ejercicio

- * Lanzamos dos dados, uno rojo y otro azul, y consideramos los sucesos:

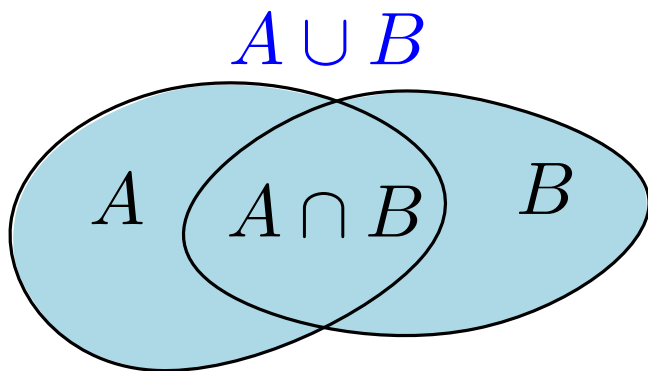
$A \equiv$ “en el dado rojo sale al menos un 4”

$B \equiv$ “en el dado azul sale al menos un 5”

- ★ Determina los sucesos $A \cup B$ y $A \cap B$.
- ★ Calcula $P(A \cup B)$ y $P(A \cap B)$.
- ★ Comprueba que $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$



Se cumple siempre y se conoce como **principio de inclusión-exclusión**.



Sucesos independientes

- * Se dice que los sucesos A y B son **independientes** si conocer información sobre uno no cambia la probabilidad del otro.
- * Ejemplo: dos tiradas de un dado.
- * En ocasiones la independencia puede no estar tan clara: Tiramos un dado rojo y otro azul y consideramos los sucesos
 - $A \equiv$ “en el dado rojo sale un número par”
 - $B \equiv$ “la suma es impar”¿Son A y B sucesos independientes?

Sucesos independientes: Principio del producto

- * Nos centraremos en sucesos independientes en que la independencia está clara, y la usaremos para calcular probabilidades utilizando el

Principio del producto: Si los sucesos A y B son independientes, entonces

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

(Esto también se puede tomar como definición)

- * Ejercicio: Hacemos tiradas sucesivas de un dado.
 1. ¿Cuál es la probabilidad de no sacar ningún 6 si lo tiramos 2 veces? ¿Y si lo tiramos k veces?
 2. ¿Cuál es la probabilidad de sacar al menos un 6 si lo tiramos k veces?

Ejercicios

- * **Ojo:** Un error muy frecuente es confundir **sucesos disjuntos** con **sucesos independientes**.

Ejemplo: Tiramos un dado rojo y otro azul y definimos los sucesos

$A \equiv$ “sale el mismo número en los dos dados”

$B \equiv$ “sale un 4 en el dado rojo”

$C \equiv$ “la suma de los resultados es impar” .

Considera los sucesos por parejas y estudia si son disjuntos o independientes.

Ejercicios

- * Te proponen la siguiente apuesta:
De una baraja española de 40 cartas extraemos una carta al azar. Te dicen que la carta es una figura o es del palo de oros. ¿Apostarías a favor, o en contra?
- * Hacemos dos veces el experimento de tirar dos dados y sumar los resultados.
¿Cuál es la probabilidad de sacar 7 al menos una vez?
- * Tenemos una caja con 7 bolas blancas y 3 bolas negras. Extraemos dos bolas al azar (sin reemplazamiento). Considera el suceso
 $A \equiv$ “al menos una de las bolas es negra”
¿Apostarías a favor o en contra de A ?

Un comentario sobre aplicaciones de la estadística

- * La estadística tiene innumerables aplicaciones.
- * Un ejemplo muy sencillo: estimación del número de peces en un estanque.
 1. Pescamos 20 peces, les hacemos una marca y los devolvemos al estanque.
 2. Al día siguiente, volvemos al estanque y pescamos 50 peces. Si hay 4 que tienen la marca, ¿cuántos peces dirías que hay en el estanque?
- * Es la técnica mas sencilla de estimación de poblaciones. Se conoce como método de **captura y recaptura**.
- * Por supuesto, se trata de una **estimación**. Estudiar cómo de fiable es esa estimación bajo diversos supuestos es uno de los temas de la estadística avanzada.