Estonia 2023

Tomado de https://harno.ee/eksamid-testid-ja-uuringud/eksamid-testid-ja-lopudokumendid/riigieksamid#materjalid

Primera parte

Instrucciones:

1. Resuelve las 7 tareas. Para ello, dispones de 120 minutos.
2. Escribe la solución de cada tarea en el espacio provisto[1]. Si la solución no cabe en el espacio proporcionado, continúe con la solución en la página adicional, que se puede encontrar en la página 7. Asegúrese de incluir una referencia a la continuación de la solución en la página adicional.
3. Escribe las soluciones claramente. Los evaluadores[2] no tienen en cuenta las soluciones poco claras.
4. Los evaluadores no tienen en cuenta lo escrito a lápiz y en la hoja borrador.
5. Está prohibido el uso de cualquier equipo técnico (excepto calculadora[3]) en la sala de examen.

[1] Eliminado en esta traducción.
[2] Hay dos, por defecto.
[3] Según las imágenes que se obtienen al introducir el término estonio, son calculadoras no programables

Tarea 1. (5 puntos)

Mart y Karl participaron en el maratón ciclista de Tartu. Karl recorrió la distancia de 40 kilómetros en 1 hora y 36 minutos. Mart recorrió una distancia de 89 kilómetros, mientras que su velocidad promedio era un 20 % menor que la velocidad promedio de Karl.

Calcula el tiempo que tardó Mardi en recorrer la distancia. Da la respuesta en horas y minutos.

Tarea 2. (5 puntos)

Simplifica la expresión $A : B$, donde $A = \sqrt{ab} - \dfrac{ab}{a + \sqrt{ab}}$ y $B = \dfrac{\sqrt{4ab} - 2b}{a - b}$, con $a > 0$ y $b > 0$.

Tarea 3. (5 puntos)

El taller de neumáticos tiene a la venta 12 neumáticos de invierno usados que son adecuados para el coche del cliente. Uno de estos neumáticos tiene una profundidad de dibujo de 5 mm, tres tienen 6 mm, seis tienen 7 mm y dos tienen 8 mm.

1. Calcula la media aritmética de la profundidad de la banda de rodadura de estos 12 neumáticos de invierno.
2. ¿De cuántas formas pueden elegir los clientes 4 neumáticos con la misma profundidad de dibujo?
3. Calcula la probabilidad de que si se seleccionan al azar 4 neumáticos entre los 12 neumáticos disponibles, el cliente reciba los cuatro neumáticos con una profundidad de dibujo mayor que la media aritmética calculada.

Tarea 4. (5 puntos)

El alquiler del almacén aumenta 10 euros cada mes. La nave se alquila por un año. Se sabe que el alquiler de esta nave durante el primer semestre del año asciende a un total de 1 500 euros.

1. ¿Cuál es precio del alquiler el primer mes?
2. ¿Cuál es el precio total del alquiler para el primer año?

Tarea 5. (10 puntos)

1. Resuelve la ecuación $\left(\sqrt{2}\right)^{x^2+4x} \cdot \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^5 = 1$.

2. *a*) Simplifica la expresión $A = \log_2(8y^3) + 2\log_2 \dfrac{3}{y} - \log_2 36$, con $y > 0$.

   b) Encuentra el valor de la incógnita y para el que $A = -5$.

Tarea 6. (10 puntos)

Considera la función $f(x) = x^3 + 6x^2 + 9x$,

1. Determina el conjunto en el que $f(x)$ toma valores negativos.
2. Encuentra el valor mínimo de la función en el intervalo $[-5, 1]$.

Tarea 7. (10 puntos)

En el triángulo ABC, la longitud del lado AC es 4 cm, la longitud del lado CB es 10 cm y la mediana AM forma un ángulo de 45° grados con el lado AC.

1. Dibuja el triángulo ABC del enunciado.
2. Calcula el perímetro y el área del triángulo ABC.

Segunda parte

Instrucciones:

1. Resuelve las 5 tareas. Tienes 150 minutos.
2. Resto de instrucciones análogas a la primera parte.

Tarea 8. (10 puntos)

Representa las funciones $f(x) = -x^2 + 2x + 3$ y $g(x) = 7 - x$. Sombrea la región del primer cuadrante limitada por los ejes x e y y las gráficas de las funciones $f(x)$ y $g(x)$. Calcula el área de la figura sombreada.

Tarea 9. (10 puntos)

Tres empresas A, B y C decidieron apoyar económicamente a un joven deportista. Con él se firmó un acuerdo según el cual estas empresas otorgarán becas al deportista durante tres años.

Los importes de las becas de las empresas A, B y C son diferentes y cambian durante los tres años.

La tabla muestra el número de becas de cada empresa en cada año.

Compañía	Número de becas por año		
	1er año	2do año	3er año
A	2	2	1
B	1	2	2
C	1	1	2

Según el contrato, el importe de cada beca durante el primer año será de 1 500 euros.

En años posteriores, el valor de las becas aumenta un 20 % en comparación con el año anterior.

1. ¿Cuál es el importe total de las becas durante los tres años?
2. Calcula la cuantía de las becas para cada empresa.

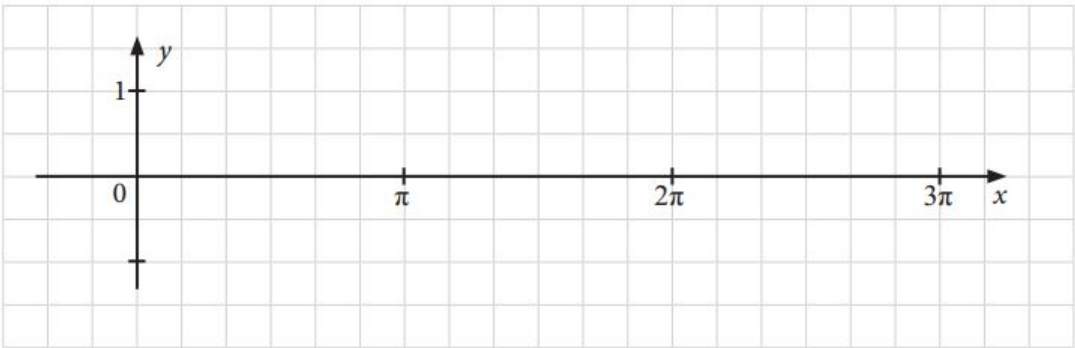
Tarea 10. (10 puntos)

La base de la pirámide cuadrangular $ABCDE$ es el rectángulo $ABCD$. La proyección ortogonal del vértice E, se encuentra en el centro de la arista CD. La altura de la pirámide es de 7,5 cm, el volumen es de 120 cm^3 y las longitudes de las aristas AB y BC están en una razón de $4:3$.

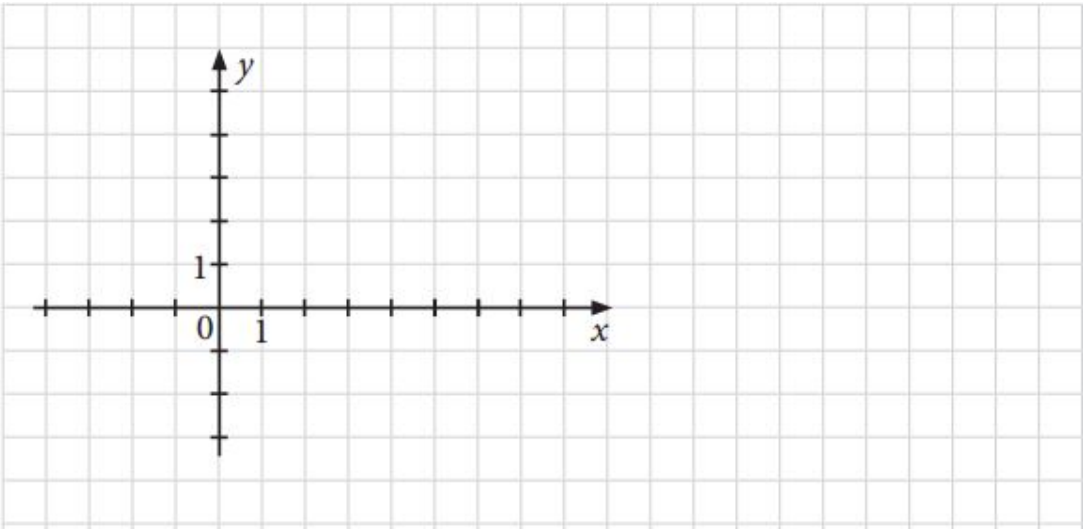
1. Realiza un dibujo correspondiente al texto del enunciado.
2. Calcula la longitud de la arista lateral EB.
3. Calcula el ángulo entre la arista lateral EB y la base de la pirámide.

Tarea 11. (10 puntos)

1. Encuentra el ángulo positivo más pequeño x para el que se cumple la ecuación
$$\frac{\cos 2x + \cos^2 x(1+\tan^2 x)}{2\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+x\right)} = \frac{1}{2}.$$
2. Dibuja la gráfica de la función $y = \cos x$ en el intervalo $\left[\frac{\pi}{2}, 3\pi\right]$ y resuelve la ecuación $\cos x = \frac{1}{2}$ en el mismo intervalo.



Tarea 12. (10 puntos)

Considera el punto $A(-3,4)$ y el vector $\overrightarrow{AB} = (8,-2)$ en el plano coordenado. Consideramos un punto C en el eje x de manera que la pendiente de la recta definida por los puntos B y C sea 2.

1. Determina las coordenadas del punto C y dibuja el triángulo ABC en el plano coordenado.
2. Calcula la medida del ángulo $\angle ABC$.
3. Calcula la longitud de la altura correspondiente al vértice A del triángulo ABC.