Finlandia 2023[1]

Tomado de `https://yle.fi/plus/abitreenit/2023/kevat/2023-03-22_M_fi/index.html`

Instrucciones: El examen consta de 13 tareas, de las cuales debe contestar 10. La prueba está dividida en tres partes. En la Parte A debe contestar las cuatro tareas. La parte B1 tiene cinco tareas, de las que debe elegir tres. La parte B2 tiene cuatro tareas, de las cuales debe contestar a tres. Todos los ejercicios se califican de 0 a 12 puntos, por lo que la puntuación máxima para el examen es 120.

En la parte A puede usar la hoja de cálculo y los programas básicos del sistema de exámenes. Las soluciones a la parte A se contestan online y no se pueden rectificar. Después de terminar la parte A tendrá disponible el resto del software de apoyo. También puede responder las tareas en la partes B antes de terminar la parte A.

En la mayoría de las tareas, las respuestas a todas las subtareas se escriben en el mismo campo de respuesta. Divida sus respuestas según las subtareas. Si lo desea, puede hacer dibujos, diagramas o tablas para argumentar sus respuestas y adjuntar una captura de pantalla a cualquier respuesta de texto.

No deje ningún material en el espacio reservado para la respuesta de una tarea que no desea que se califique.

[1] Matemáticas avanzadas (las más completas) Duración: ¿4 horas?

Parte A

1. Tarea con respuesta de opción múltiple (12 puntos)

Elija la opción correcta. No es necesario justificar las respuestas. (Respuesta correcta 2 p, respuesta incorrecta 0 p, sin respuesta 0 p).

1.1 Unidades de medida (2p)

¿Cuántos milímetros hay en un kilómetro?

a) 10^{-6} b) 10^{-3} c) 10^{0} d) 10^{2} e) 10^{2} f) 10^{3} g) 10^{4} h) 10^{6} i) 10^{9} j) 10^{12}

1.2 "Cilindro" (2p)

Un "cilindro" cuya base es un polígono se llama idades de medida (2p)

a) cono b) prisma c) tetraedro d) pirámide

1.3 Teorema del coseno (2p)

En un triángulo rectángulo, el teorema del coseno es el mismo que

a) el Teorema de Pitágoras
b) el Teorema del seno
c) El teorema de Tales
d) El Teorema de Fermat

1.4 Pendiente (2p)

La pendiente de la recta $y = ax + b$ es siempre igual a:

a) el recíproco de la pendiente de la normal
b) la distancia a la recta paralela que pasa por el origen
c) el valor de la derivada de la función $f(x) = ax + b$
d) el ángulo con el eje horizontal

1.5 Vectores (2p)

El producto escalar de dos vectores siempre es

a) un número entero b) un número real c) un vector d) una dirección

1.6 Puntos de corte (2p)

En el plano, una circunferencia y una parábola tienen

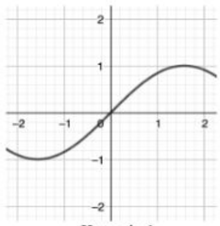
a) exactamente dos puntos de intersección
b) como máximo dos puntos de intersección
c) exactamente cuatro puntos de intersección
d) como máximo cuatro puntos de intersección

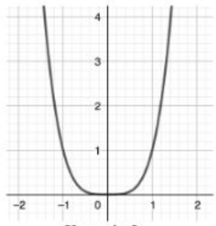
2. Gráficas de funciones (12 puntos)

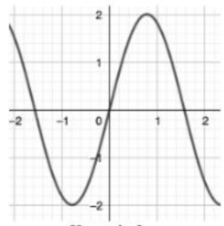
A continuación se presentan 12 ecuaciones de funciones. Nueve de ellas corresponden a una de las gráficas de la imagen. Relacione cada ecuación con su gráfica o indique que no aparece.

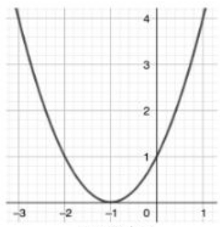
Elija la opción correcta en el menú desplegable. No es necesario justificar las respuestas. (Respuesta correcta 1 p, respuesta incorrecta 0 p, sin respuesta 0 p).

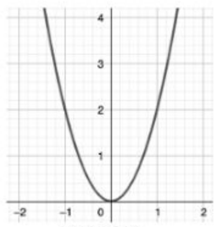
1. $y = x^2$
2. $y = x^4$
3. $y = x^3$
4. $y = x^2 + 1$
5. $y = (x+1)^2$
6. $y = 2x^2$
7. $y = \cos x$
8. $y = \operatorname{sen} x$
9. $y = -2\cos x + 2$
10. $y = -\cos(2x)$
11. $y = 2\operatorname{sen}(2x)$
12. $y = 2\operatorname{sen} x$

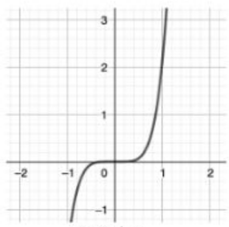

Kuvaaja 1

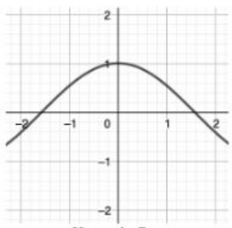

Kuvaaja 2

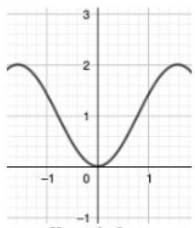

Kuvaaja 3

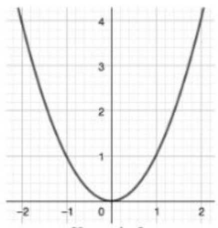

Kuvaaja 4

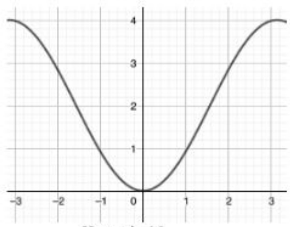

Kuvaaja 5

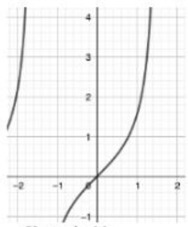

Kuvaaja 6

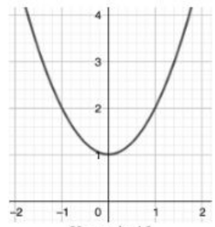

Kuvaaja 7


Kuvaaja 8


Kuvaaja 9


Kuvaaja 10


Kuvaaja 11


Kuvaaja 12

3. Vía (12 puntos)

La vía del tren del museo, que mide diez metros de largo, se ha doblado debido a la expansión térmica, pero sus extremos han permanecido en su lugar (en la imagen, la situación se ha exagerado un poco). La desviación de la vía con respecto a su posición original, medida perpendicularmente, es de la forma

$$f(x) = \frac{x^3 - 15x^2 + 50x}{1000},$$

donde x es la distancia al punto inicial de la vía. ¿En qué puntos es mayor la desviación de la vía de su posición original? Especifique también la desviación máxima. (Las unidades de x y de la desviación son metros).

4. Distancia de una recta a dos puntos (12 puntos)

Determine todas las rectas cuya distancia al punto $A = (-2, 0)$ es 2 y la distancia al punto $B = (3, 0)$ es 3.

(Al terminar la parte A se desbloquea parte de la calculadora)

Parte B1 (Conteste tres ejercicios)

5. Cuadrado mágico (12 puntos)

El grabado en cobre Melancolía I es una de las obras más famosas del alemán Albrecht Dürer. El trabajo contiene un cuadrado mágico 4×4, donde la suma de los números en cada fila y en cada columna es 34. En la siguiente cuadrícula, hay cuatro cuadrados del cuadrado mágico que están representados por dos números desconocidos x e y. Cuando escribimos los valores x e y uno a continuación del otro obtenemos el año de finalización de la obra. Calcule los valores de x e y para obtener el año en cuestión.

16	3	2	13
5	10	11	8
9	$\frac{y-2}{2}$	$\frac{x-1}{2}$	12
4	x	y	1

6. Punta de cohete (12 puntos)

El extremo de un cohete, es decir, el llamado "cono de nariz", se obtiene cuando una parábola que se abre hacia abajo gira alrededor de su eje de simetría. La altura de la punta es de 4,5 metros y el diámetro de la base es de 3,3 metros. Determine el volumen de la punta.

7. Suma de vectores (12 puntos)

Consideremos los vectores $\vec{u} = \vec{i} + 2\vec{j}$ y $\vec{v} = \text{sen}(2t)i + \cos(4t)\vec{j}$, donde $t \geq 0$.

1. Calcule el vector $\vec{u} + \vec{v}$ cuanto $t = 0$, $t = \frac{\pi}{4}$ y $t = \frac{3\pi}{4}$ (4 puntos).
2. ¿Qué figura describe el extremo del vector $\vec{u} + \vec{v}$ cuando t toma valores en el intervalo $[0, \pi]$? Da la respuesta en forma de ecuación $y = f(x)$. Puede resultar útil la identidad $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2 x$ (8 puntos).

8. Comparación de polinomios (12 puntos)

1. Demuestre por inducción que $k^3 \geq k^2 + 4$ para todos los enteros $k \geq 2$. (6 puntos)
2. Demuestre que la desigualdad del apartado anterior no se cumple para ningún entero $k < 0$. (2 puntos)
3. Demuestre que la desigualdad $x^3 \geq x^2 + 4$ es válida para todos los números reales $x \geq 2$. (4 puntos)

9. Algoritmo integral (12 puntos)

Este texto muestra el pseudocódigo de un algoritmo.

```
integral(a,b,n):
      h = (ba)/n
      r = 0
      para k = 1,2,...,n
           f = (a+k*h)^2 + 1
           r = r + f*h
      restaurar r
```

1. ¿Qué resultado da el algoritmo cuando $a = 0$, $b = 1$ y $n = 5$? (2 puntos)
2. Haga una hoja de cálculo o una implementación del algoritmo cuando $a = -1$, $b = 2$ y $n = 1000$. ¿Qué resultado da en este caso? (4 puntos)
3. ¿A qué integral se aproxima el algoritmo? Explique el papel de las variables a, b, n, h, r, k y f en el algoritmo. (6 puntos)

Parte B2 (Conteste tres ejercicios)

10. Tomografía por emisión de positrones (12 puntos)

La tomografía por emisión de positrones (PET) es un método de imagen médica que se puede utilizar para modelar el funcionamiento de los órganos internos. Con la ayuda de la imagen PET, es posible formar una curva de actividad-tiempo, que tiene la forma $f(t) = g(t) + ue^{v-(t-w)^2}$, donde $u, v, w > 0$ y

$$g(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ a_1 t + b_1 & \text{si } 0 \leq t < w \\ a_2 t + b_2 & \text{si } t \geq w \end{cases}$$

1. La Tabla 10.A contiene los valores obtenidos en una imagen PET en función del tiempo. Una medida se puede modelar como la función f cuando $u = \frac{1}{5}$, $v = 3$, $w = 2$, $a_1 = \frac{5}{4}$, $b = 1 = 0$, $a_2 = -\frac{1}{4}$ y $b_2 = 3$. Represente la función f en un sistema de coordenadas. (4 puntos)

tiempo	0	1	2	3	4	5	6
actividad	0	2.7	6.5	3.5	2.0	1.7	1.5

Tabla 10.A

2. ¿Cómo afectan los parámetros u, v y w a la gráfica de la función? (4 puntos)

3. ¿Qué valores de los parámetros w, a_1, b_1, a_2 y b_2 hacen que la función f sea continua? (4 puntos)

11. Lanzamiento de dados (12 puntos)

1. Eeri tiene dos dados y quiere elegir el mejor. Tira los dos dados una vez y el resultado de la primera tirada es el mayor de los dos. Eeri elige el dado que ha dado el resultado más alto y, si los dos dados dan el mismo resultado, elige uno cualquiera de los dados. Después, Eeri vuelve a lanzar el dado que eligió. ¿Cuál es la probabilidad de que el resultado de la segunda tirada sea menor que el resultado de la primera? (9 puntos)

2. Según una noticia ampliamente difundida, la riqueza de las diez personas más ricas del mundo se duplicó durante los dos primeros años de la pandemia del coronavirus. Aparentemente, la afirmación se basaba en el hecho de que al final del período se había calculado el valor de los activos de las diez personas más ricas y comparado con sus activos dos años antes. Esto incluye un error de pensamiento que también aparece en la tirada de dados de Eeri. ¿Cuál es? (3 puntos)

12. Construcción de polinomios (12 puntos)

Pon un ejemplo de un polinomio $P(x)$ que cumpla las siguientes condiciones:

a) La ecuación $P(x) = 1$ tiene exactamente dos soluciones distintas.

b) La ecuación $P(x) = -1$ tiene al menos cuatro soluciones distintas.

Para obtener la máxima puntuación se deben incluir los cálculos que muestran que el ejemplo cumple las condiciones requeridas. El razonamiento gráfico o el uso de un comando de solución de ecuaciones por sí solo no son suficientes para obtener la máxima puntuación.

13. Cambio de orden en integral y límite (12 puntos)

Consideremos la función $f(x,s) = \dfrac{1-s}{(1+x^2-2sx)^2}$, para $0 < s < 1$ y $0 \le x \le 1$.
Trabajaremos con el límite cuando $s \to 1$ por la izquierda, que a veces se denota $\lim\limits_{s\to 1^-}$.

1. Determine $g(x) = \lim\limits_{s\to 1} f(x,s)$ para $0 \le x < 1$ y calcule $\displaystyle\int_0^1 g(x)\,dx$. (3 puntos)

2. Encuentre un valor $x_0 < 1$ para el que $f(x_0,s) = f(1,s)$ y calcule $\displaystyle\int_0^1 f(x_0,s)\,dx$. (3 puntos)

3. Para el valor de x_0 obtenido en el apartado anterior, demuestra que $f(x,s) \ge f(x_0,s)$ cuando $x \in [x_0,1]$. (3 puntos)

4. Demuestra que $\displaystyle\int_0^1 \lim_{s\to 1} f(x,s)\,dx \ne \lim_{s\to 1}\int_0^1 f(x,s)\,dx$ (3 puntos)