

Finlandia 2023¹

Tomado de https://yle.fi/plus/abitreemit/2023/kevat/2023-03-22_N_fi/index.html

Instrucciones: El examen consta de 13 tareas, de las cuales debe contestar 10. Las tareas se dividen en tres partes. En la Parte A debe contestar las cuatro tareas. La parte B1 tiene cinco tareas, de las que debe elegir tres. La parte B2 tiene cuatro tareas, de las cuales debe contestar a tres. Todas las tareas se califican de 0 a 12 puntos, por lo que la puntuación máxima para el examen es 120.

En la parte A puede usar la hoja de cálculo y los programas básicos del sistema de exámenes. Las soluciones a la parte A se contestan online y no se pueden rectificar. Después de terminar la parte A tendrá disponible el resto del software de apoyo. También puede responder las tareas en la partes B antes de terminar la parte A.

En la mayoría de las tareas, las respuestas a todas las subtareas se escriben en el mismo campo de respuesta. Divida sus respuestas según las subtareas. Si lo desea, puede hacer dibujos, diagramas o tablas para argumentar sus respuestas y adjuntar una captura de pantalla a cualquier respuesta de texto.

No deje ningún material en el espacio reservado para la respuesta de una tarea que no desea que se califique.

Parte A

1. Ecuaciones básicas (12 puntos)

1.1 Calcule (2p)

$$7 \cdot 2^3 - 1 =$$

1.2 La solución de la ecuación $5x - 2 = 13$ es (2p)

$$x =$$

1.3 La recta $y = -2x + 14$ corta al eje x en el punto (2p)

$$x =$$

1.4 La solución más grande de la ecuación $x^2 = 8x$ es (2p)

$$x =$$

1.5 La solución de la ecuación $x^3 = 64$ es (2p)

$$x =$$

1.6 La solución de la ecuación exponencial $2^x - 128 = 0$ es (2p)

$$x =$$

¹Matemáticas “básicas”. Duración: ¿4 horas?

2. Soluciones de ecuaciones (12 puntos)

1. Resuelve el sistema de ecuaciones (4p)

$$\begin{cases} x + y = 8 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$$

2. Resuelva la ecuación $2x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{1}{4} = 0$. Proporcione la raíz más grande de forma exacta y la raíz más pequeña de forma aproximada, con dos cifras decimales. (8 p)

3. Porcentajes (12 puntos)

1. En 2019, el salario medio mensual de una enfermera era de 2 535 euros. A cierta enfermera se le pagó un 6 por ciento más que el promedio. Su salario neto, es decir, la cantidad ingresada en la cuenta cada mes, era de 1 777,25 euros. ¿Qué porcentaje del salario se destinó a impuestos y otras retenciones? (6 p)
2. En 2021, el IVA del test domiciliario de coronavirus fue del 24 % y el precio de venta fue de 5,60 euros. Un grupo de investigación propuso reducir el IVA en las pruebas al 10 %. ¿Cuánto costaría el producto si dicho cambio de impuestos se traslada íntegramente al precio? (6 p)

4. Triángulo equilátero (12 puntos)

Los lados AB y AC del triángulo ABC miden 6 cm, y el ángulo entre ellos es α . El punto D se define de manera que el segmento CD es perpendicular al lado AB .

1. Calcule la longitud del segmento CD si $\alpha = 30^\circ$. (4p)
2. Determine el valor de α para el cual el área del triángulo BCD es la mitad del área del triángulo ABC . (4p)
3. Calcule la longitud del segmento CD si el área del triángulo BCD es un tercio del área del triángulo ABC . (4p)

(Al terminar la parte A se desbloquea parte de la calculadora)

Parte B1 (Conteste tres ejercicios)

5. Unidades especiales de medida (12 puntos)

En el episodio 119 del programa de humor “Esto es sobre esto” se dijo que en túneles de servicio y otras instalaciones bajo Helsinki pueden caber 500 parlamentos. El volumen del edificio del parlamento, por otro lado, se describió de la siguiente manera: “Una bañera normal, de esas que puedes tener en casa o en una habitación de hotel, tiene un volumen de unos 300 litros. Si tienes 120 000 de esas bañeras, llenarán una cuarta parte del edificio del parlamento”.

1. ¿Cuál es el volumen del edificio del parlamento en metros cúbicos? (6 p)
2. A menudo escuchas que las superficies se comparan con el tamaño de campos de fútbol. Un campo de fútbol es un rectángulo con longitudes de lado de 105 metros y 68 metros. Se supone que los túneles de servicio y otros espacios tienen formas rectangulares. Si la altura de los túneles de servicio y otras instalaciones debajo de Helsinki es, en promedio, de 4, ¿cuál es la superficie total de sus zonas subterráneas, medida como campos de fútbol? (6 p)

6. Impuesto sobre donaciones (12 puntos)

El impuesto sobre donaciones debe pagarse cuando se transfiere una propiedad a otra persona como regalo y el valor es de 5 000 euros o superior. El impuesto sobre donaciones se determina como se muestra en la siguiente tabla. Veamos situaciones en las que solo se da un regalo.

Importe de la donación	Impuesto en el límite inferior	% de impuesto sobre el resto
5 000 – 25 000	100	8 %
25 000 – 55 000	1 700	10 %
55 000 – 200, 000	4 700	12 %
200 000 – 1 000, 000	22 100	15 %
1 000 000 –	142 100	17 %

Importe del impuesto sobre donaciones

1. ¿Cuál es el importe del impuesto si la donación tiene un valor de 80 000 euros?
¿Cuál es el porcentaje impositivo resultante? (6 p)
2. ¿Cuánto se paga de impuesto sobre donaciones por una donación de 4 000 euros?
(6 p)

7. Moneda y dados (12 puntos)

El juego consiste en lanzar una moneda y un dado normal.

1. ¿Cuál es la probabilidad de que el jugador A obtenga una cara al tirar una moneda al aire y el jugador B obtenga un 5 al tirar el dado? (4 p)
2. El jugador C le dice al jugador D: “Es más probable que saque dos cruces con dos lanzamientos de moneda que que obtenga al menos nueve con dos lanzamientos del dado”. ¿Tiene razón el jugador C? (8 p)

8. Tangente a una parábola (12 puntos)

La parábola $y = x^2 + bx + c$ pasa el punto $(9, 5)$ y la pendiente de la recta tangente en ese punto es 2. Determine los valores de b y c utilizando una derivada.

9. Vida útil de los teléfonos inteligentes (12 puntos)

La vida útil promedio de los teléfonos inteligentes en algunos países se muestra en la siguiente tabla.

País	Vida media (meses)
México	18
Tailandia	19
Arabia Saudita	19
India	20
Sudáfrica	21
Alemania	21
Malasia	22
Australia	22
China	22
Japón	26

Vida media de los teléfonos inteligentes

1. Calcule el promedio de tiempo de vida \bar{x} , de acuerdo con los valores que se muestran en la tabla y la desviación estándar s . (4 p)
2. ¿Por qué el promedio calculado en el apartado anterior, \bar{x} no se corresponde con la vida útil promedio de los teléfonos inteligentes en esos países? (4 p)
3. Suponga que la vida útil de los teléfonos inteligentes en todo el mundo sigue una distribución normal con una media de 23 meses y una desviación estándar de 2,55 meses. ¿Cuál es la probabilidad de que un teléfono inteligente seleccionado al azar tenga una vida útil de al menos tres años? (4 p)

Parte B2 (Conteste tres ejercicios)

10. La casa de troncos se contrae (12 puntos)

Al construir una casa de troncos debe tenerse en cuenta que el edificio se asienta ligeramente durante los primeros años. Para corregir este problema se deja el llamado espacio libre, por ejemplo, sobre puertas y ventanas. Un propietario de una nueva casa de troncos estima que los troncos se hundén durante un período de ocho años y que las caídas anuales forman una progresión geométrica. El espacio libre de su casa es de 6,0 cm.

1. Ayude al dueño de la casa presentándole una progresión geométrica que describa el asentamiento anual de la casa. La progresión debe cumplir las siguientes condiciones:
 - a) El primer término cae entre 2 y 3 cm.
 - b) La suma de los ocho primeros términos, S , está comprendida entre 5 y 6 cm.

En la respuesta proporcione la razón de la progresión geométrica y la suma total, S , que debe cumplir la condición requerida. (8 p)

2. Represente con un diagrama de barras el hundimiento anual durante los primeros ocho años. (4 p)

11. Piezas del contorno (12 puntos)

El tamaño de un rompecabezas de mil piezas es de 70 cm \times 50 cm. Estime qué parte de las piezas forman el contorno. Escriba las suposiciones que hace en su cálculo.

12. Número de escuelas primarias en Finlandia (12 puntos)

La siguiente tabla muestra el número de escuelas primarias en Finlandia en los años 2005–2020.

Año	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020
#	3347	3180	3067	2988	2889	2785	2719	2644	2576	2498	2397	2339	2276	2234	2189	2130

Número de escuelas primarias en Finlandia

1. Dibuje un diagrama que muestre el número de escuelas primarias en los años 2005–2020. (2 p)
2. Ajuste los datos a su recta de regresión de la forma $y = a + bx$, donde x es el año e y es el número de escuelas primarias. Explique verbalmente el significado de los coeficientes y su importancia. (4 p)
3. Ajuste los datos a la recta de regresión usando solo el número de escuelas primarias en el periodo 2005–2008. (2 p)

13. Gráficas y derivadas (12 puntos)

Consideremos dos funciones f y g de las que sabemos que $f(0) = 0$ y que $g(0) = 5$. Sabemos además que $2 \leq f'(x) \leq 3$ y que $1 \leq g'(x) \leq 2$ para todo $x > 0$.

1. Supongamos que las gráficas de las funciones f y g son líneas rectas. Justifique gráficamente, o mediante un cálculo, que $4 \leq f(2) \leq 6$ y que $7 \leq g(2) \leq 9$. (6 p)
2. Si las gráficas no son rectas, ¿cuáles de las siguientes situaciones son posibles?
 - a) $f(2) = g(2)$
 - b) $f(2) < g(2)$
 - c) $f(2) > g(2)$

En su justificación puede usar la siguiente información :

Si dos funciones tienen el mismo valor en el 0 y la derivada de la segunda función es mayor en el intervalo $[0, 2]$, entonces el valor de la segunda función es mayor en 2. (6 p)