Holanda 2022[1]

Matemáticas B (equiv a nuestras Matemáticas II)

Observaciones iniciales:

- Este examen consta de 17 preguntas. En este examen se puede obtener un máximo de 76 puntos. Para cada pregunta se indica el número de puntos asignados.
- Si una pregunta requiere una explicación, aclaración o cálculo, por lo general no se otorgan puntos sin esta explicación, aclaración o cálculo
- No dé más respuestas (razones, ejemplos, etc.) de las que se le piden. Por ejemplo, si se piden dos razones y da más de dos razones, solo se tendrán en cuenta las dos primeras en la evaluación.

Tabla de fórmulas incluida:

Goniometrie

$$\sin(t+u) = \sin(t)\cos(u) + \cos(t)\sin(u)$$
$$\sin(t-u) = \sin(t)\cos(u) - \cos(t)\sin(u)$$
$$\cos(t+u) = \cos(t)\cos(u) - \sin(t)\sin(u)$$
$$\cos(t-u) = \cos(t)\cos(u) + \sin(t)\sin(u)$$

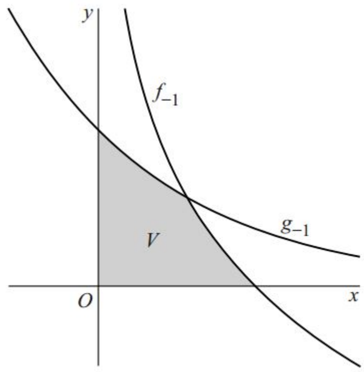
$$\sin(2t) = 2\sin(t)\cos(t)$$
$$\cos(2t) = \cos^2(t) - \sin^2(t) = 2\cos^2(t) - 1 = 1 - 2\sin^2(t)$$

[1] Duración: 3 horas

Inversa de $\ln x$

Las funciones f_p y g_p vienen dadas por las expresiones $f_p(x) = p \ln x$ y $g_p(x) = e^{x/p}$, para $p \neq 0$. Las funciones f_p y g_p son inversas entre sí.

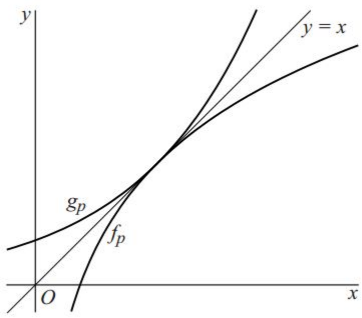
figuur 1



3p **1** Demuestre lo siguiente:
Tome $p = -1$. V el área encerrada por las gráficas de f_{-1} y g_{-1}, el eje x y el eje y (véase la figura 1).

5p **2** Calcula el área de V (da tu respuesta final con dos decimales).

figuur 2

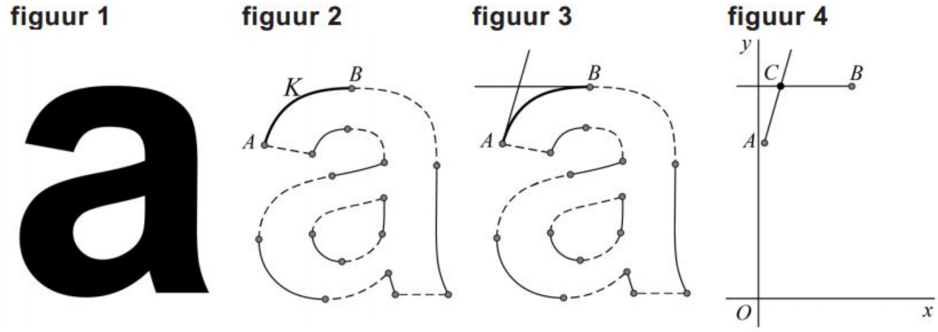


Existe un valor de p donde la recta $y = x$ es la tangente común a las gráficas de f_p y g_p. Esta situación se muestra en la figura 2.

4p **3** Calcule el valor exacto de p para el cual la recta $y = x$ es la tangente común a las gráficas de f_p y g_p

Fuentes en las pantallas de los ordenadores

El borde de una letra en la pantalla de un ordenador es una unión de varias curvas. En la imagen se puede ver el borde de la letra “a” (ampliada), que está formado por 16 curvas.



Cada una de las dieciséis curvas se puede describir con una fórmula. Los ordenadores necesitan esas fórmulas para poder representar las letras en la pantalla. Como ejemplo, consideramos la curva K entre los puntos A y B, que se dibuja con trazo más grueso en la figura 2.

Suponemos que se conocen estos cuatro datos (véase la figura 3):

- las coordenadas de A;
- las coordenadas de B;
- la dirección de la recta tangente en A a la curva;
- la dirección de la tangente en B a la curva.

El objetivo es obtener, a partir de estos cuatro datos, una fórmula para la curva K.

En la figura 4 se ven los puntos A y B y las dos rectas tangentes, representados en un sistema de coordenadas. Sabemos que las coordenadas de A son $(\frac{1}{15}, \frac{4}{3})$, las de B son $(1, \frac{19}{10})$. También sabemos que la tangente en B es horizontal y que la pendiente de la tangente en A es 4. El punto C es el punto de intersección de las dos tangentes y juega un papel importante en la construcción de la curva K.

3p **4** Calcula exactamente la coordenada x del punto C.

Para construir la curva K, además de los puntos fijos A, B y C, se utilizan los puntos móviles P, Q y R, que se describen de esta forma:

- El punto P se mueve para $0 \leq t \leq 1$ con velocidad constante a lo largo del segmento AC, desde A hasta C. Se cumple lo siguiente: $\vec{OP} = \vec{OA} + t \cdot \vec{AC}$.
- El punto Q se mueve para $0 \leq t \leq 1$ con velocidad constante a lo largo del segmento CB, desde C hasta B. Se cumple lo siguiente: $\vec{OQ} = \vec{OC} + t \cdot \vec{CB}$.
- A medida que los puntos P y Q se mueven, el punto R se desliza sobre el segmento PQ desde P hasta Q. Se cumple lo siguiente: $\vec{OR} = \vec{OP} + t \cdot \vec{PQ}$.

El punto R recorre una curva entre A y B desde $t = 0$ hasta $t = 1$ que se conoce como la **curva de Bézier** (de A, B y C), que es la curva K de la figura 2.

3p **5** (La figura 4 está ampliada en el apéndice detallado.)

Dibuje el punto R de la curva de Bézier en la figura del apéndice de ejercicios correspondiente al valor $t = 0{,}25$. Explique su método.

$\vec{OR}$ se puede expresar en función de t, $\vec{OA}$, $\vec{OB}$ y $\vec{OC}$. La expresión que se obtiene es:

$$\vec{OR} = (1-t)^2 \cdot \vec{OA} + t^2 \cdot \vec{OB} + 2t(1-t) \cdot \vec{OC}$$

5p **6** Muestre cómo se obtiene esta expresión para $\vec{OR}$.

En el resto de este ejercicio, veremos otro ejemplo, esta vez con una letra diferente. Las coordenadas de A, B y C ahora son las siguientes: $A(0,4)$, $B(2,2)$ y $C(3,0)$. De nuevo, C es el punto de intersección de las tangentes en A y B.

La curva de Bézier de A, B y C responde a la fórmula obtenida para $\vec{OR}$ en formato vectorial. Sin embargo, también es posible describir la curva de Bézier de otra forma.

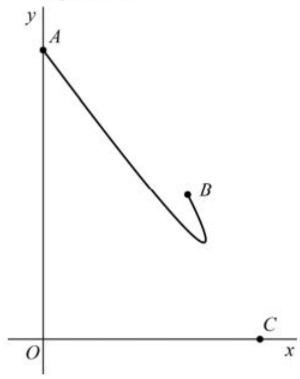
Consideramos el punto L que se mueve siguiendo estas ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x(t) = -4t^2 + 6t \\ y(t) = 6t^2 - 8t + 4 \end{cases} \qquad \text{para } 0 \leq t \leq 1$$

La trayectoria de L se muestra en la figura 5.

Sabemos que la trayectoria de L es la curva de Bézier definida por los puntos A, B y C.

figuur 5



3p **7** Demuestre esto usando la fórmula obtenida para $\vec{OR}$.

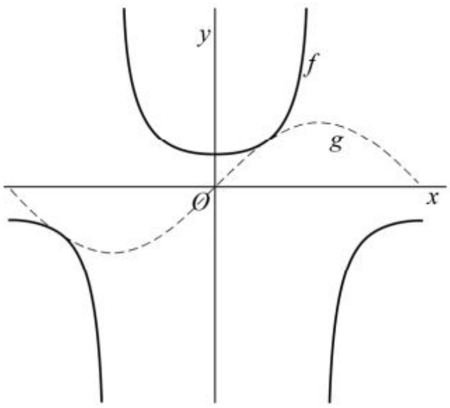
Función sinusoidal rota

La función f está definida en el intervalo $-\pi < x < \pi$ por la expresión

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}(2x)}$$

La función g viene dada por $g(x) = \operatorname{sen} x$.
Las gráficas de f y g se muestran en la figura.

figuur



8p **8** Demuestre que las gráficas de f y g se tocan en dos puntos.

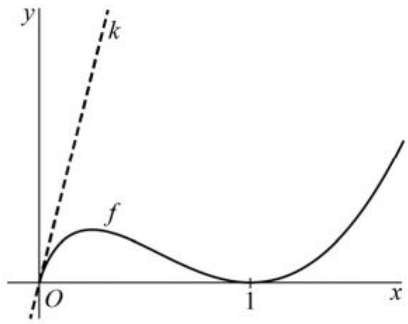
Desplazar la tangente

La función f está dada por $f(x) = x^2 - 2x\sqrt{x} + x$, para $x \geq 0$.

En la imagen se muestra la gráfica de f y la recta k, tangente a la gráfica en el origen.

Los puntos $(0,0)$ y $(1,0)$ del eje x están en la gráfica de f.

figuur



4p **9** Demuestre que la gráfica de f no tiene más puntos comunes con el eje x.

4p **10** Calcule exactamente el área del área encerrada por la gráfica de f y el eje x.

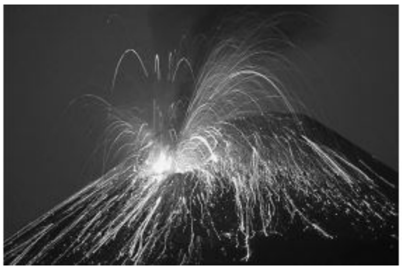
Traducción pendiente

Er is een waarde van a, met $a \neq 0$, waarbij een verschuiving van de raaklijn k over de vector $\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$ weer een raaklijn aan de grafiek van f geeft.

7p **11** Calcule exactamente este valor de a.

El volcán

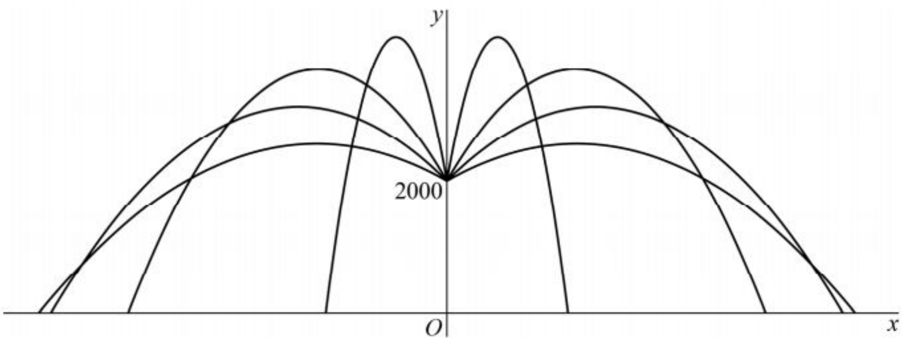
Un volcán puede entrar en erupción de diferentes formas. En la llamada erupción pliniana la presión en el interior del volcán aumenta hasta que el volcán explota con gran violencia. En la erupción, fragmentos de piedra fundida, llamados bombas de lava, son lanzados a gran distancia.



En un modelo de la trayectoria de una bomba de lava, se supone que en el momento de la erupción todas las bombas de lava tienen una velocidad de 210 metros por segundo. Un segundo principio es que cada bomba de lava describe una trayectoria parabólica. La altura del volcán en relación con el terreno es de 2000 metros.

En la figura 1 se pueden ver las trayectorias de algunas bombas de lava en el plano XY en el que se mueven.

figuur 1



Las ecuaciones de movimiento de una bomba de lava dependen de la dirección en la que la bomba de lava sale despedida durante la erupción. En el modelo, las siguientes ecuaciones de movimiento se utilizan como punto de partida:

$$\begin{cases} x(t) = 210\cos\alpha \cdot t \\ y(t) = 2000 + 210\operatorname{sen}\alpha \cdot t - 4{,}9t^2 \end{cases} \tag{1}$$

α es el ángulo que forma la trayectoria de la bomba de lava en el momento de la expulsión con una línea horizontal, y sabemos que $0 < \alpha < \pi$. Además, t es el tiempo en segundos (donde $t = 0$ es el momento de la explusión). Sabemos también que $x(t)$ e $y(t)$ están expresadas en metros.

La trayectoria de las ecuaciones (1) se pueden utilizar para obtener y en función de x y α. Para $\alpha \neq \pi/2$ se obtiene esta expresión:

$$y = 2000 + \tan\alpha \cdot x - \frac{1}{9000\cos^2\alpha} \cdot x^2 \tag{2}$$

3p **12** Muestra cómo se deduce esta expresión.

Una bomba de lava es expulsada con un ángulo $\alpha = 1$ (radianes). Esta bomba de lava cae al suelo a cierta distancia del volcán. Para este punto se cumple que $y = 0$.

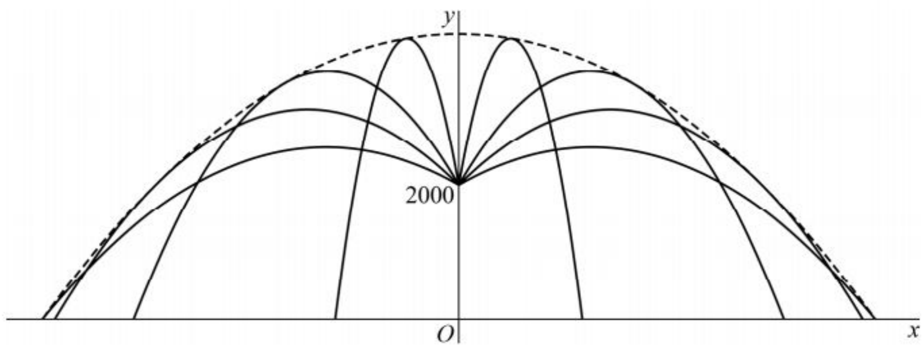
3p **13** Calcule esta distancia. De la respuesta final con una precisión de cien metros.

La expresión (2) también se puede escribir de esta forma:

$$y = -\frac{1 + \tan^2 \alpha}{9000} \cdot x^2 + \tan \alpha \cdot x + 2000 \qquad (3)$$

En la figura 2 se muestran con línea continua las trayectorias parabólicas de varias bombas de lava y una curva con línea de puntos. Esta curva representa el límite extremo de la región a la que pueden llegar estas bombas de lava.

figuur 2



La expresión analítica de la curva punteada es:

$$y = -\frac{1}{9000} \cdot x^2 + 4250 \qquad (4)$$

Todas las trayectorias de las bombas de lava tienen exactamente un punto en común con la curva punteada y, por lo tanto, son tangentes a esta curva.

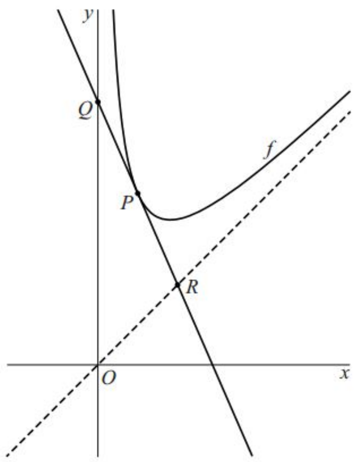
4p **14** Demuestra que todas las trayectorias de las bombas de lava tocan la curva punteada.

Asíntota oblicua

La función f está dada por la expresión $f(x) = x + \dfrac{2}{x}$.

La gráfica de f tiene una asíntota vertical con ecuación $x = 0$ y una asíntota oblicua. La siguiente figura muestra la gráfica de f para $x > 0$. La asíntota oblicua se muestra con una línea de puntos.

figuur



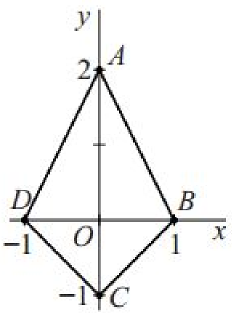
En la gráfica de f consideramos un punto arbitrario $P(p, p + \frac{2}{p})$.

La tangente a la gráfica de f en P corta a la asíntota vertical en el punto Q y a la asíntota oblicua en el punto R (véase la figura).

8p **15** Demuestre que P es el punto medio del segmento QR.

Cometa

figuur 1



Para $a > 0$, se consideran los puntos $A(0, a)$, $B(1, 0)$, $C(0, -1)$ y $D(-1, 0)$. El cuadrilátero $ABCD$ es un cuadrilátero cometa. En la figura se muestra el caso $a = 2$.

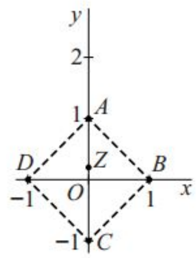
La mediatriz de un segmento pasa por el centro de ese segmento y es perpendicular al segmento.

Para $a = 2$ la mediatriz del segmento AB no pasa por D.

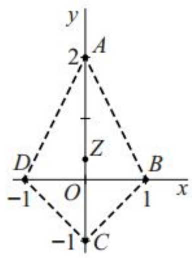
5p **16** Calcule el valor exacto de a para el que la mediatriz del segmento AB pasa por D.

En los vértices de la cometa se colocan masas puntuales:
- en el punto A con peso 2;
- en B como en D con peso 1;
- en el punto C con peso a.

figuur 2



figuur 3



En la figura 2 se representan para el caso $a = 1$ la cometa, las masas puntuales y el centro de gravedad Z de las masas puntuales.

En la figura 3 se representan para el caso $a = 2$ la cometa, las masas puntuales y el centro de gravedad Z de las masas puntuales.

Cuando a aumenta, el punto $A(0, a)$ se desplaza hacia arriba en el eje y y el peso en C aumenta. El centro de gravedad Z de las cuatro masas puntuales cambian de posición. Cuando a tiende a infinito, el centro de gravedad Z se aproxima a un punto fijo P.

4p **17** Demuestre que la coordenada y del punto P es 1.

Las imágenes de este documento han sido tomadas del examen original, que se puede ver aquí:

`https://www.examenblad.nl/examendocument/2022/cse-1/wiskunde-b-vwo/opgaven/2022/vwo/f=/VW-1025-a-22-1-o.pdf`