Abitur, Baviera, 2021[1].

Parte A - 70 minutos (la parte A es igual a la opción sin CAS)

Análisis – Opción 1

1. Consideremos la función f definida en $\mathbb{R}$ por $f(x) = e^{2x1}$. Demuestre que f es invertible y encuentre la expresión para la función inversa de f. (4 puntos)

2. a) Consideremos la función $g : x \mapsto (x^2 - 9x) \cdot \sqrt{2-x}$ con dominio de definición maximal D_g. Encuentre D_g y los valores donde g se anula. (3 puntos)

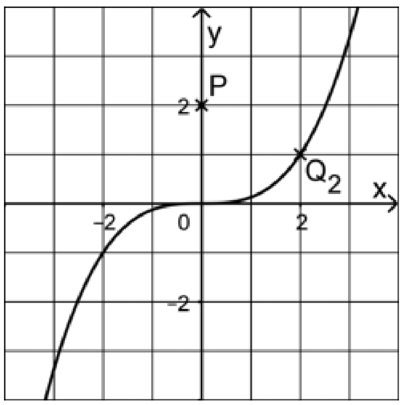
   b) Consideremos la función real dada por $h : x \mapsto \ln\left(\dfrac{1}{x^2+1}\right)$. Demuestre que el recorrido de la función h es el intervalo $(-\infty, 0]$. (3 puntos)

3. Consideremos la función f definida en $\mathbb{R}^+$ por $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^3}}$.

   a) Demuestre que la función F definida en $\mathbb{R}^+$ por $F(x) = -\dfrac{2}{\sqrt{x}}$ es una primitiva de f. (2 puntos)

   b) La gráfica de f determina con el eje x y las rectas de ecuaciones $x = 1$ y $x = b$ (con $b > 1$) una región plana. Determine el valor de b para el cual el área de esta región vale 1. (3 puntos)

4. Consideremos la función f definida en $\mathbb{R}$ como $f(x) = \dfrac{1}{8}x^3$ y los puntos $Q_a(a, f(a))$ para $a \in \mathbb{R}$. La gráfica muestra la gráfica de f y los puntos $P(0, 2)$ y Q_2.



   a) Para $a \neq 0$ calcule, en función de a, la pendiente pendiente m_a de la recta que pasa por los puntos P y Q_a. (2 puntos)

   (Para comprobar: $m_a = \dfrac{a^3-16}{8a}$)

   b) La recta tangente a la gráfica de f en el punto Q_a se denota por t_a. Determine aritméticamente el valor de $a \in \mathbb{R}$ para el cual t_a pasa por P. (3 puntos)

---

[1]Con ayuda de calculadoras simbólicas

Análisis – Opción 2

1. Consideremos la función f dada por $f(x) = \sqrt{x-2} + 1$ y su dominion de definición maximal.

   a) Dibuje la gráfica de f en el intervalo $2 \leq x \leq 11$. (3 puntos)

   b) Calcule el valor de la integral $\displaystyle\int_2^3 f(x)\, dx$. (3 puntos)

2. En cada caso, encuentre una función real cuyo recorrido sea el intervalo dado:

   a) $W = (-\infty, 1]$. (2 puntos)

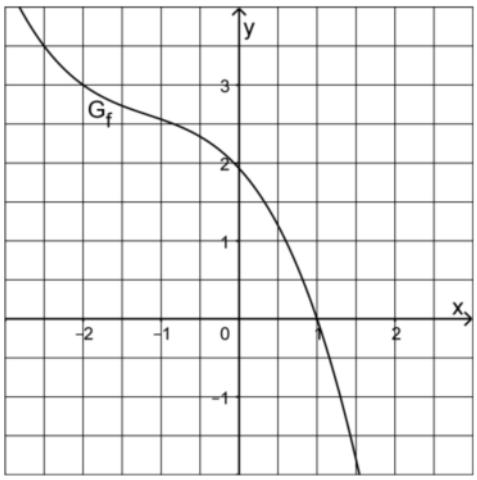
   b) $W = (3, +\infty)$. (2 puntos)

3. a) Considere una función p definida en todo $\mathbb{R}$ y el punto $Q(2, p(2))$.
   Describa cómo calcular la ecuación de la recta tangente a la gráfica de p en el punto Q. (2 puntos)

   b) Dada una función h definida en $\mathbb{R}$ como $h : x \mapsto ax^2 + c$ con $a, c \in \mathbb{R}$, cuya gráfica tiene como tangente en el punto $N(1, 0)$ la recta de la ecuación $y = -x + 1$. Determine a y c. (3 puntos)

4. La figura muestra la gráfica G_f de una función real f. G_f es estrictamente decreciente y corta al eje x en el punto $(1, 0)$.

   Consideremos la función g dada por $g(x) = \dfrac{1}{f(x)}$ y su dominio de definición maximal D_g.



   a) Demuestre que $x = 1$ no está en D_g y encuentre el valor de $g(-2)$. (2 puntos)

   b) Use la imagen para encontrar las coordenadas x de los puntos de intersección de las gráficas de f y g. (3 puntos)

Estocástica – Opciones 1 y 2

Considere la variable aleatoria X que toma valores en el conjunto $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.
La distribución de probabilidad de X es simétrica, es decir,
$P(X = 0) = P(X = 5)$, $P(X = 1) = P(X = 4)$ y $P(X = 2) = P(X = 3)$.
La tabla muestra los valores de la probabilidad $P(X \leq k)$ para $k \in \{0, 1, 2\}$.

k	0	1	2	3	4	5
$P(X \leq k)$	0,05	0,20	0,50			

1. Complete la tabla con los valores que faltan. (2 puntos)

2. Explique por qué X no sigue una distribución binomial. (3 puntos)

Geometría – Opción 1

1. Dada la recta $g: \bar{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, y otra recta h, que es paralela a g y que pasa por el punto $A(2, 0, 0)$. Consideremos el punto B en la recta g tal que las rectas AB y h son perpendiculares entre sí.

   a) Determine las coordenadas del punto B. (4 puntos)

   (para comprobar: $B(-2, 3, 2)$)

   b) Calcule la distancia entre g y h. (1 puntos)

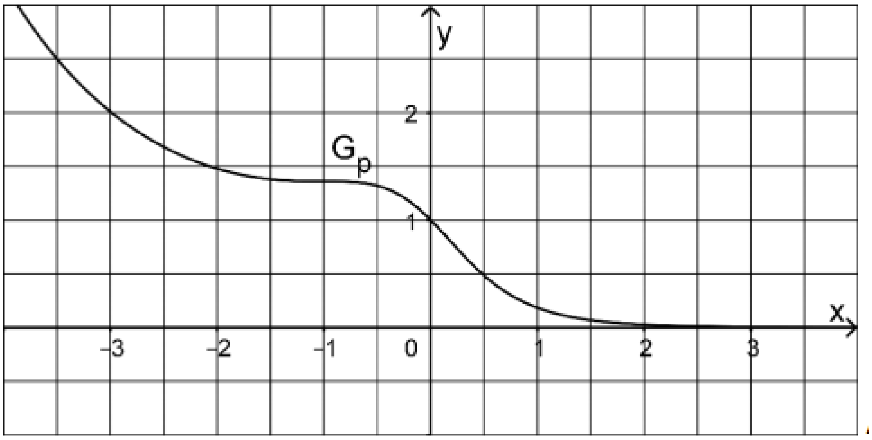
Geometría – Opción 2

1. Se debe apuntar a una señal de tráfico con un dispositivo de medición láser. La situación se representa como un modelo en un sistema de coordenadas. El punto de partida del rayo láser es el punto $P(104, -42, 10))$ y su dirección viene dada por el vector $\begin{pmatrix} -13 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$. La señal de tráfico está representada por un círculo disco que se encuentra en el plano yz, su centro es el punto $M(0, 0, 20)$ ( ) y su radio es 3. Determine si el rayo láser incide en la señal de tráfico. (5 puntos)

Parte B - 200 minutos

Análisis – Opción 1

1. Consideremos la función $p(x) = \dfrac{e^{-x}}{x^2+1}$ con dominio de definición maximal D. La imagen muestra la gráfica G_p de p.



   a) Justifique, utilizando la expresión analítica de p, que $D = \mathbb{R}$ y que (3 puntos)

$$\lim_{x\to-\infty} p(x) = +\infty.$$

   b) Demuestre que hay exactamente un punto donde G_p tiene una tangente horizontal pero que ese punto no es un extremo relativo de p. (3puntos)

   c) Para la recta g con ecuación $y = mx + t$, con $m, t \in \mathbb{R}$, hay exactamente dos valores distintos $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ en los que se cumplen estas cuatro condiciones:

   (1) $p(x_1) = mx_1 + t$
   (2) $p'(x_1) = m$
   (3) $p(x_2) = mx_2 + t$
   (4) $p'(x_2) = m$

   Explique, sin hacer cálculos, qué relación tiene la recta g con la gráfica G_p y represente la recta g en la imagen. (3 puntos)

2. Dada es la familia de funciones $f_{a,b} : x \mapsto abx - bx^3$, con $a, b \in \mathbb{R}^+$ y $x \in \mathbb{R}$. La gráfica de $f_{a,b}$ se denota por $G_{a,b}$.

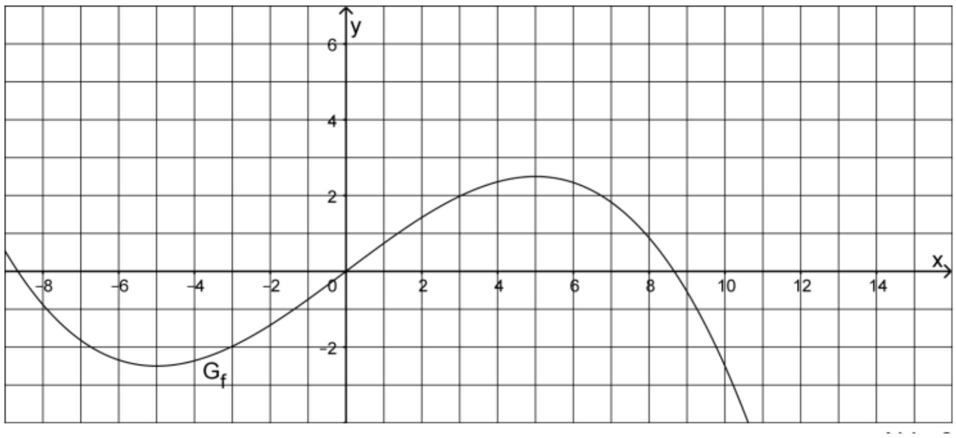
   a) Investigue las simetrías de $G_{a,b}$. (2 puntos)

   b) Determine y clasifique los extremos relativos de $G_{a,b}$. (4 puntos)

   (para comprobar: coordenada x del mínimo relativo: $-\frac{1}{3}\sqrt{3a}$)

   c) Demuestre que, para cualquier valor dado de b, existe un valor de a para el cual el área de la región del primer cuadrante delimitada por $G_{a,b}$ y el eje x vale 1. (4 puntos) *d*) Determine los valores de a y b tales que el punto más bajo de $G_{a,b}$ tenga coordenadas coordenadas $(-5;-2{,}5)$. (2 puntos)

La función $f_{a,b}$ con $a=75$ y $b=\frac{1}{100}$ se denota por f, es decir, $f(x)=\frac{3}{4}x-\frac{1}{100}x^3$. La siguiente imagen muestra G_f, la gráfica de la función f.

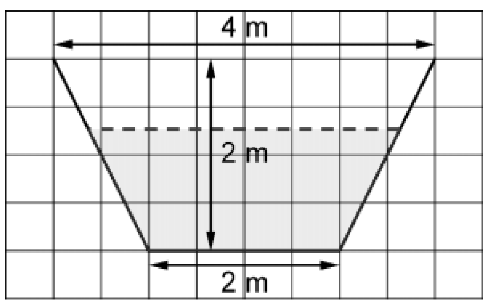


e) El gráfico G_g de la función g se obtiene a partir de G_f por desplazamiento, de modo que el mínimo local de G_g se encuentra en el origen. Determine una posible expresión de la función g y represente su gráfica, G_g, en la imagen. (4 puntos)

(para comprobar $g(x)=\dfrac{1}{100}x^2\cdot(15-x)$)

f) Ahora se considera la función $h: x\mapsto |g(x)|$ definida en $\mathbb{R}$. Explique de qué propiedad de G_g se puede deducir que h no es derivable en un punto. (3 puntos)

15 minutos después del inicio de unas fuertes lluvias, el caudal instantáneo en un punto de un canal viene dado por la función g, donde x denota el tiempo en minutos después del inicio de las lluvias y $g(x)$ viene dado en metros cúbicos por segundo. La siguiente imagen muestra la sección transversal del canal en el punto de medición.



g) Obtenga las soluciones de la ecuación $g(x)=2$ en el intervalo $[0,15]$ e interprete las soluciones en este contexto. (2 puntos)

h) Determine el instante en el que la variación instantánea del caudal es mayor. (3 puntos) *i*) Calcule el volumen de agua que ha pasado por el punto de medida en los primeros 15 minutos. (2 puntos)

j) En un modelo muy simplificado, se supone que el agua en el canal se mueve uniformemente a una velocidad constante de 1,5 metros por segundo. En estas condiciones, el cociente entre el caudal y la velocidad del agua es igual al área de la sección transversal del flujo de agua en el punto de medición (véase la imagen anterior). Determine la altura máxima que alcanza el nivel del agua en el punto de medida durante los primeros 15 minutos. (5 puntos)

Análisis – Opción 2

1. Consideremos el conjunto de funciones reales definidas por la expresión $f_a : x \mapsto a \cdot \ln x + 3$ con $a \in \mathbb{R}^+$. La gráfica de f_a se denota por G_a.

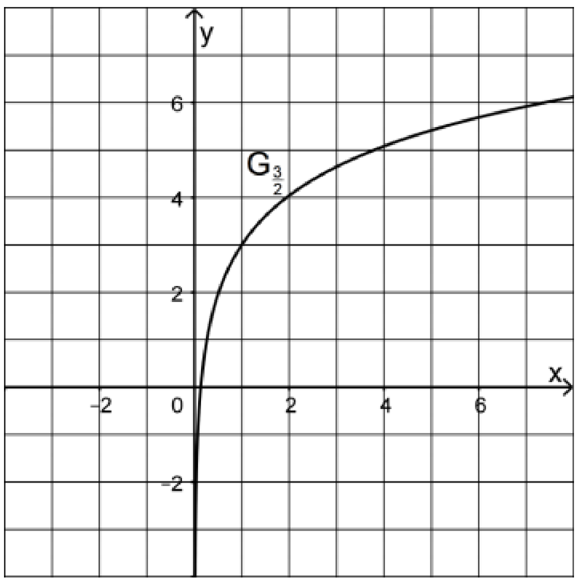
   a) Describa cómo obtener G_a a partir de la gráfica de la función $x \mapsto \ln x$ y describa el recorrido de la función f_a. (3 puntos)

   b) Demuestre que existe exactamente un punto por el cual pasan las gráficas de todas funciones de la familia y diga cuáles son sus coordenadas. (3 puntos)

   c) Demuestre que las pendientes de las gráficas G_a en los puntos donde cada gráfica corta al eje x es siempre mayor o igual que $3e$. (6 puntos)

   d) Demuestre que todas las funciones de la familia son invertibles. (2 puntos)

   La imagen muestra la gráfica $G_{3/2}$ de la función $f_{3/2}$. La función inversa de $f_{3/2}$ se denota por g.



   e) Dibuja la gráfica de g en la imagen. (2 puntos)

   f) $G_{3/2}$ y la gráfica de g delimitan una región del plano que es dividida en dos partes de igual área por la recta de ecuación $x = b$ con $b \in \mathbb{R}^+$. Encuentre b con dos cifras decimales. (6 puntos)

2. En las proximidades de una fuente de sonido, la expresión

$$L(r) = -\frac{20}{\ln 10} \cdot \ln r + 120 - \frac{r}{200} \quad (\text{con } r > 1)$$

   proporciona, de manera aproximada, el volumen en decibelios (dB) en función de la distancia r de la fuente de sonido (en metros). Una persona puede percibir sonidos de más de 0 dB y los ruidos de más 100 dB se perciben como desagradables. Una persona se encuentra cerca de la fuente de sonido.

a) La persona aumenta su distancia de la fuente de sonido de 10 m a 30 m. Calcule en cuántos decibelios cambia el volumen que percibe la persona. (2 puntos)

b) Determine, de manera aproximada, el valor de r para el cual $L(r) = 0$. Describa el significado del valor obtenido en este contexto (2 puntos)

La persona se mueve a lo largo de un camino que va más allá de la fuente de sonido. Utilizamos un sistema de coordenadas bidimensional con unidad de longitud 1 m, donde el punto $Q(0, 3)$ representa la fuente de sonido. Las posiciones de la persona están representadas en el modelo por los puntos del eje x dados por $P_u(u, 0)$, con $u \in [-50, 100]$.

c) Justifique que la expresión $r(u) = \sqrt{u^2 + 9}$ describe la distancia (en metros) de la persona a la fuente de sonido. (3 puntos)

La función real $L_W : u \mapsto L(r(u))$ definida en asigna a cada valor de u el Volumen en decibelios en el punto

d) Calcule el volumen más alto en decibelios que percibe la persona que camina por la trayectoria descrita. (2 puntos)

e) Determine la longitud de la trayectoria en la que el volumen del sonido percibido supera el umbral de incomodidad de 100 dB. (3puntos)

f) La gráfica de la función L_W tiene exactamente un punto de inflexión para $u > 0$. Determine sus coordenadas y la pendiente de la recta tangente en el punto de inflexión, con una precisión de un decimal. Describa el significado de los tres valores obtenidos, así como el significado del punto de inflexión en este contexto. (6puntos)

Sugerencia: Realice los cálculos con la ayuda del sistema CAS disponible

Estocástica – Opción 1

1. Cuatro familias fueron un sábado por la mañana al parque de atracciones. Había seis cajas abiertas, y las familias eligieron las cajas al azar, con igual probabilidad. Describa sucesos A y B cuyas probabilidades vengan dadas por estas expresiones:

(4 puntos)

$$P(A) = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{6^4}; \quad P(B) = \frac{6}{6^4}.$$

2. Los carros de mano se pueden pedir prestados en el área de entrada del parque de atracciones. Sabemos que el 15 % de las familias piden prestado un carro. Definimos variable aleatoria X como el número de carros de mano utilizados por las primeras 200 familias que llegan al parque de atracciones cierto día. Además, se supone que cada familia pide prestado como mucho un carro de mano y que la variable aleatoria X tiene una distribución binomial.

   a) Determine la probabilidad de que se presten al menos 25 carros de mano.

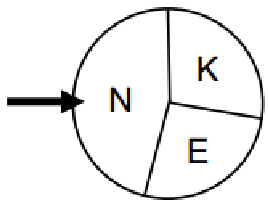
   (2 puntos)

   b) Calcule la probabilidad de que la quinta familia que llega al parque de atracciones sea la primera que pida prestado un carro de mano.

   (2 puntos)

   c) Con la ayuda de las tablas, determine el intervalo más pequeño, simétrico respecto del valor esperado, para el que la probabilidad de que la variable aleatoria X tome valores dentro del intervalo sea al menos del 75 %. (4 puntos)

3. En el parque de atracciones hay un juego de azar en el que se pueden ganar entradas. Al comienzo del juego tiras un dado, cuyas caras están numeradas del 1 al 6. Si se obtiene el número 6, se hace girar una rueda de la fortuna con tres sectores, como la representada de manera aproximada en la imagen.



   Si la flecha cae en el sector K se gana una entrada de niño por valor de 28 euros, con el sector E una entrada de adulto por valor de 36 euros y con el sector N no se gana nada. El ángulo central del sector N mide 160°. El tamaño de los sectores K y E se elige de modo que el premio medio del juego sea de 3 euros. Determine la medida de los ángulos centrales de los sectores K y E. (5 puntos)

4. A la salida del parque de atracciones hay una máquina que, al apretar un botón, imprime un pin con un dibujo y luego lo reparte. Hay n dibujos diferentes y la máquina selecciona uno al azar, todos con la misma probabilidad. Un niño compra tres pines en la máquina.

a) Para el caso $n = 5$, determine la probabilidad de que los tres pines no sean los tres iguales. (2 puntos)

b) Explique por qué la probabilidad de que los tres sean diferentes toma el valor $\dfrac{(n-1)(n-2)}{n^2}$. (2 puntos)

c) Determine el valor mínimo que debe tomar n para que la probabilidad de que los tres pines sean diferentes sea mayor que el 90 %. (2 puntos)

d) Utilizando la expresión del apartado b), demuestre (con un cálculo) que si hay una gran cantidad de dibujos diferentes en la máquina es casi seguro que las tres insignias serán diferentes. (2 puntos)

Estocástica – Opción 2

Una empresa de confitería produce diferentes tipos de gominolas de frutas.

1. Luisa participa en una visita a la fábrica. Al comienzo del recorrido recibe una bolsa con diez ositos de los cuales cinco son blancos, dos son rojos y tres son verdes. Luisa abre la bolsa y saca tres ositos sin mirar. Calcula la probabilidad de que los tres ositos sean del mismo color. (3 puntos)

2. Antes del envasado, los ositos de diferentes colores se mezclan en grandes recipientes, y sabemos que la proporción de ositos rojos es del 25 % del total. Una máquina envasadora llena con 50 ositos una bolsa grande.

   a) Calcule la probabilidad de que más de un tercio de los ositos de una bolsa seleccionada al azar sean rojos. (2 puntos)

   b) Para asegurarse de que cada bolsa tiene exactamente 50 ositos, caen uno tras otro por una abertura de una máquina de envasado. Describa en este contexto dos sucesos cuyas probabilidades correspondan a estas expresiones (4 puntos)

      i) $\binom{50}{10} \cdot 0{,}75^{10} \cdot 0{,}25^{40}$

      ii) $\sum_{k=0}^{3}(0{,}75^{k} \cdot 0{,}25)$

   c) Determina la proporción mínima de ositos amarillos que se deben fabricar para que la probabilidad de que en una bolsa seleccionada al azar haya algún osito amarillo sea al menos el 95 %. (2 puntos)

3. La empresa de confitería también produce dulces veganos y con poca azúcar. Necesitan llevarlos en bolsas debidamente etiquetadas al comercio.

   La cantidad de bolsas no marcadas como veganas es el triple de la cantidad de bolsas veganas. El 42 % de las bolsas etiquetadas como veganas también están marcadas como bajas en azúcar. En general, el 63 % de las bolsas no estándar (es decir, ni veganas ni bajas en azúcar).

   Se consideran los siguientes sucesos:

   V: "Una bolsa seleccionada al azar está marcada como vegana".

   R: "Una bolsa seleccionada al azar está marcada como baja en azúcar".

   a) Calcule la probabilidad del suceso R^c. (3 puntos)

   b) Calcule la probabilidad $P(R|V^c)$. (3 puntos)

   c) Describa el significado de la probabilidad $1 - P(R|V^c)$ en este contexto. (2 puntos)

4. En una campaña publicitaria, las bolsas de gelatina de frutas se venden con tarjetas para raspar. Cuando se rasca, se pueden ver hasta tres manzanas doradas en la tarjeta. La variable aleatoria X describe la cantidad de manzanas doradas que aparecen cuando se rasca la tarjeta. La tabla muestra la distribución de probabilidad de X.

k	0	1	2	3
$P(X=k)$	p_0	p_1	0,2	0,1

a) El valor esperado de la variable aleatoria X es 1. Determinar las probabilidades p_0 y p_1 y calcule la varianza de X. (3 puntos)

b) Sin conocer el valor esperado, la varianza generalmente no es significativa. Por esta razón, se puede considerar el cociente de la desviación estándar y el valor esperado, que se conoce como la desviación estándar relativa.

La variable aleatoria Y_n describe el número de manzanas doradas que se obtienen al raspar n tarjetas. Sabemos que $E(Y_n) = n$ y que $VAR(Y_n) = n$. Determine el valor de n para el cual el valor de la desviación estándar relativa es el $3\,\%$. (2 puntos)

Geometría – Opción 1

1. Los puntos $A(6,0,4)$, $B(0,6,4)$, $C(-6,0,4)$ y D están en el plano E y son los vértices de la base cuadrada de una pirámide $ABCDS$ con vértice $S(0,0,1)$. A, B y S están en el plano F.

   a) Demuestre (con un cálculo) que el triángulo ABS es isósceles. Calcule las coordenadas del punto D y describa la ubicación del plano E en el sistema de coordenadas. (4 puntos)

   b) Obtenga una ecuación del plano F. (2 puntos)

   (para comprobar: $F: x_1 + x_2 - 2x_3 + 2 = 0$)

   c) Calcule el volumen V de la pirámide $ABCDS$. (2 puntos)

   (para comprobar: $V = 72$)

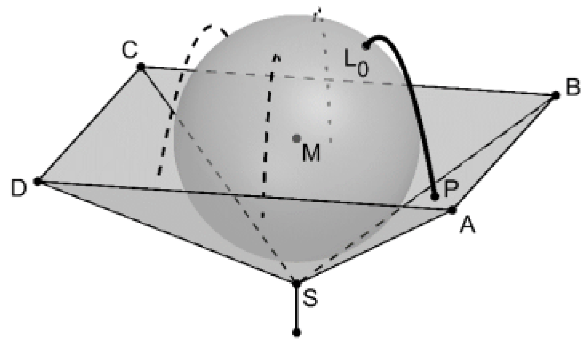
   d) Calcule, con ayuda de las siguientes igualdades, el valor del ángulo ϵ:

   i) $$\cos\varphi = \frac{\left|\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right|}$$

   ii) $\epsilon = (90° - \varphi) \cdot 2$

   Describa un posible significado de ϵ en relación con la pirámide. (2 puntos)

La fuente que se muestra en la imagen está formada por una esfera de mármol colocada en un cuenco de bronce sobre un poste. La bola de mármol toca a cada una de las cuatro paredes interiores del cuenco de bronce en un punto. El cuenco de bronce está representado por las caras de la pirámide $ABCDS$ y la bola de mármol por la esfera con centro $M(0,0,4)$ y radio r. El plano x_1x_2 es paralelo al suelo sobre el que está construido el modelo. Una unidad en el sistema de coordenadas corresponde a un decímetro en la realidad.



   e) Determine el diámetro de la bola de mármol, redondeando al centímetro. (4 puntos)

   (para comprobar: $r = \sqrt{6}$)

f) Demuestre que el punto más alto de la fuente está a unos 64 cm de altura con respecto al suelo. (2 puntos)

Existen fuentes de agua en cuatro lugares de la superficie de la esfera de mármol. Uno de estos puntos de salida está representado en el modelo por el punto $L_0(1, 1, 6)$. La trayectoria del agua que sale por ese punto está modelada por los puntos de la curva $L_t(t + 1; t + 1; 6{,}2 - 5 \cdot (t - 0{,}2)^2)$ para un intervalo de valores de $t \in \mathbb{R}^+$.

g) El punto P, que se encuentra dentro del triángulo ABS, es el punto donde la trayectoria del agua choca con el cuenco de bronce (ver figura). Determine las coordenadas de P. (3 puntos)

h) Compruebe si la trayectoria del agua supera en algún punto la altura total de la fuente. (2 puntos)

i) Las cuatro salidas de agua vierten en total 80 ml de agua cada segundo. Determine el tiempo en segundos que transcurre hasta que el cuenco inicialmente vacío está completamente lleno de agua. (4 puntos)

Geometría – Opción 2

El cuerpo que se muestra en la imagen está delimitado por una base cuadrada $ABCD$ con $A(5,5,0)$, $B(-5,5,0)$, $C(-5,-5,0)$ y $D(5,-5,0)$, ocho caras triangulares y otra cara cuadrada $EFGH$ con $E(2,0,4)$, $F(0,2,4)$, $G(-2,0,4)$ y $H(0,-2,4)$. El punto medio S del cuadrado $ABCD$ es el origen del sistema de coordenadas y todo el cuerpo es simétrico tanto con respecto al plano x_1x_3 como con respecto al plano x_2x_3.

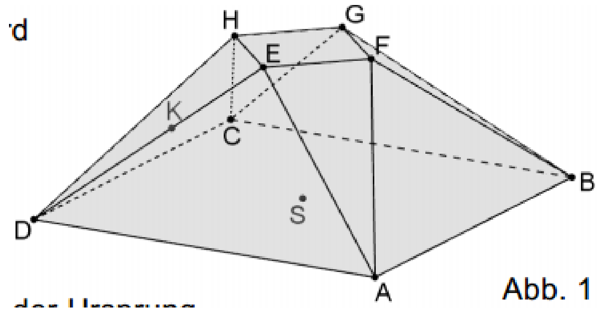


Abb. 1

a) Demuestre que el triángulo ABF tiene un ángulo recto en F. (2 puntos)

b) El triángulo ABF se encuentra en el plano W. Encuentre una ecuación de W y describa la posición de W en el sistema de coordenadas. (3 puntos)

(para comprobar: $W: 4x_2 + 3x_3 - 20 = 0$)

c) Calcule la medida del ángulo agudo formado por la cara ABF y la base $ABCD$. (3 puntos)

En el segmento DE hay un punto K para el cual $|KE| = |EF|$.

d) Calcule las coordenadas del punto K. (4 puntos)

(para comprobar: $K(3{,}2; -2; 2{,}4)$)

e) El punto medio del segmento KF se denota por N. Demuestre que la recta EN es la bisectriz del triángulo DFE en E y que el punto S está en la recta definida por E y N. (5 puntos)

f) El poliedro se puede dividir en nueve pirámides, cada una de las cuales es congruente con una de las tres pirámides $ABFS$, $HDES$ o $EFGHS$ que se muestran en la imagen. El volumen de la pirámide $ABFS$ es $33\,\frac{1}{3}$ y el volumen de la pirámide $HDES$ es $13\,\frac{1}{3}$. Determine el volumen total del poliedro. (5 puntos)

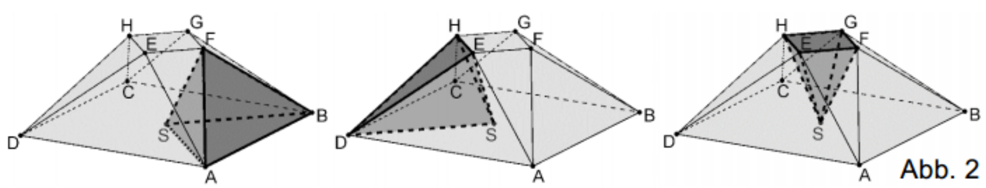


Abb. 2

g) Existe una única esfera que pasa por los ocho vértices del poliedro. Encuentra las coordenadas del centro de esta esfera. (3 puntos)