Abitur, Baviera, 2021[1].

Parte A - 70 minutos

Análisis – Opción 1

1. Consideremos la función f definida en $\mathbb{R}$ por $f(x) = e^{2x1}$. Demuestre que f es invertible y encuentre la expresión para la función inversa de f. (4 puntos)

2. a) Consideremos la función $g : x \mapsto (x^2 - 9x) \cdot \sqrt{2-x}$ con dominio de definición maximal D_g. Encuentre D_g y los valores donde g se anula. (3 puntos)

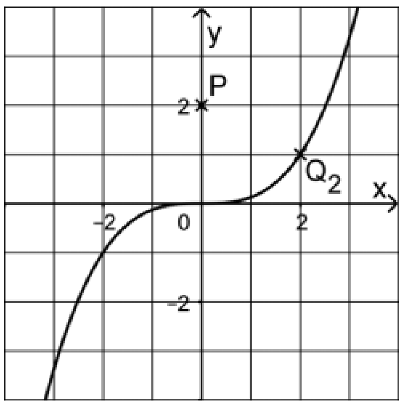
   b) Consideremos la función real dada por $h : x \mapsto \ln\left(\frac{1}{x^2+1}\right)$. Demuestre que el recorrido de la función h es el intervalo $(-\infty, 0]$. (3 puntos)

3. Consideremos la función f definida en $\mathbb{R}^+$ por $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^3}}$.

   a) Demuestre que la función F definida en $\mathbb{R}^+$ por $F(x) = -\dfrac{2}{\sqrt{x}}$ es una primitiva de f. (2 puntos)

   b) La gráfica de f determina con el eje x y las rectas de ecuaciones $x = 1$ y $x = b$ (con $b > 1$) una región plana. Determine el valor de b para el cual el área de esta región vale 1. (3 puntos)

4. Consideremos la función f definida en $\mathbb{R}$ como $f(x) = \dfrac{1}{8}x^3$ y los puntos $Q_a(a, f(a))$ para $a \in \mathbb{R}$. La gráfica muestra la gráfica de f y los puntos $P(0, 2)$ y Q_2.



   a) Para $a \neq 0$ calcule, en función de a, la pendiente pendiente m_a de la recta que pasa por los puntos P y Q_a. (2 puntos)

   (Para comprobar: $m_a = \dfrac{a^3 - 16}{8a}$)

   b) La recta tangente a la gráfica de f en el punto Q_a se denota por t_a. Determine aritméticamente el valor de $a \in \mathbb{R}$ para el cual t_a pasa por P. (3 puntos)

[1]Sin ayuda de calculadoras simbólicas

Análisis – Opción 2

1. Consideremos la función f dada por $f(x) = \sqrt{x-2}+1$ y su dominion de definición maximal.

   a) Dibuje la gráfica de f en el intervalo $2 \leq x \leq 11$. (3 puntos)

   b) Calcule el valor de la integral $\displaystyle\int_2^3 f(x)\,dx$. (3 puntos)

2. En cada caso, encuentre una función real cuyo recorrido sea el intervalo dado:

   a) $W = (-\infty, 1]$. (2 puntos)

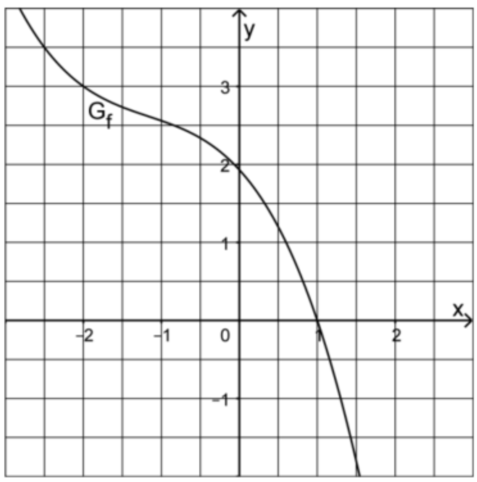
   b) $W = (3, +\infty)$. (2 puntos)

3. a) Considere una función p definida en todo $\mathbb{R}$ y el punto $Q(2, p(2))$.
   Describa cómo calcular la ecuación de la recta tangente a la gráfica de p en el punto Q. (2 puntos)

   b) Dada una función h definida en $\mathbb{R}$ como $h : x \mapsto ax^2 + c$ con $a, c \in \mathbb{R}$, cuya gráfica tiene como tangente en el punto $N(1, 0)$ la recta de la ecuación $y = -x + 1$. Determine a y c. (3 puntos)

4. La figura muestra la gráfica G_f de una función real f. G_f es estrictamente decreciente y corta al eje x en el punto $(1, 0)$.

   Consideremos la función g dada por $g(x) = \dfrac{1}{f(x)}$ y su dominio de definición maximal D_g.



   a) Demuestre que $x = 1$ no está en D_g y encuentre el valor de $g(-2)$. (2 puntos)

   b) Use la imagen para encontrar las coordenadas x de los puntos de intersección de las gráficas de f y g. (3 puntos)

Estocástica – Opciones 1 y 2

Considere la variable aleatoria X que toma valores en el conjunto $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.
La distribución de probabilidad de X es simétrica, es decir,
$P(X = 0) = P(X = 5)$, $P(X = 1) = P(X = 4)$ y $P(X = 2) = P(X = 3)$.
La tabla muestra los valores de la probabilidad $P(X \leq k)$ para $k \in \{0, 1, 2\}$.

k	0	1	2	3	4	5
$P(X \leq k)$	0,05	0,20	0,50			

1. Complete la tabla con los valores que faltan. (2 puntos)

2. Explique por qué X no sigue una distribución binomial. (3 puntos)

Geometría – Opción 1

1. Dada la recta $g : \bar{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, y otra recta h, que es paralela a g y que pasa por el punto $A(2,0,0)$. Consideremos el punto B en la recta g tal que las rectas AB y h son perpendiculares entre sí.

   a) Determine las coordenadas del punto B. (4 puntos)

   (para comprobar: $B(-2,3,2)$)

   b) Calcule la distancia entre g y h. (1 puntos)

Geometría – Opción 2

1. Se debe apuntar a una señal de tráfico con un dispositivo de medición láser. La situación se representa como un modelo en un sistema de coordenadas. El punto de partida del rayo láser es el punto $P(104,-42,10))$ y su dirección viene dada por el vector $\begin{pmatrix} -13 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$. La señal de tráfico está representada por un círculo disco que se encuentra en el plano yz, su centro es el punto $M(0,0,20)$ ( ) y su radio es 3. Determine si el rayo láser incide en la señal de tráfico. (5 puntos)

Parte B - 200 minutos

Análisis – Opción 1

1. Consideramos la función f definida en $\mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$ por $f : x \mapsto \dfrac{6x}{x^2 - 4}$. La gráfica de f se denota por G_f y sabemos que es simétrica con respecto al origen de coordenadas.

   a) Obtenga las ecuaciones de todas las asíntotas verticales de G_f. Demuestre que el eje x es una asíntota horizontal de G_f. (3 puntos)

   b) Estudie el crecimiento y decrecimiento de la función f en los intervalos $(-\infty, -2)$, $(-2, 2)$ y $(2, +\infty)$. Calcule la pendiente de la tangente a G_f en el punto $(0, f(0))$. (5 puntos)

   (para comprobar: $f'(x) = -\dfrac{6 \cdot (x^2 + 4)}{(x^2 - 4)^2}$)

   Los puntos $A(3; 3{,}6)$ y $B(8; 0{,}8)$ están en G_f; entre estos dos puntos la gráfica de f está por debajo del segmento AB.

   c) Utilizando la información de los apartados anteriores, dibuje G_f en el intervalo $-10 \leq x \leq 10$. (4 puntos)

   d) Calcule el área de la región comprendida entre la gráfica de f y el segmento AB. (5 puntos)

2. Se considera el conjunto de funciones $f_{a,b,c} : x \mapsto \dfrac{ax + b}{x^2 + c}$ con $a, b, c \in \mathbb{R}$ y dominio de definición maximal $D_{a,b,c}$.

   a) La función f del ejercicio 1 es una función de esta familia. Dar los valores correspondientes de a, b y c. (1 punto)

   b) Demuestre que si $a = 0$ y $b \neq 0$, entonces la gráfica de $f_{a,b,c}$ es simétrica con respecto al eje y y no interseca al eje x. (2 puntos)

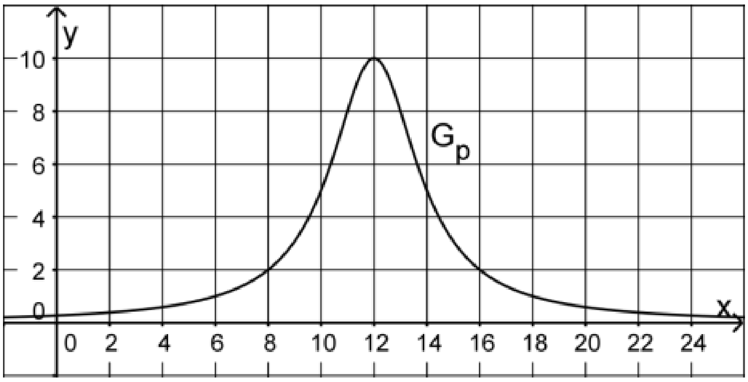
   c) Obtenga los valores para a, b y c para los que $D_{a,b,c} = \mathbb{R}$ y la gráfica de $f_{a,b,c}$ sea simétrica respecto al origen (pero no idéntica al eje x). (3 puntos)

   d) La derivada de $f_{a,b,c}$ es

   $$f'_{a,b,c}(x) = -\frac{ax^2 + 2bx - ac}{(x^2 + c)^2}.$$

   Demuestre que si $a \neq 0$ y $c > 0$ entonces la gráfica de $f_{a,b,c}$ tiene exactamente dos extremos relativos. (4 puntos)

3. Se considera la función definida en $\mathbb{R}$ por $p : x \mapsto \dfrac{40}{(x-12)^2+4}$. La imagen muestra G_p, la gráfica p.



a) Describe cómo se puede obtener G_p a partir de la gráfica de la función real $h : x \mapsto \dfrac{5}{x^2+4}$ y demuestra que G_p es simétrica con respecto a la recta de ecuación $x = 12$. (4 puntos)

Un sistema fotovoltaico instalado en el techo de una casa convierte la energía luminosa en energía eléctrica. Para $4 \le x \le 20$ la función p describe la potencia de la planta en función del tiempo. La variable x es el tiempo en horas desde la medianoche y $p(x)$ la potencia en kW (kilovatios).

b) Calcule el momento de la tarde (en horas y minutos) a partir del cual la salida del sistema es inferior al 40 % de su valor máximo diario de 10 kW. (4 puntos)

c) La función p tiene un punto de inflexión en el intervalo $[4, 12]$. Explica el significado de este punto de inflexión en el contexto del ejercicio. (2 puntos)

d) Toda la energía eléctrica producida por la planta se vierte a la red eléctrica. El propietario de la vivienda recibe un pago de 10 céntimos de euro por kilovatio hora (kWh) de energía eléctrica inyectada a la red.

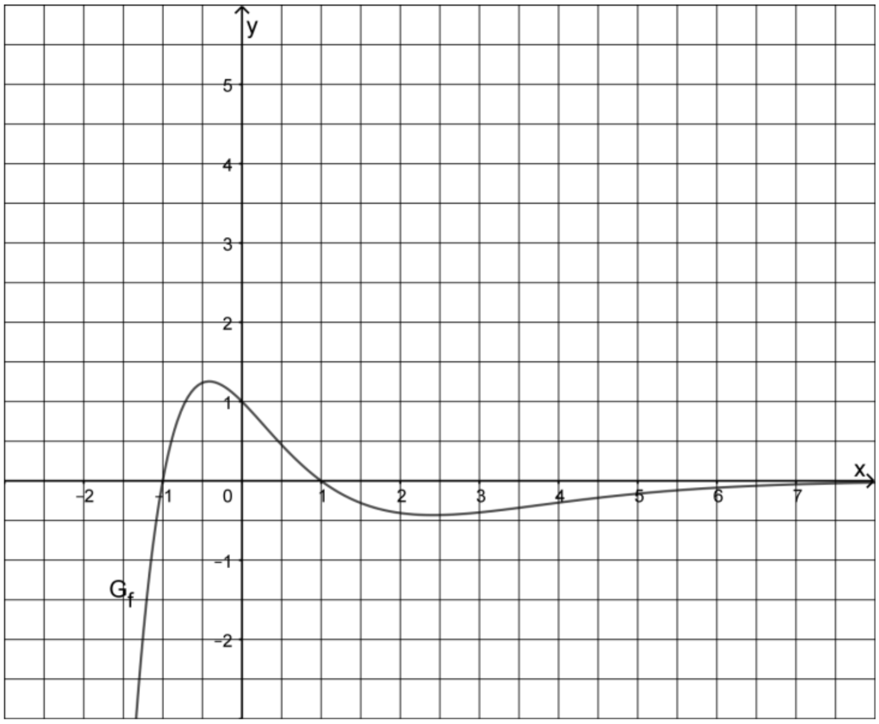
La función $x \mapsto E(x)$, definida en el intervalo $[4, 20]$ nos proporciona la energía eléctrica en kWh que genera el sistema en el día considerado desde las 4:00 am hasta las x horas y que es inyectado a la red eléctrica.

Sabemos que $E'(x) = p(x)$ para $x \in [4, 20]$.

Calcule los ingresos que reciben los propietarios en el horario de 10:00 am a 2:00 pm por energía eléctrica generada por la instalación fotovoltaica. (3 puntos)

Análisis – Opción 2

1. La función f definida en $\mathbb{R}$ está dada por $f : x \mapsto (1 - x^2) \cdot e^{-x}$. La imagen muestra la gráfica G_f de la función f.



a) Demuestre que f tiene exactamente dos raíces. (2 puntos)

b) Determine las coordenadas x de los dos extremos relativos de f. (4 puntos)

(para comprobar: $f'(x) = (x^2 - 2x - 1) \cdot e^{-x}$)

c) Utilice la imagen para determinar un valor aproximado de la integral $\displaystyle\int_{-1}^{4} f(x)\,dx$. (4 puntos)

La función real F es la primitiva de f cuya gráfica pasar por el punto $T(-1, 2)$.

d) Utilizando la imagen, demuestre que la función F tiene un mínimo local en T. (2 puntos)

e) En la imagen, dibuje la gráfica de F. Para ello, utilice que $F(1) \approx 3{,}5$ y que $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 2$. (3 puntos)

f) Interprete geométricamente en G_f el hecho de que $F(2{,}5) - F(0) \approx 0$. (2 puntos)

Consideremos la familia de funciones reales definidas por $h_k : x \mapsto (1 - kx^2) \cdot e^{-x}$, con $k \in \mathbb{R}$. La gráfica de h_k se denota por G_k. Para $k = 1$ tenemos la función f considerada hasta ahora.

g) Calcule el número de raíces de h_k en función de k. (2 puntos) *h*) Para cierto valor de k, G_k tiene dos intersecciones con el eje x que están a una distancia de 4 unidades entre sí. Calcula este valor de k. (3 puntos)

i) Estudie si existe un valor de k para el cual G_k es simétrica de G_f con respecto al eje x. (2 puntos)

2. Consideremos la función real $g : x \mapsto \dfrac{e^x}{e^x + 1}$ y denotemos G_g a su gráfica.

a) Demuestre que g es estrictamente creciente y determine la imagen del intervalo $(0, 1)$. (5 puntos)

(para comprobar $g'(x) = \dfrac{e^x}{(e^x + 1)^2}$)

b) Calcule $g'(0)$ y dibuje G_g en el intervalor $-4 \leq x \leq 4$ teniendo en cuenta los resultados anteriores y el hecho de que G_g tiene su único punto de inflexión en el punto $W(0, g(0))$. (3 puntos)

c) La gráfica de la función $g*$ se obtiene de G_g mediante una dilatación y un desplazamiento. El recorrido de la función $g*$ es el intervalo $(-1, 1)$. Obtenga una posible expresión de la función $g*$. (2 puntos)

d) Se considera la región limitada por G_g y el eje x en el intervalo $-\ln 3 \leq x \leq b$ con $b \in \mathbb{R}^x$. Determine el valor de b para el cual el eje y divide dicha región en dos conjuntos iguales. (6 puntos)

Estocástica – Opción 1

1. Cuatro familias fueron un sábado por la mañana al parque de atracciones. Había seis cajas abiertas, y las familias eligieron las cajas al azar, con igual probabilidad. Describa sucesos A y B cuyas probabilidades vengan dadas por estas expresiones:

(3 puntos)

$$P(A) = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{6^4}; \quad P(B) = \frac{6}{6^4}.$$

2. Los carros de mano se pueden pedir prestados en el área de entrada del parque de atracciones. Sabemos que el 15 % de las familias piden prestado un carro. Definimos variable aleatoria X como el número de carros de mano utilizados por las primeras 200 familias que llegan al parque de atracciones cierto día. Además, se supone que cada familia pide prestado como mucho un carro de mano y que la variable aleatoria X tiene una distribución binomial.

   a) Determine la probabilidad de que se presten al menos 25 carros de mano.

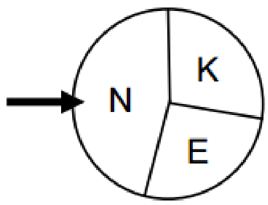
   (2 puntos)

   b) Calcule la probabilidad de que la quinta familia que llega al parque de atracciones sea la primera que pida prestado un carro de mano.

   (2 puntos)

   c) Con la ayuda de las tablas, determine el intervalo más pequeño, simétrico respecto del valor esperado, para el que la probabilidad de que la variable aleatoria X tome valores dentro del intervalo sea al menos del 75 %. (5 puntos)

3. En el parque de atracciones hay un juego de azar en el que se pueden ganar entradas. Al comienzo del juego tiras un dado, cuyas caras están numeradas del 1 al 6. Si se obtiene el número 6, se hace girar una rueda de la fortuna con tres sectores, como la representada de manera aproximada en la imagen.



Si la flecha cae en el sector K se gana una entrada de niño por valor de 28 euros, con el sector E una entrada de adulto por valor de 36 euros y con el sector N no se gana nada. El ángulo central del sector N mide 160°. El tamaño de los sectores K y E se elige de modo que el premio medio del juego sea de 3 euros. Determina la medida de los ángulos centrales de los sectores K y E. (6 puntos)

4. A la salida del parque de atracciones hay una máquina que, al apretar un botón, imprime un pin con un dibujo y luego lo reparte. Hay n dibujos diferentes y la máquina selecciona uno al azar, todos con la misma probabilidad. Un niño compra tres pines en la máquina.

a) Para el caso $n = 5$, determine la probabilidad de que los tres pines no sean los tres iguales. (2 puntos)

b) Explique por qué la probabilidad de que los tres sean diferentes toma el valor $\dfrac{(n-1)(n-2)}{n^2}$. (2 puntos)

c) Determine el valor mínimo que debe tomar n para que la probabilidad de que los tres pines sean diferentes sea mayor que el 90 %. (3 puntos)

Estocástica – Opción 2

Una empresa de confitería produce diferentes tipos de gominolas de frutas.

1. Luisa participa en una visita a la fábrica. Al comienzo del recorrido recibe una bolsa con diez ositos de los cuales cinco son blancos, dos son rojos y tres son verdes. Luisa abre la bolsa y saca tres ositos sin mirar. Calcula la probabilidad de que los tres ositos sean del mismo color. (3 puntos)

2. Antes del envasado, los ositos de diferentes colores se mezclan en grandes recipientes, y sabemos que la proporción de ositos rojos es del 25 % del total. Una máquina envasadora llena con 50 ositos una bolsa grande.

   a) Calcula la probabilidad de que más de un tercio de los ositos de una bolsa seleccionada al azar sean rojos. (3 puntos)

   b) Para asegurarse de que cada bolsa tiene exactamente 50 ositos, caen uno tras otro por una abertura de una máquina de envasado. Describe en este contexto un suceso cuya probabilidad corresponda a esta expresión: (3 puntos)

$$\sum_{k=0}^{3}(0{,}75^k \cdot 0{,}25).$$

   c) Determina la proporción mínima de ositos amarillos que se deben fabricar para que la probabilidad de que en una bolsa seleccionada al azar haya algún osito amarillo sea al menos el 95 %. (2 puntos)

3. La empresa de confitería también produce dulces veganos y con poca azúcar. Necesitan llevarlos en bolsas debidamente etiquetadas al comercio.

   La cantidad de bolsas no marcadas como veganas es el triple de la cantidad de bolsas veganas. El 42 % de las bolsas etiquetadas como veganas también están marcadas como bajas en azúcar. En general, el 63 % de las bolsas no estándar (es decir, ni veganas ni bajas en azúcar).

   Se consideran los siguientes sucesos:

   V: "Una bolsa seleccionada al azar está marcada como vegana".

   R: "Una bolsa seleccionada al azar está marcada como baja en azúcar".

   a) Calcule la probabilidad del suceso R^c. (3 puntos)

   b) Calcule la probabilidad $P(R|V^c)$. (3 puntos)

   c) Describa el significado de la probabilidad $1 - P(R|V^c)$ en este contexto. (2 puntos)

4. En una campaña publicitaria, las bolsas de gelatina de frutas se venden con tarjetas para raspar. Cuando se rasca, se pueden ver hasta tres manzanas doradas en la tarjeta. La variable aleatoria X describe la cantidad de manzanas doradas que aparecen cuando se rasca la tarjeta. La tabla muestra la distribución de probabilidad de X.

k	0	1	2	3
$P(X=k)$	p_0	p_1	0,2	0,1

a) El valor esperado de la variable aleatoria X es 1. Determinar las probabilidades p_0 y p_1 y calcule la varianza de X. (3 puntos)

b) Sin conocer el valor esperado, la varianza generalmente no es significativa. Por esta razón, se puede considerar el cociente de la desviación estándar y el valor esperado, que se conoce como la desviación estándar relativa.

La variable aleatoria Y_n describe el número de manzanas doradas que se obtienen al raspar n tarjetas. Sabemos que $E(Y_n) = n$ y que $VAR(Y_n) = n$. Determine el valor de n para el cual el valor de la desviación estándar relativa es el $5\,\%$. (2 puntos)

Geometría – Opción 1

1. Los puntos $A(6,0,4)$, $B(0,6,4)$, $C(-6,0,4)$ y D están en el plano E y son los vértices de la base cuadrada de una pirámide $ABCDS$ con vértice $S(0,0,1)$. A, B y S están en el plano F.

   a) Demuestre (con un cálculo) que el triángulo ABS es isósceles. Calcule las coordenadas del punto D y describa la ubicación del plano E en el sistema de coordenadas. (4 puntos)

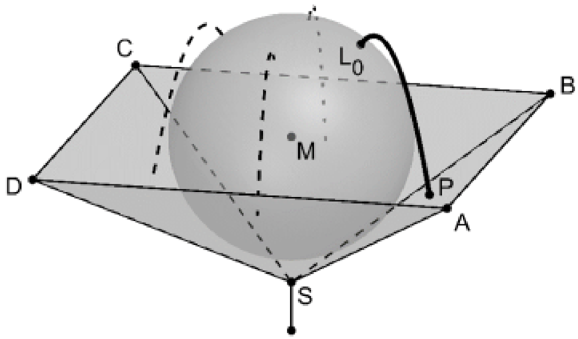
   b) Obtenga una ecuación del plano F. (3 puntos)

   (para comprobar: $F : x_1 + x_2 - 2x_3 + 2 = 0$)

   c) Calcule el volumen V de la pirámide $ABCDS$. (3 puntos)

   (para comprobar: $V = 72$)

La fuente que se muestra en la imagen está formada por una esfera de mármol colocada en un cuenco de bronce sobre un poste. La bola de mármol toca a cada una de las cuatro paredes interiores del cuenco de bronce en un punto. El cuenco de bronce está representado por las caras de la pirámide $ABCDS$ y la bola de mármol por la esfera con centro $M(0,0,4)$ y radio r. El plano x_1x_2 es paralelo al suelo sobre el que está construido el modelo. Una unidad en el sistema de coordenadas corresponde a un decímetro en la realidad.



   d) Determine el diámetro de la bola de mármol, redondeando al centímetro. (4 puntos)

   (para comprobar: $r = \sqrt{6}$)

   e) Demuestre que el punto más alto de la fuente está a unos 64 cm de altura con respecto al suelo. (2 puntos)

Existen fuentes de agua en cuatro lugares de la superficie de la esfera de mármol. Uno de estos puntos de salida está representado en el modelo por el punto $L_0(1,1,6)$. La trayectoria del agua que sale por ese punto está modelada por los puntos de la curva $L_t(t+1; t+1; 6{,}2 - 5 \cdot (t - 0{,}2)^2)$ para un intervalo de valores de $t \in \mathbb{R}^+$.

f) El punto P, que se encuentra dentro del triángulo ABS, es el punto donde la trayectoria del agua choca con el cuenco de bronce (ver figura). Determine las coordenadas de P. (4 puntos)

g) Compruebe si la trayectoria del agua supera en algún punto la altura total de la fuente. (2 puntos)

h) Las cuatro salidas de agua vierten en total 80 ml de agua cada segundo. Determine el tiempo en segundos que transcurre hasta que el cuenco inicialmente vacío está completamente lleno de agua. (4 puntos)

El cuerpo que se muestra en la imagen está delimitado por una base cuadrada $ABCD$ con $A(5,5,0)$, $B(-5,5,0)$, $C(-5,-5,0)$ y $D(5,-5,0)$, ocho caras triangulares y otra cara cuadrada $EFGH$ con $E(2,0,4)$, $F(0,2,4)$, $G(-2,0,4)$ y $H(0,-2,4)$. El punto medio S del cuadrado $ABCD$ es el origen del sistema de coordenadas y todo el cuerpo es simétrico tanto con respecto al plano x_1x_3 como con respecto al plano x_2x_3.

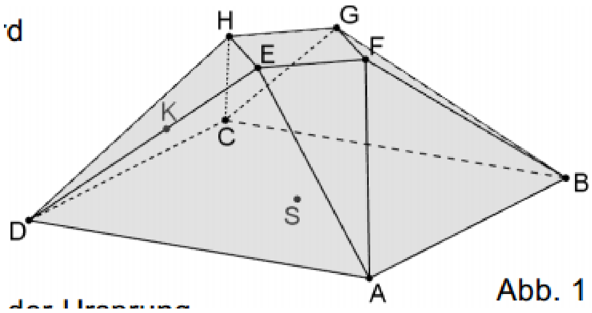


Abb. 1

a) Demuestre que el triángulo ABF tiene un ángulo recto en F. (2 puntos)

b) El triángulo ABF se encuentra en el plano W. Encuentre una ecuación de W y describa la posición de W en el sistema de coordenadas. (4 puntos)

(para comprobar: $W: 4x_2 + 3x_3 - 20 = 0$)

c) Calcule la medida del ángulo agudo formado por la cara ABF y la base $ABCD$. (3 puntos)

En el segmento DE hay un punto K para el cual $|KE| = |EF|$.

d) Calcule las coordenadas del punto K. (4 puntos)

e) Demuestre que $N(1{,}6; 0; 3{,}2)$ es el punto medio del segmento KF. La línea recta EN biseca el ángulo interior del triángulo DFE en E. Compruebe que el punto S está en la recta EN. (4 puntos)

f) El poliedro se puede dividir en nueve pirámides, cada una de las cuales es congruente con una de las tres pirámides $ABFS$, $HDES$ o $EFGHS$ que se muestran en la imagen. El volumen de la pirámide $ABFS$ es $33\,\frac{1}{3}$ y el volumen de la pirámide $HDES$ es $13\,\frac{1}{3}$. Determine el volumen total del poliedro. (4 puntos)

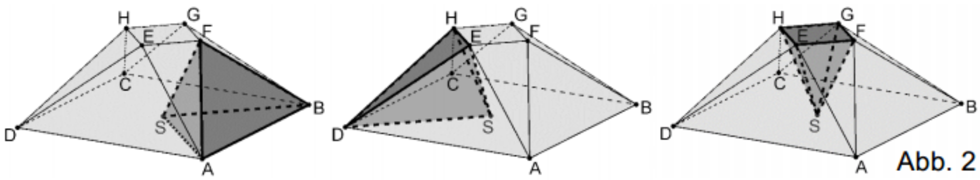


Abb. 2

g) Existe una única esfera que pasa por los ocho vértices del poliedro. Encuentra las coordenadas del centro de esta esfera. (4 puntos)