

---

---

## AUTOEXPLICACIONES DE LA GACETA

Sección a cargo de

**Un Responsable de Sección**

---

---

### Puntos, aristas y cruces

por

**Pedro Ramos Alonso,**  
**Departamento de Matemáticas,**  
**Universidad de Alcalá, 28871, Alcalá de Henares, Madrid.**  
pedro.ramos@uah.es

## 1. INTRODUCCIÓN

En este trabajo nos proponemos presentar dos grupos de problemas que tienen en común las siguientes características:

- El objeto de estudio es un conjunto de  $n$  puntos del plano en posición general (es decir, sin tres puntos colineales), y los segmentos por ellos definidos.
- Son llamativamente sencillos de enunciar.
- Han demostrado ser notoriamente difíciles de resolver, y varios de ellos continúan abiertos tras más de 25 años de intensos ataques.

Para enunciar el primer grupo de problemas, sólo necesitamos el concepto de  $j$ -arista: dado un conjunto de  $n$  puntos del plano en posición general,  $S$ , cada pareja de puntos  $p$  y  $q$  define una recta orientada que deja un cierto número de puntos de  $S$  a su derecha. Decimos que  $pq$  es una  $j$ -arista si ese número es exactamente  $j$ . Por ejemplo, las 0-aristas son las aristas del cierre convexo de  $S$ , orientadas en sentido antihorario. El concepto de  $j$ -arista está muy relacionado con el de  $k$ -conjunto: un subconjunto  $T \subset S$ , de cardinal  $k$ , es un  $k$ -conjunto si los conjuntos  $T$  y  $S \setminus T$  se pueden separar con una recta. El primer grupo de problemas que trataremos

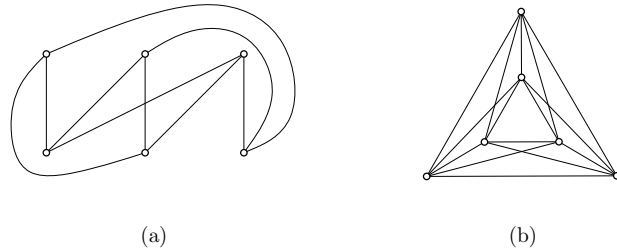


Figura 1: (a)  $\text{cr}(K_{3,3}) \leq 1$ . (b)  $\overline{\text{cr}}(K_6) \leq 3$ .

es acotar, generalmente en términos del cardinal de  $S$ , el máximo y el mínimo de  $j$ -aristas que puede tener un conjunto  $S$ .

Un grafo  $G = (V, E)$  es un par formado por un conjunto de *vértices*  $V$  y un conjunto de *aristas*  $E$ , que no son más que pares de vértices. En el *grafo completo*, denotado por  $K_n$ , el conjunto de vértices tiene cardinal  $n$  y las aristas son todos los pares de vértices. En el grafo *bipartido completo*, denotado por  $K_{n,m}$ , los vértices se pueden dividir en dos subconjuntos  $A$  y  $B$ , de tamaño  $n$  y  $m$ , de manera que todos los vértices de  $A$  son adyacentes a todos los vértices de  $B$ . Es importante distinguir entre el grafo  $G$  como objeto combinatorio y una representación suya en el plano como la de la Figura 1.a, donde los vértices son puntos del plano y las aristas son curvas que los conectan.

Un mismo grafo  $G$  se puede dibujar de muchas maneras en el plano. Los cortes entre aristas pueden variar de unas representaciones a otras, y en general se buscan dibujos del plano con tan pocos cruces como sea posible. El número de cruce  $\text{cr}(G)$  es el mínimo número de cortes entre aristas con el que es posible representar el grafo  $G$ . Por ejemplo, el resultado que afirma que el grafo  $K_{3,3}$ , *no es plano* (es decir, no se puede representar en el plano sin cruces), se puede enunciar diciendo que  $\text{cr}(K_{3,3}) \geq 1$ . La Figura 1.a, donde se representa dicho grafo con un solo cruce, muestra que, de hecho,  $\text{cr}(K_{3,3}) = 1$ .

Cuando se requiere que las aristas sean segmentos de recta, hablamos del *número de cruce rectilíneo*, denotado por  $\overline{\text{cr}}(G)$ . El segundo problema que presentaremos es el de determinar el número de cruce rectilíneo del grafo completo, es decir, determinar el mínimo número de intersecciones que aparecen cuando consideramos todos los segmentos definidos por un conjunto de  $n$  puntos del plano. El ejemplo de Figura 1.b muestra que  $\overline{\text{cr}}(K_6) \leq 3$ . Para demostrar que cualquier dibujo rectilíneo de  $K_6$  tiene al menos tres cruces, hasta hace relativamente poco no se conocían más herramientas que el estudio más o menos sistemático de todas las posibles configuraciones.

El problema de determinar  $\overline{\text{cr}}(K_n)$  es equivalente al de determinar el mínimo número de cuadriláteros convexos que contiene un conjunto de  $n$  puntos, como seguramente saltará a la vista al contemplar la Figura 1.b. En 2004, y de forma independiente, Ábrego y Fernández-Merchant [2] y Lovász et al. [24] encontraron una fórmula que relaciona el vector de  $j$ -aristas de un conjunto  $S$  con el número de cuadriláteros convexos que contiene, lo que reactivó la investigación en ambos

problemas.

En la mayor parte de los casos, nos centraremos en el comportamiento asintótico de funciones en términos de  $n$ , el tamaño del conjunto de puntos. Para ello, utilizaremos la siguiente notación:

- \*  $f(n)$  es  $O(g(n))$  si existen  $c > 0$  y  $n_0 \in \mathbb{N}$  tales que  $f(n) \leq cg(n)$  para todo  $n \geq n_0$ .
- \*  $f(n)$  es  $\Omega(g(n))$  si existen  $c > 0$  y  $n_0 \in \mathbb{N}$  tales que  $f(n) \geq cg(n)$  para todo  $n \geq n_0$ .
- \*  $f(n)$  es  $\Theta(g(n))$  si es tanto  $O(g(n))$  como  $\Omega(g(n))$ , es decir, si existen  $c_1, c_2 > 0$  y  $n_0 \in \mathbb{N}$  tales que  $c_1g(n) \leq f(n) \leq c_2g(n)$  para todo  $n \geq n_0$ .

## 2. $j$ -ARISTAS Y $j$ -CONJUNTOS.

En este trabajo,  $S$  será siempre un conjunto de  $n$  puntos del plano en posición general, es decir, sin tres puntos colineales.

DEFINICIÓN 1.

1. Dados  $p, q \in S$ , diremos que  $pq$  es una  $j$ -arista (orientada) de  $S$  si hay exactamente  $j$  puntos de  $S$  a la derecha de la recta orientada definida por  $pq$ .
2. Un subconjunto  $T \subset S$  es un  $k$ -conjunto de  $S$  si  $|T| = k$  y los conjuntos  $T$  y  $S \setminus T$  se pueden separar con una recta.

Denotamos por  $e_j(S)$  el número de  $j$ -aristas de  $S$ , y por  $g_k(S)$  el número de  $k$ -conjuntos de  $S$ . Nuestro primer resultado muestra una relación muy sencilla entre estas dos cantidades.

LEMA 1. Si  $S$  es un conjunto de puntos en posición general,  $e_j(S) = g_{j+1}(S)$  para todo  $j = 0, \dots, n - 2$ .

DEMOSTRACIÓN. Dado un  $(j + 1)$ -conjunto  $T$ , existe una única  $j$ -arista  $pq$  que tiene  $T$  a su derecha y tal que  $p \in S \setminus T$  y  $q \in T$ . Recíprocamente, a una  $j$ -arista  $pq$  que deja el conjunto  $T'$  a su derecha, le podemos asignar el  $(j + 1)$ -conjunto  $T' \cup \{q\}$ . Es sencillo ver que esta relación, ilustrada en la Figura 2.b), es una biyección.  $\square$

En lo que sigue, nos ocuparemos sólo de las  $j$ -aristas. El Teorema 2 nos dará una cota inferior para  $e_j(S)$ . Por el momento, la siguiente observación nos muestra fácilmente que  $e_j(S) > 0$ : un vértice del cierre convexo es adyacente exactamente a una  $j$ -arista para todo  $j = 0, \dots, n - 2$ . Merece la pena mencionar que, aunque estos conceptos son directamente generalizables a dimensiones superiores, la relación entre  $e_j(S)$  y  $g_{j+1}(S)$  ya no es tan directa. Andrzejak y Welzl [11] demostraron que, si  $S \subset \mathbb{R}^d$ ,  $e_j$  se puede expresar como combinación lineal de  $g_{j+1}, \dots, g_{j+d-1}$ .

Obsérvese que, al considerar  $j$ -aristas orientadas, se tiene que  $e_j = e_{n-j-2}$ : en efecto, si  $pq$  es una  $j$ -arista, entonces  $qp$  es una  $(n-j-2)$ -arista, y recíprocamente. Por tanto, solo nos interesan los términos  $e_j$  con  $j \leq \frac{n-2}{2}$ . De forma análoga, para los  $k$ -conjuntos se tiene que  $g_k = g_{n-k}$ . Como veremos enseguida, el caso  $n$  par y  $j = \frac{n-2}{2}$

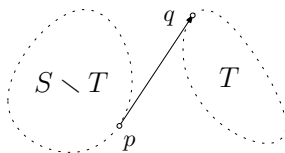


Figura 2: Ilustración de la biyección del Lema 1.

es especialmente importante: las  $\binom{n-2}{2}$ -aristas se conocen como *rectas bisectrices* de  $S$ . Denotaremos por  $b(S)$  al número de rectas bisectrices del conjunto  $S$ . Obsérvese que, según el Lema 1,  $b(S)$  es también el número de formas en que puede dividirse por la mitad el conjunto  $S$ , con la salvedad de que la división en los conjuntos  $T$  y  $S \setminus T$  se cuenta dos veces, una para  $T$  y otra para  $S \setminus T$ .

Calcular  $e_j(S)$  para un conjunto  $S$  dado es sencillo, y se puede hacer con un algoritmo cuya complejidad depende, esencialmente, del número de  $j$ -aristas encontradas. Por tanto, el problema fundamental es dar cotas superiores e inferiores de  $e_j(S)$  en función de  $n$ .

Comencemos con un primer teorema que fue originalmente demostrado por Erdős, Lovász, Simmons y Strauss en [17] y que es una generalización del Lema de Lovász [23].

Solo necesitamos un mínimo de notación: dada una recta orientada  $\ell$ , los semiplanos abiertos a su derecha y a su izquierda se denotan, respectivamente, como  $\ell^+$  y  $\ell^-$ .

**TEOREMA 1.** *Sea  $S$  un conjunto de  $n$  puntos del plano en posición general, y sea  $T$  un  $k$ -conjunto de  $S$ . Si  $j = 0, \dots, \frac{n-2}{2}$ , el número de  $j$ -aristas  $pq$ , tales que  $p \in T$  y  $q \in S \setminus T$  es exactamente  $\min\{k, n - k, j + 1\}$ .*

**DEMOSTRACIÓN.** Supongamos que  $k \leq n/2$ , es decir, que  $\min\{k, n - k\} = k$  (el caso contrario se trata de forma análoga). Sea  $\ell$  una recta que separa  $T$  de  $S \setminus T$  y consideremos la recta orientada  $\ell_i$  definida de la siguiente forma: es paralela a  $\ell$ , pasa por un punto de  $T$ , y deja  $i$  puntos de  $T$  (y ninguno de  $S \setminus T$ ) a su derecha (véase la Figura 3.a). La demostración se basa en una técnica que se ha demostrado muy útil en este tipo de problemas, y que presentamos a continuación. Consideremos el siguiente movimiento de la recta  $\ell_i$ : la recta gira de forma continua alrededor de un punto  $p \in T$  (el pivote) de forma que, cuando la recta pasa por un único punto de  $T$ , hay exactamente  $i$  puntos de  $T$  a su derecha. Obsérvese que, para mantener esta condición, cuando se encuentra un segundo punto de  $T$  en la rotación, el pivote debe cambiar. Es sencillo ver que, cuando la recta ha completado una rotación de  $360^\circ$ , se han encontrado todas las  $i$ -aristas de  $T$  (y también las  $(i - 1)$ -aristas). Este es precisamente el objetivo con el que se utilizó esta técnica en el artículo [17], antes mencionado.

Estamos interesados en una rotación de  $180^\circ$ : al comenzar la rotación, se tiene que  $|\ell_i^+ \cap S| = i$ , en tanto que tras girar  $180^\circ$ ,  $|\ell_i^+ \cap S| = n - i - 1$ . Obsérvese que, durante esta rotación, el número de puntos de  $S$  en  $\ell^+$  es no decreciente, y sólo aumenta cuando se encuentran puntos de  $S \setminus T$ . Consideremos un índice  $i \leq \min\{k - 1, j\}$

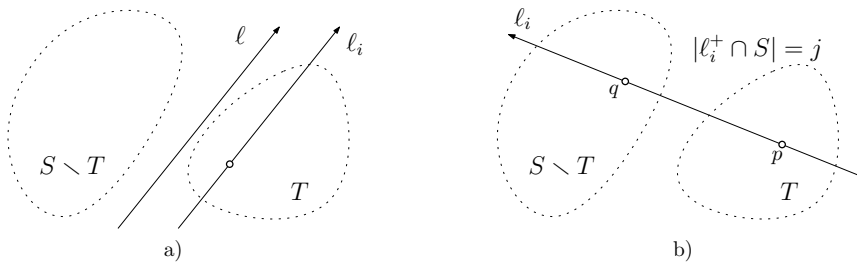


Figura 3: Ilustración de la prueba del Teorema 1.

(obsérvese que se tiene  $n - i - 1 \geq j + 1 \geq i + 1$ ). La rotación empieza con  $i \leq j$  puntos de  $S$  a la derecha de  $\ell_i$ , y termina con  $n - i - 1 \geq j + 1$  puntos en dicho semiplano. Pero la situación en que se produce el cambio  $j \rightsquigarrow j + 1$  debe ser exactamente como se muestra en la Figura 3.b), en la que  $pq$  es una  $j$ -arista de  $S$ . Por tanto, para cada  $i = 0, \dots, \min\{k - 1, j\}$  hemos encontrado una  $j$ -arista de  $S$ , y deben ser todas distintas ya que cada una deja exactamente  $i$  puntos de  $T$  a su derecha.  $\square$

El teorema anterior nos dice que si  $\ell$  es una recta que no contiene a ningún punto de  $S$ , el número de  $j$ -aristas que cortan a  $\ell$  sólo depende del tamaño de los conjuntos en que la recta divide a  $S$ . El resultado fue utilizado por Lovász et al. [24] para dar una cota inferior del número de  $j$ -aristas que debe tener cualquier conjunto de  $n$  puntos:

**TEOREMA 2.** *Si  $S$  es un conjunto de  $n$  puntos del plano en posición general y  $j < \frac{n-2}{2}$ , se tiene que  $e_j(S) \geq 2j + 3$ . Además, la cota es óptima.*

**DEMOSTRACIÓN.** Observemos primero que la restricción  $j < \frac{n-2}{2}$  es importante. Consideremos los vértices de un polígono regular de  $n$  vértices. Si  $n$  es par y  $j = \frac{n-2}{2}$ , el número de  $j$ -aristas es exactamente  $n = 2j + 2$  (obsérvese que, al estar las  $j$ -aristas orientadas,  $pq$  y  $qp$  son ambas  $j$ -aristas).

Sea entonces  $j \leq \frac{n-3}{2}$  y sea  $pq$  una  $j$ -arista de  $S$  (dejamos que el lector se convenza de que siempre hay al menos una). Consideremos una recta  $\ell$  paralela a la  $j$ -arista  $pq$ , y tal que  $|\ell^+ \cap S| = j + 2$ ; es decir, desplazamos a la izquierda de la recta soporte de  $pq$  una distancia suficientemente pequeña. Según el Teorema 1, el número de aristas definidas por un punto a cada lado de  $\ell$  es exactamente  $2 \min\{j + 1, j + 2, n - j - 2\} = 2(j + 1)$ , al ser  $j \leq \frac{n-3}{2}$ . Añadiendo la arista  $pq$  obtenemos la cota del enunciado.

Para demostrar que esta cota es ajustada, considérese el siguiente conjunto: el cierre convexo son los vértices de un  $(2j + 3)$ -gono regular y los  $n - 2j - 3$  puntos restantes están situados “en el centro” del conjunto. En concreto, si etiquetamos los vértices del cierre convexo como  $p_1, p_2, \dots, p_{2j+3}$  (en sentido antihorario), el resto de los puntos están situados en la región  $C$  que queda a la izquierda de todas las rectas  $p_i p_{i+j+1}$  (los subíndices se toman módulo  $2j + 3$ , véase la Figura 4). En esta situación, es claro que las únicas  $j$ -aristas del conjunto son de la forma  $p_i p_{i+j+1}$ , pues cualquier recta que pase por un punto en  $C$  deja al menos  $j + 1$  puntos a cada lado.  $\square$

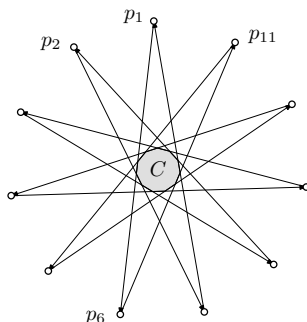


Figura 4: Construcción para la cota inferior del Teorema 2 para  $j = 4$ .

Es muy posible que en la cabeza de muchos lectores ronde la idea de que un problema de este tipo, sobre objetos tan “sencillos”, y especialmente en el caso de dimensión 2, va a tener siempre una respuesta, quizá sutil, pero en todo caso sencilla. El siguiente problema que trataremos, la cota superior para  $e_j(S)$ , ha resistido hasta ahora multitud de ataques.

Consideremos la función  $e_j(n) = \max_{|S|=n} e_j(S)$ . En particular, en el resto de esta sección nos centraremos en la función  $b(n) := e_{n/2}(n)$ , con  $n$  par, que de hecho determina el resto. Un argumento probabilístico con varias aplicaciones en geometría combinatoria (véase por ejemplo [25]), permite demostrar que, para cualquier  $\varepsilon > 0$  constante, si  $b(n) = O(n^{2-\varepsilon})$  se tiene que  $e_j(n) = O(n(j+1)^{1-\varepsilon})$ <sup>1</sup>.

El valor exacto de  $b(n)$  solo se conoce para valores pequeños de  $n$ . En la Figura 5 se muestran configuraciones de puntos que maximizan la función  $b(n)$  para  $n = 10$  (a) y  $n = 12$  (b). Los últimos avances en el problema de determinar el valor exacto de  $b(n)$  se deben a Ábrego et al. [4], que han obtenido cotas inferiores para  $b(n)$  que alcanzan los valores de las construcciones de Aichholzer [5] hasta  $n = 26$ .

En lo que sigue, nos ocuparemos del comportamiento asintótico de la función  $b(n)$ . La exposición está adaptada del artículo de U. Wagner [30], que es la referencia perfecta para el lector que quiera profundizar en el estudio de estos problemas.

La cota superior, debida a Dey [14], combina dos resultados “clásicos”. El primero, el siguiente lema, debido a Lovász [23], muestra una propiedad de “entrelazamiento” de las aristas bisectrices, y ha sido generalizado posteriormente a dimensiones superiores.

**LEMA 2.** *Si  $pq$  y  $pr$  son aristas bisectrices, existe  $s \in S$  tal que  $ps$  es arista bisectriz y, tal que  $p$  está contenido en el triángulo  $\Delta(rqs)$ .*

**DEMOSTRACIÓN.** La demostración se basa en considerar una rotación de la recta (orientada)  $pq$ , alrededor de  $p$ , y en el sentido en el que encontramos el punto  $r$  con una rotación menor de  $180^\circ$ . De las dos situaciones posibles, consideramos el caso de la Figura 6, que corresponde a una rotación en sentido positivo. El otro caso se trata

<sup>1</sup>La notación asintótica aquí significa que existe una constante  $C$ , independiente de  $n$  y de  $j$ , pero quizá dependiente de  $\varepsilon$ , tal que  $e_j(n) \leq C n (j+1)^{1-\varepsilon}$  para todo  $j \geq 0$  (y  $n \geq 2j$ )

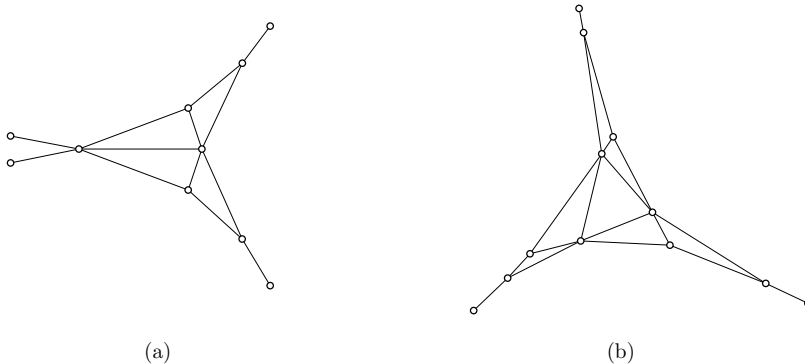


Figura 5: Conjuntos de puntos que maximizan  $b(n)$  para  $n = 10$  (a) y  $n = 12$  (b).

de forma análoga. La recta  $pq$  tiene a la derecha  $\frac{n}{2} - 1$  puntos y, por tanto, al dejar  $q$  hay  $\frac{n}{2}$  puntos a la derecha de la recta. Como  $pr$  también es una arista bisectriz, a la derecha de la recta  $pr$  y, por tanto, también a la derecha de la recta del giro inmediatamente antes de alcanzar  $r$ , hay exactamente  $\frac{n}{2} - 1$  puntos. Por tanto, en el giro ha ocurrido la transición  $\frac{n}{2} \rightsquigarrow \frac{n}{2} - 1$ , que corresponde necesariamente a un punto  $s$  que es alcanzado en el semiplano de la derecha de la recta de giro, es decir, tal que  $p$  está contenido en el triángulo  $\Delta(rqs)$ .  $\square$

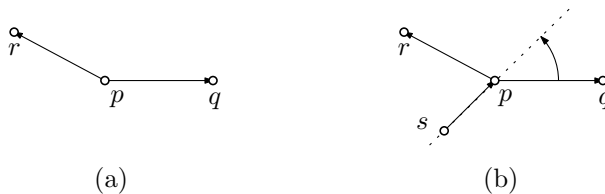


Figura 6: Ilustración de la propiedad de “entrelazamiento”.

Si al resultado anterior le añadimos la sencilla observación de que cualquier punto  $p \in S$  participa en, al menos, una recta bisectriz (si consideramos una recta horizontal por  $p$ , y hacemos una rotación de  $180^\circ$  como la anterior, en algún momento hemos debido encontrar una recta bisectriz), hemos demostrado también que el número de rectas bisectrices incidentes a un punto dado es siempre impar.

El segundo ingrediente que necesitamos es el “lema de los cruces”: dado un grafo  $G$  de  $n$  vértices y  $m$  aristas, recordemos que el *número de cruce* de  $G$ ,  $cr(G)$ , es el menor número de intersecciones entre aristas que debe haber en cualquier representación de  $G$  en el plano. Ajtai et al. [9] e, independientemente, Leighton [22] demostraron el siguiente resultado, que da una cota inferior para el número de cruce de un grafo que es, salvo la constante, óptima para grafos con un número de aristas mayor que lineal. Posteriormente, Chazelle, Sharir y Welzl encontraron un elegante

argumento probabilístico que prueba el resultado, y que es sin duda una de las demostraciones de “El Libro” [8].

TEOREMA 3. *Sea  $G$  un grafo simple con  $n$  vértices y  $m$  aristas. Si  $m \geq 4n$  entonces*

$$\text{cr}(G) \geq \frac{1}{64} \frac{m^3}{n^2}.$$

Reprimiendo la tentación de presentar la demostración de este resultado (si bien recomendando fervientemente su lectura al lector que no la conozca), pasamos a exponer la demostración de la cota superior para  $b(n)$  encontrada por Dey[14] (Teorema 4). En primer lugar, utilizaremos el Lema 2 para descomponer el conjunto de rectas bisectrices en cadenas convexas<sup>2</sup> de la siguiente forma: supongamos que hemos etiquetado el conjunto de puntos por abscisa creciente y que  $p_1$  es, por tanto, el punto más a la izquierda del conjunto. Consideramos la recta vertical por  $p_1$  y orientada hacia abajo, y la giramos alrededor de  $p_1$ , en sentido positivo, hasta obtener una recta bisectriz  $p_1p_i$ . Estamos seguros de que el lector ya está suficientemente familiarizado con esta técnica para convencerse de forma inmediata de que siempre existe tal punto  $p_i$ . A continuación, giramos la recta  $p_1p_i$  alrededor de  $p_i$ , y siempre en sentido positivo, hasta encontrar la primera recta bisectriz  $p_i p_j$ . Si la recta llega a ser vertical (ahora orientada hacia arriba) sin encontrar tal  $p_j$ , la cadena  $L_1$  está formada únicamente por la arista  $p_1p_i$ . Si existe, ya tenemos que  $p_1p_i, p_i p_j \subset L_1$ , y repetimos el paso anterior, girando ahora alrededor de  $p_j$ .

Al repetir el proceso con los puntos  $p_2, p_3, \dots, p_{n/2}$  el conjunto de aristas bisectrices se descompone en, exactamente,  $n/2$  cadenas convexas  $L_1, \dots, L_{n/2}$ . Además, cada cadena convexa tiene un extremo en uno de los puntos  $p_1, \dots, p_{n/2}$  y el otro en uno de los puntos  $p_{n/2+1}, \dots, p_n$ . Dejamos los detalles de este proceso para el lector, mencionando que es suficiente comprobar que: i) si  $i \leq n/2$ , el número de rectas bisectrices de la forma  $p_i p_j$ , con  $j > i$ , es exactamente uno más el número de rectas bisectrices de la forma  $p_k p_i$ , con  $k < i$  (y lo análogo para  $i > n/2$ ); ii) según el Lema 2, si  $e$  y  $e'$  son dos aristas bisectrices incidentes a  $p_i$  desde puntos a la izquierda, existe una arista bisectriz hacia la derecha en el ángulo definido por  $e$  y  $e'$ .

De forma totalmente análoga, pero empezando ahora con una recta vertical por  $p_1$  y orientada hacia arriba, el conjunto de rectas bisectrices se descompone en  $n/2$  cadenas cóncavas  $U_1, \dots, U_{n/2}$ . En la Figura 7 se puede ver un ejemplo de esta descomposición.

Si consideramos ahora el grafo  $B$  formado por las aristas bisectrices de  $S$ , podemos acotar fácilmente el número de cruces entre sus aristas: si dos aristas  $e$  y  $e'$  se cortan, podemos cargar dicha intersección al corte entre la única cadena convexa  $L_i$  que contiene a  $e$  y la única cadena cóncava  $U_j$  que contiene a  $e'$ . Como una cadena convexa y una cóncava se cortan a lo más en dos puntos, concluimos que el número de intersecciones entre aristas bisectrices es a lo más  $2(n/2)^2$ . Obsérvese que el número de cruce de  $B$  no es el número de intersecciones entre aristas, pues podría haber otros trazados diferentes con menos intersecciones. Lo que hemos concluido es

<sup>2</sup>Aquí, una cadena convexa es una poligonal que es el grafo de una función convexa.



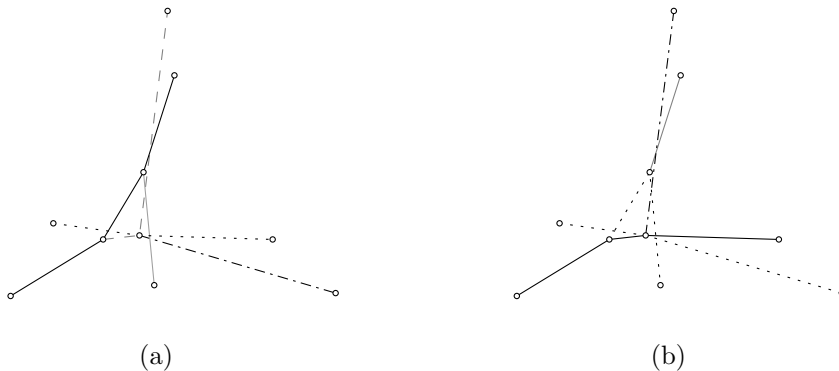


Figura 7: Cadenas formadas por aristas bisectrices: convexas (a) y cóncavas (b).

que  $cr(B) \leq 2(n/2)^2$ . Pero esto es exactamente lo que necesitamos para, utilizando el lema de los cruces, concluir que

$$2\left(\frac{n}{2}\right)^2 \geq cr(B) \geq \frac{1}{64} \frac{b(n)^3}{n^2} \Rightarrow b(n) = O(n^{4/3}).$$

Enunciamos el teorema para futura referencia:

TEOREMA 4 ([14]). *Para cualquier conjunto de  $n$  puntos en posición general se tiene que*

$$b(n) = O(n^{4/3}).$$

Veamos ahora una idea de cómo se pueden construir conjuntos de puntos con muchas rectas bisectrices. La técnica básica es duplicar puntos: si  $pq$  es una recta bisectriz de  $S$ , y duplicamos los puntos  $p$  y  $q$ , es decir, los sustituimos por puntos  $p_1$  y  $p_2$  y  $q_1$  y  $q_2$ , respectivamente, de forma que todas las rectas definidas por pares de puntos de la forma  $p_iq_j$  dividan al resto del conjunto de la misma forma que lo hacía la recta definida por  $pq$ , es claro que exactamente dos de las rectas  $p_iq_j$  son bisectrices del nuevo conjunto. Con esta estrategia, por tanto, duplicamos el número de bisectrices al duplicar el número de puntos, con lo que obtenemos una cota inferior lineal.

Una primera mejora de esta cota se consigue con la estrategia que se ilustra en la Figura 8: seleccionemos ahora un subconjunto  $P \subset S$ , con  $n/2$  puntos, y para cada  $p \in P$  una recta bisectriz  $e(p)$ , de forma que si  $p_1, p_2 \in P$ ,  $e(p_1) \neq e(p_2)$ . Esto se puede hacer de forma iterativa, eligiendo en cada paso un punto  $p$  y una recta bisectriz adyacente a él. Ahora duplicamos todos los puntos de la siguiente forma: si  $p \in P$ , lo sustituimos por dos puntos  $p_1$  y  $p_2$  de forma que la recta  $p_1p_2$  pase por  $q$ , el otro extremo de la arista bisectriz adyacente a  $p$  previamente elegida; si  $q \notin P$  es el extremo de  $e(p)$ , lo sustituimos por los puntos  $q_1$  y  $q_2$ , uno a cada lado de la recta  $pq$  y suficientemente cerca para que las rectas definidas por los pares de puntos de la forma  $p_iq_j$  dividan al resto del conjunto igual que lo hacía la recta  $pq$ . Veamos qué ha ocurrido con el número de rectas bisectrices del nuevo conjunto,  $S_1$ : por un

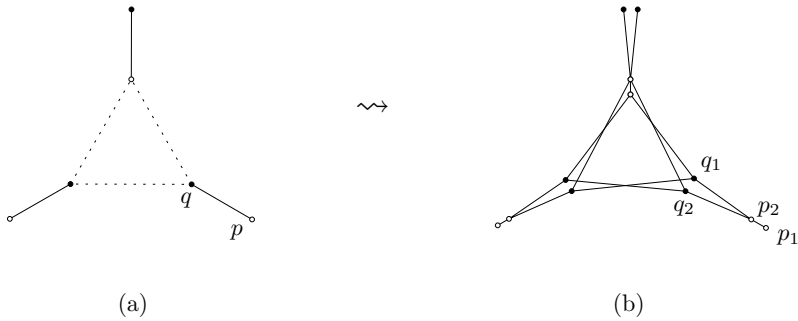


Figura 8: Duplicación de puntos para conseguir  $\Omega(n \log n)$  rectas bisectrices. Los puntos de  $P$  son los blancos, y las aristas bisectrices asociadas las de líneas continuas.

lado, cada recta bisectriz de  $S$  da lugar a dos bisectrices de  $S_1$ , igual que antes. Pero, además, para cada punto  $p \in P$  obtenemos otra recta bisectriz, la definida por  $p_1$  y  $p_2$ . La recursión sigue entonces la fórmula  $b(2n) \geq b(n) + \frac{n}{2}$ , cuya solución es  $b(n) = \Omega(n \log n)$ .

La estrategia de inserción de puntos fue mejorada por Tóth [29] para conseguir conjuntos de puntos con  $n e^{\Omega(\sqrt{\log n})}$  (esta función es  $= O(n^{1+\varepsilon})$  para todo  $\varepsilon > 0$ ) rectas bisectrices y, recientemente, Nivasch [26] ha encontrado una construcción más sencilla, que además mejora la constante escondida en la notación asintótica.

Como algunos lectores pueden estar imaginando, para conjuntos de puntos desde algún punto de vista “naturales”, existen resultados adicionales. Concluimos la exposición sobre este problema mencionando un par de resultados en distintas direcciones. Ambos tienen algún tipo de generalización a dimensiones superiores.

Edelsbrunner, Valtr y Welzl [16] estudiaron conjuntos de puntos *densos*, aquéllos en los que la relación entre la máxima y la mínima distancia definida por puntos del conjunto es  $O(\sqrt{n})$ . Demostraron que para estos conjuntos el número máximo de rectas bisectrices es  $O(n \text{ polilog}(n))^3$ . La construcción del conjunto de la primera fase de la cota inferior, con  $\Omega(n \log n)$  rectas bisectrices, puede hacerse de manera que el conjunto sea denso, por lo que la distancia entre las cotas inferior y superior para este caso es mucho menor que para la versión general.

Bárány y Steiger [13] estudiaron el problema para conjuntos aleatorios de puntos. Si el conjunto sigue una distribución uniforme en un convexo  $K \subset \mathbb{R}^2$ , demostraron que el número esperado de rectas bisectrices es  $\Theta(n)$ .

Concluimos la sección introduciendo un concepto relacionado con las  $j$ -aristas:

**DEFINICIÓN 2.** Sea  $k \leq \frac{n}{2} - 1$ . Se dice que una arista (orientada)  $pq$  es una  $(\leq k)$ -arista de  $S$  si a la derecha de la recta definida por  $pq$  hay como mucho  $k$  puntos de  $S$ .

<sup>3</sup>Se denota por  $\text{polilog}(n)$  una función que es potencia o composición de funciones logarítmicas. Obsérvese que, por tanto,  $n \text{ polilog}(n)$  es  $O(n^{1+\varepsilon})$  para todo  $\varepsilon > 0$

Obsérvese que, si denotamos por  $E_j(S)$  el número de  $(\leq j)$ -aristas de  $S$ , se tiene que  $E_j(S) = \sum_{i=0}^j e_i(S)$ . Además, si  $n$  es par se tiene que  $E_{\frac{n-2}{2}}(S) = \binom{n}{2} + \frac{1}{2} b(S)$ , pues las aristas bisectrices se cuentan dos veces. En este caso, la cota superior resulta relativamente sencilla. El siguiente resultado fue originalmente demostrado por Alon y Gyóri [10] y posteriormente Peck [27] encontró la demostración que presentamos.

**TEOREMA 5.** *Si  $S$  es un conjunto de  $n$  puntos,  $E_j(S) \leq (j + 1)n$ . Además, la cota es óptima para todo  $0 \leq j \leq \frac{n}{2} - 1$ .*

**DEMOSTRACIÓN.** La segunda parte del enunciado es especialmente sencilla. De hecho, si los puntos de  $S$  son los vértices de un polígono convexo (y sólo en ese caso), se tiene que  $e_j(S) = n$  para todo  $j = 0, \dots, \frac{n}{2} - 1$ .

Supongamos que  $p$  es adyacente a una  $j$ -arista y no lo es a ninguna  $j_0$ -arista con  $j_0 < j$ . Consideremos la sucesión de los índices de las aristas que encontramos al realizar una rotación completa alrededor de  $p$ , empezando en una  $j$ -arista (contando tanto las aristas de la forma  $pq$  como las de la forma  $qp$ , pero sólo para  $j < n/2$ ). Es sencillo ver que dicha sucesión verifica las siguientes propiedades: empieza y termina en  $j$ , alcanza el valor  $\frac{n}{2} - 1$  y el incremento es siempre  $\pm 1$ . Por tanto, el número total de  $(> j)$ -aristas adyacentes a  $p$  es, al menos,  $n - 2j - 3$ , de donde se deduce que el número de  $(\leq j)$ -aristas adyacentes a  $p$  es, como mucho,  $2(j + 1)$ .  $\square$

Por supuesto, también tiene sentido preguntarse por cotas inferiores para  $E_j(S)$ . En este caso es ésta la cota que presenta más dificultades, y posponemos su presentación hasta la siguiente sección, debido a su estrecha relación con los problemas en ella tratados.

### 3. NÚMERO DE CRUCE Y CUADRILÁTEROS CONVEXOS

Dado un grafo  $G$ , el número de cruce de  $G$ , que denotaremos  $cr(G)$ , es el menor número de intersecciones entre aristas en cualquier dibujo de  $G$  en el plano. Las aristas pueden ser curvas continuas con sólo algún requerimiento técnico adicional que omitiremos aquí (por ejemplo, los únicos vértices por los que pasa una arista son sus vértices extremos). Garey y Johnson [18] demostraron que determinar el número de cruce de un grafo dado es NP-completo, por lo que gran parte de la investigación en este área se ha centrado en el estudio de tipos especiales de grafos. Una famosa conjetura, normalmente atribuida a Guy [20] afirma que para el grafo completo,  $K_n$ , se tiene que

$$cr(K_n) = \frac{1}{4} \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n-3}{2} \right\rfloor. \tag{1}$$

Existe una construcción, relativamente sencilla, que alcanza este número de cruces (las aristas son curvas), y por tanto el término de la derecha de (1) es una cota superior de  $cr(K_n)$ . La conjetura sólo ha podido ser demostrada para  $n \leq 12$  [28] y sigue abierta incluso desde el punto de vista asintótico: según (1), se tiene que  $cr(K_n) \leq \frac{3}{8} \binom{n}{4} + O(n^3)$ , en tanto que la mejor cota inferior conocida, que se basa en un argumento de recuento a partir del número de cruce para el grafo bipartito completo  $K_{6,n}$ , es  $cr(K_n) \geq \frac{3}{10} \binom{n}{4} + O(n^3)$ .

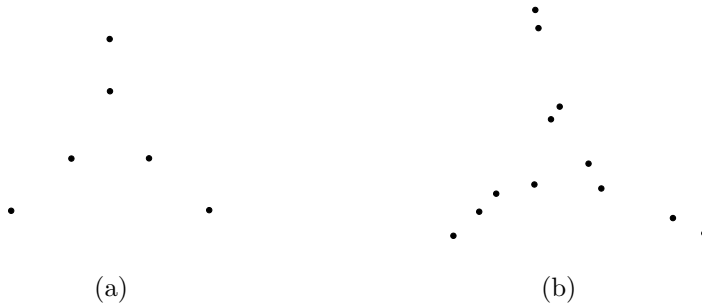


Figura 9: Ejemplos de conjuntos de puntos que minimizan  $\overline{\text{cr}}(K_n)$  para  $n = 6$  y  $n = 12$ .

Cuando se pide que la arista que une los vértices  $p$  y  $q$  sea el segmento  $pq$ , se habla de *inmersión o dibujo rectilíneo* del grafo  $G$  y el menor número de cruce en una inmersión rectilínea del grafo es el *número de cruce rectilíneo*, denotado por  $\overline{\text{cr}}(G)$ . Nos ocupamos en esta sección del estudio del número de cruce rectilíneo del grafo completo, problema que puede enunciarse también en estos términos: ¿cuál es el mínimo número de intersecciones que se obtienen al considerar los  $\binom{n}{2}$  segmentos definidos por  $n$  puntos del plano (en posición general)? El problema admite una presentación alternativa: si consideramos 4 puntos del plano (en posición general), hay dos posibilidades: o bien están en posición convexa, o bien uno de ellos está contenido en el triángulo definido por los otros tres. En el primer caso, al considerar los segmentos definidos por los puntos obtenemos una intersección, y en el segundo caso ninguna. Por tanto, al dibujar el grafo completo con segmentos rectilíneos y vértices en los puntos de  $S$ , el número de intersecciones que se obtienen es exactamente el número de cuadriláteros convexos definidos por puntos de  $S$ . Se tiene entonces que, si denotamos por  $\kappa(S)$  a este parámetro,

$$\overline{\text{cr}}(K_n) = \min_{|S|=n} \kappa(S).$$

En adelante, y con el espíritu de ser fieles a cómo han aparecido en la literatura, enunciaremos los resultados indistintamente en términos de uno de los dos parámetros.

Aunque el estudio del número de cruce rectilíneo del grafo completo tiene ya una historia de casi 40 años ([21]) (en particular para el problema de determinar el número de cruce para valores de  $n$  pequeños, véanse los ejemplos de la Figura 9) sólo recientemente se han obtenido progresos significativos para valores de  $n$  generales. Todo el trabajo reciente sobre el problema está basado en el siguiente resultado, demostrado de forma independiente por Lovász et al. [24] y Ábrego y Fernández-Merchant [2], que relaciona el número de cuadriláteros convexos con el número de  $j$ -aristas.

LEMA 3. Si  $S$  es un conjunto de  $n$  puntos del plano en posición general,

$$\kappa(S) = \sum_{j < \frac{n-2}{2}} e_j(S) \left( \frac{n-2}{2} - j \right)^2 - \frac{3}{4} \binom{n}{3}. \tag{2}$$

DEMOSTRACIÓN. Sea  $\tau(S)$  el número de 4-uplas no convexas de  $S$ . Cada 4-upla de  $S$  contribuye, bien a  $\kappa(S)$ , bien a  $\tau(S)$ . Por tanto, se tiene que  $\kappa(S) + \tau(S) = \binom{n}{4}$ . Un sencillo argumento de doble recuento proporciona otra relación entre estas cantidades: consideremos las 4-uplas ordenadas  $\{u, v, w, z\}$  tales que  $w$  está a la derecha de la recta dirigida  $uv$  y  $z$  a la izquierda. Cuatro puntos en posición convexa dan lugar a cuatro de estas 4-uplas, en tanto que cuatro puntos en posición no convexa dan lugar a seis. Por tanto, el conjunto  $S$  tiene  $4\kappa(S) + 6\tau(S)$  tales 4-uplas. Finalmente, obsérvese que una  $j$ -arista  $uv$  se puede completar a  $j(n-j-2)$  4-uplas de la forma  $\{u, v, w, z\}$ , de donde se tiene que

$$4\kappa(S) + 6\tau(S) = \sum_{j=0}^{n-2} e_j(S) j(n-j-2).$$

Entre estas dos ecuaciones eliminamos  $\tau(S)$  y utilizando las relaciones  $\sum_{j=0}^{n-2} e_j(S) = n(n-1)$  y  $e_j(S) = e_{n-j-2}(S)$ , llegamos a la identidad (2).  $\square$

Utilizando este lema, la cota inferior del Teorema 2 proporciona de forma inmediata una cota inferior para  $\kappa(S)$  y, por tanto, para  $\overline{\text{cr}}(K_n)$ . Sin embargo, la cota así obtenida resulta muy pobre: la razón es que, aunque la cota para  $e_j(S)$  del Teorema 2 es óptima, los conjuntos que la alcanzan son distintos para cada valor de  $j$ . El truco para conseguir una expresión más útil es hacer “integración por partes” en la expresión (2), es decir, utilizar el concepto de  $(\leq j)$ -arista y hacer el cambio de variable  $e_j(S) = E_j(S) - E_{j-1}(S)$ . Tras unos sencillos cálculos, se obtiene la expresión

$$\kappa(S) = \sum_{j < \frac{n-2}{2}} E_j(S) (n-2j-3) - \frac{3}{4} \binom{n}{3}. \tag{3}$$

Esta identidad proporciona cotas inferiores para  $\kappa(S)$  y  $\overline{\text{cr}}(K_n)$  a partir de cotas inferiores para el número de  $(\leq j)$ -aristas. De hecho, ha sido la causa de que se intensificaran a partir de entonces los ataques al problema de encontrar cotas inferiores para  $E_j(S)$ . La cota

$$E_j(S) \geq 3 \binom{j+2}{2} \tag{4}$$

fue demostrada, de forma independiente, por Lovász et al. [24] y Ábrego y Fernández-Merchant [2]. Aunque había sido previamente enunciada por Edelsbrunner et al. [15], la demostración presentada en este trabajo contenía un error importante.

Es fácil ver que esta cota es óptima en el rango  $j \leq n/3-1$ . Para ello considérese el triángulo  $p_0q_0r_0$  y, en la bisectriz del ángulo con vértice en  $p_0$  colocamos los puntos  $p_1, \dots, p_{n/3-1}$  (en el interior del segmento que une el incentro con  $p_0$ ). De forma

análoga, colocamos los puntos  $q_1, \dots, q_{n/3-1}$  (para el vértice  $q_0$ ) y  $r_1, \dots, r_{n/3-1}$  (para el vértice  $r_0$ ). Finalmente, perturbamos ligeramente los puntos para conseguir que estén en posición general. Las aristas definidas por dos puntos de una misma cadena dejan al menos  $n/3$  puntos a cada lado, por lo que en el rango  $j = 0, \dots, n/3 - 1$  todas las  $j$ -aristas están definidas por dos puntos de dos cadenas distintas. En concreto, la arista  $p_i q_j$  es una  $(i+j)$ -arista. Un recuento elemental es suficiente para mostrar que para este conjunto  $E_j(S) = 3\binom{j+2}{2}$  si  $j = 0, \dots, n/3 - 1$  y, por tanto, la cota (4) es óptima en dicho rango.

Introduciendo esta cota inferior en (3) se obtiene

$$\overline{\text{cr}}(K_n) \geq \frac{3}{8} \binom{n}{4} + O(n^3), \quad (5)$$

es decir, el comportamiento asintótico para el grafo rectilíneo es al menos el de la versión general dada por (1). De hecho, en este mismo trabajo [24] Lovász et al. consiguieron aprovechar un antiguo resultado de Welzl [31], sobre el número de  $j$ -aristas cuando  $j$  es cercano a  $n/2$ , para obtener una pequeña mejora de (5). En concreto, demostraron que

$$\overline{\text{cr}}(K_n) \geq \left(\frac{3}{8} + \varepsilon\right) \binom{n}{4} + O(n^3) \quad \text{donde } \varepsilon \approx 1'08 \cdot 10^{-5}. \quad (6)$$

Aunque, numéricamente, la mejora sea insignificante, lo relevante del resultado es que muestra que, para el grafo completo, el número de cruce rectilíneo y el general difieren en el comportamiento asintótico ya en el término principal, de orden  $n^4$ . El siguiente avance se debió a Balogh y Salazar [12], que mejoraron la constante del término  $\binom{n}{4}$  de (6) a  $0'37533$ .

Merece la pena resaltar que todos los resultados mencionados hasta ahora en esta sección se obtuvieron en el campo puramente combinatorio de las *secuencias circulares*, introducidas por Goodman y Pollack [19]. Supongamos que  $S$  es un conjunto etiquetado de puntos y que, al proyectarlo sobre la dirección horizontal, obtenemos la secuencia  $1, 2, \dots, n$  (se puede suponer que las proyecciones de los puntos son todas distintas). Si hacemos variar, de forma continua, la dirección de proyección, cada vez que un segmento  $p_i p_j$  es perpendicular a la dirección de proyección, se produce una trasposición entre los elementos correspondientes de la secuencia. Finalmente, cuando la dirección de proyección ha girado  $180^\circ$ , se han producido exactamente  $\binom{n}{2}$  trasposiciones y se ha llegado a la secuencia  $n, n-1, \dots, 2, 1$ . La definición de secuencia circular captura estas propiedades: una secuencia circular  $\Pi$  es una sucesión de permutaciones  $(\Pi_0, \dots, \Pi_{\binom{n}{2}})$  donde  $\Pi_0$  es la permutación  $(1, 2, \dots, n)$ ,  $\Pi_{\binom{n}{2}}$  es la permutación  $(n, n-1, \dots, 1)$ , y dos permutaciones consecutivas difieren exactamente en una trasposición. Obsérvese que un conjunto de puntos da lugar, de forma natural, a una secuencia circular. Sin embargo, no es cierto que todas las secuencias circulares puedan ser generadas a partir de configuraciones de puntos.

También es interesante observar que hasta este momento no se había encontrado ninguna propiedad para los conjuntos que minimizan  $\kappa(S)$  o  $E_j(S)$ . Esta fue precisamente nuestra primera contribución al problema, y el resultado clave es el próximo

lema, para cuya demostración necesitamos una nueva técnica, que ha demostrado en varias ocasiones su utilidad para estudiar propiedades combinatorias de conjuntos de puntos. La idea básica consiste en mover de forma continua los puntos, estudiando las situaciones en los que se produce un cambio en el vector  $E_j(S)$ . Es evidente que sólo se producen cambios en el conjunto de  $j$ -aristas cuando tres puntos se hacen colineales durante el movimiento. De hecho, esta afirmación es cierta para muchas otras estructuras asociadas a un conjunto de puntos, las de “carácter combinatorio” o “no métricas”. Estos cambios en la estructura combinatoria se denominan *mutaciones* y, sin entrar del todo en tecnicismos, se podrían definir de la siguiente forma: supongamos que los puntos de  $S$  se mueven en función del tiempo  $t$ . Se dice que en  $t = 0$  se produce una mutación si el punto  $p$  está en el segmento  $qr$  en  $t = 0$ , está a la derecha del segmento en  $t = -\varepsilon$  y a la izquierda en  $t = \varepsilon$ . Además, excepto  $pqr$  en  $t = 0$ , en el intervalo  $(-\varepsilon, \varepsilon)$  no hay tres puntos colineales.

LEMA 4. *Sea  $S$  un conjunto de  $n$  puntos del plano en posición general. Siempre existe un conjunto  $S'$  cuyo cierre convexo es un triángulo y tal que  $E_j(S') \leq E_j(S)$  para todo  $j = 0, \dots, \frac{n}{2} - 1$ .*

DEMOSTRACIÓN. Sea  $j \leq \frac{n}{2} - 1$  y supongamos que  $qr$  es una  $j$ -arista antes de la mutación (véase la Figura 10.a). En ese caso, antes de la mutación  $qp$  y  $pr$  son  $(j - 1)$ -aristas, en tanto que tras la mutación los índices se intercambian:  $qr$  es una  $(j - 1)$ -arista en tanto que  $qp$  y  $pr$  se convierten en  $j$ -aristas. Si denotamos por  $S_t$  al conjunto  $S$  en tiempo  $t$ , se tiene que  $e_j(S_\varepsilon) = e_j(S_{-\varepsilon}) + 1$  y  $e_{j-1}(S_\varepsilon) = e_{j-1}(S_{-\varepsilon}) - 1$ . Por tanto, para las  $(\leq j)$ -aristas,  $E_j(S_\varepsilon) = E_j(S_{-\varepsilon})$  y  $E_{j-1}(S_\varepsilon) = E_{j-1}(S_{-\varepsilon}) - 1$ .

Lo que necesitamos, por tanto, para garantizar que  $E_j(S)$  disminuye, es encontrar un movimiento en el que todas las mutaciones que se produzcan sean del tipo de la descrita: que cada vez que un punto  $p$  atraviese un segmento  $qr$ , lo haga desde el semiplano que contiene  $j \leq \frac{n}{2} - 1$  puntos, al semiplano con  $n - j - 2 \geq \frac{n}{2} - 1$  puntos.

Sea  $q$  un vértice del cierre convexo y sea  $\ell$  una recta que pasa por  $q$  y deja a cada lado no más de  $n/2$  puntos de  $S$ . Si movemos  $q$  en la dirección de  $\ell$ , y alejándolo del conjunto, las rectas que atraviesa  $q$  están definidas por dos puntos a un mismo lado de  $\ell$ , como la de la Figura 10.b). Antes de la mutación, la arista  $qr$  deja del lado de  $p$  menos de la mitad de los puntos y, por tanto, la mutación disminuye el número de  $(\leq j)$ -aristas.

Ya podemos concluir la demostración: si  $S$  tiene más de tres vértices en el cierre convexo, sean  $q_1$  y  $q_2$  dos vértices no consecutivos, y elijamos dos direcciones  $\ell_1$  y  $\ell_2$  como las del párrafo anterior. El lector podrá convencerse de que las rectas  $\ell_1$  y  $\ell_2$  se cortan dentro del cierre convexo y que, por tanto, al mover los puntos suficientemente lejos, desaparecen del cierre convexo los vértices entre  $q_1$  y  $q_2$ . Iterando el procedimiento, hemos de terminar en un conjunto  $S'$  con cierre convexo triangular y tal que  $E_j(S') \leq E_j(S)$  para todo  $j = 0, \dots, \frac{n}{2} - 1$ .  $\square$

Es sencillo ver cómo cambia el parámetro  $\kappa(S)$  durante una de estas mutaciones y, combinándolo de forma adecuada con el cambio en el número de  $j$ -aristas, obtener una expresión que se conserva en cualquier mutación. Calculando los valores corres-

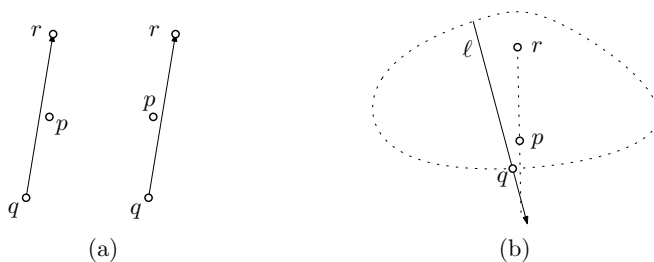


Figura 10: Ilustración de la demostración del Lema 4.

pondientes a la posición convexa, se obtiene una demostración alternativa de una expresión equivalente a (2).

El Lema 4 tiene dos importantes consecuencias: la primera la demostración de la hasta entonces conjetura de que el cierre convexo de los conjuntos óptimos es un triángulo, y la segunda una demostración más sencilla de la desigualdad (4).

**TEOREMA 6.** *El cierre convexo de los conjuntos que minimizan el número de cuadriláteros convexos (y, por tanto, de los que minimizan el número de cruce rectilíneo) es un triángulo.*

**DEMOSTRACIÓN.** La identidad (3) asegura que, si  $E_j(S') \leq E_j(S)$  para todo  $j$ , entonces  $\kappa(S') \leq \kappa(S)$ . Por tanto, el Lema 4 concluye la demostración.  $\square$

**TEOREMA 7.** *Si  $S$  es un conjunto de  $n$  puntos en posición general,*

$$E_j(S) \geq 3 \binom{j+2}{2}. \quad (7)$$

**DEMOSTRACIÓN.** Según el Lema 4 es suficiente demostrar la cota para conjuntos con cierre convexo triangular. Con esta observación la demostración se convierte en un sencillo ejercicio de inducción: sean  $\{p, q, r\}$  los vértices del cierre convexo y consideremos el conjunto  $S_0 = S \setminus \{p, q, r\}$ . Obsérvese que una  $k$ -arista de  $S_0$  se convierte en una  $(k+1)$  ó  $(k+2)$ -arista de  $S$ . Además, hay exactamente  $2(j+1)$  ( $\leq j$ )-aristas de  $S$  adyacentes a cada vértice del cierre convexo (considérese una rotación alrededor del vértice), con lo que el número de ( $\leq j$ )-aristas adyacentes a un vértice del cierre convexo es exactamente  $3+6j$  (las aristas del cierre convexo han sido contadas dos veces). Por tanto,

$$E_j(S) \geq E_{j-2}(S_0) + 3 + 6j \geq 3 \binom{j}{2} + 3 + 6j = 3 \binom{j+2}{2}. \quad (8)$$

$\square$

Una mirada a las desigualdades de (8) es suficiente para identificar una vía de ataque para mejorar la cota inferior.  $E_j(S)$  no crecerá más de lo garantizado por (8) mientras no haya  $(j-1)$ -aristas de  $S_0$  (el conjunto de puntos interiores) que sean



$j$ -aristas de  $S$ . En ([6]) conseguimos demostrar que, para  $j \geq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ , existe necesariamente un cierto número de tales aristas:

**TEOREMA 8.** *Sea  $S$  un conjunto de  $n$  puntos del plano en posición general, y sea  $T$  un triángulo que contiene a  $S$ . Si  $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor \leq j \leq \frac{n}{2} - 1$ , existen al menos  $3j - n + 3$   $j$ -aristas de  $S$  que tienen a su derecha un solo vértice de  $T$ .*

La demostración no es sencilla y se sale de los límites de este trabajo. Sólo mencionaremos que se basa, de nuevo, en las  $k$ -rotaciones, y que no requiere de ninguna técnica adicional a las ya presentadas.

Utilizando el Teorema 8 la inducción nos proporciona una nueva cota inferior. Para presentarla de forma más sencilla, suponemos que  $n$  es múltiplo de 3 y adoptamos el convenio de que  $\binom{p}{q} = 0$  si  $p < q$ .

**TEOREMA 9 ([6]).** *Si  $S$  es un conjunto de  $n = 3m$  puntos en posición general,*

$$E_j(S) \geq 3 \binom{j+2}{2} + 3 \binom{j - \frac{n}{3} + 2}{2}. \tag{9}$$

Recientemente, Ábrego et al. han encontrado una construcción que demuestra que esta cota es óptima en el rango  $j \leq \lfloor 4n/9 \rfloor - 1$ . Introduciendo la cota (9) en la ecuación (3), obtenemos de forma inmediata:

**TEOREMA 10.** *Para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,*

$$\overline{\text{cr}}(K_n) \geq \left( \frac{41}{108} + \varepsilon \right) \binom{n}{4} + O(n^3) \geq 0'379688 \binom{n}{4} + O(n^3). \tag{10}$$

Esta cota, junto con un resultado adicional sobre el número de  $j$ -aristas cuando  $j$  es cercano a  $n/2$ , ha permitido obtener el valor exacto del número de cruce rectilíneo y el número máximo de rectas bisectrices para  $n \leq 27$  [4].

Presentamos ahora, aunque de forma breve, el problema asociado de las cotas superiores: para dar una cota superior para  $\overline{\text{cr}}(K_n)$  es suficiente construir una configuración de puntos con pocos cuadriláteros convexos. La mejor estrategia conocida se basa en un resultado de Ábrego y Fernández-Merchant [3], cuya idea es la siguiente: si  $S_0$  es un conjunto de  $m$  puntos y su conjunto de aristas bisectrices  $B_0$  contiene un emparejamiento (es decir, los puntos de  $S_0$  se pueden emparejar utilizando aristas de  $B_0$ ), a partir de  $S_0$  se puede construir otro conjunto  $S_1$ , de tamaño  $2m$ , cuyo conjunto de aristas bisectrices también contiene un emparejamiento, y tal que  $\kappa(S_1)$  es “pequeño”. Los resultados de este procedimiento serán tanto mejores cuanto mejor sea el conjunto de partida. Actualmente, el récord se ha obtenido utilizando la construcción para  $n = 90$  de Aichholzer [5], que proporciona la cota superior

$$\overline{\text{cr}}(K_n) \leq 0'38054415 \binom{n}{4} + O(n^3). \tag{11}$$

Terminamos la sección presentando el que es, desde nuestro punto de vista, el problema abierto más interesante relacionado con estos resultados.

La única propiedad estructural que se conoce de los conjuntos que minimizan el número de cruce es que su cierre convexo es un triángulo. Sin embargo, una mirada a los ejemplos óptimos conocidos para valores pequeños de  $n$ , como los de la Figura 9, sugiere que no sólo el cierre convexo es un triángulo, sino que el conjunto está formado, al menos hasta la zona central, por una sucesión de triángulos anidados de cierta forma especial. Más en concreto, se han formulado las siguientes conjeturas:

DEFINICIÓN 3. *Sea  $S$  un conjunto de  $n = 3m$  puntos.*

1. *Se dice que  $S$  es 3-separable si se puede dividir en tres subconjuntos  $A$ ,  $B$  y  $C$ , de igual tamaño, de forma que cada uno está separado por una recta de la unión de los otros dos.*
2. *Se dice que  $S$  es 3-simétrico si los subconjuntos  $B$  y  $C$  del apartado anterior se obtienen del conjunto  $A$  mediante un giro de  $120^\circ$  y  $240^\circ$ , respectivamente (alrededor de un mismo punto).*

CONJETURA 1. *Los conjuntos que minimizan el número de cruce son 3-separables.*

CONJETURA 2. *Para cada  $n$  múltiplo de 3 existe un dibujo óptimo de  $K_n$  que es 3-simétrico.*

La Conjetura 2 no tiene un origen claro, en tanto que la Conjetura 1 fue formulada por Ábrego et al. en [1]. En este trabajo, además, los autores demostraron una cota inferior mejorada para los conjuntos 3-separables. La cota es una extensión de (9), pero con más términos binomiales (del orden de  $\sqrt{j - \frac{n}{3}}$ ). Si la Conjetura 1 es cierta, la nueva cota se podría introducir en la expresión (3) para obtener como cota del número de cruce rectilíneo

$$\overline{\text{cr}}(K_n) \geq \frac{2}{27}(15 - \pi^2) \binom{n}{4} + O(n^3) \geq 0'380029 \binom{n}{4} + O(n^3). \quad (12)$$

#### 4. COMENTARIOS FINALES

Especialmente en la Sección 2 existen multitud de problemas y resultados relacionados que no hemos comentado. Los conceptos allí presentados se generalizan, de manera natural, a dimensiones superiores. Como el lector ya está seguramente imaginando, si en el plano algunos de los problemas mencionados siguen abiertos, para dimensión  $d \geq 3$  la situación no es mejor. La principal dificultad es que una de las técnicas básicas para estudiar estos problemas en el plano, las rotaciones, se pierden completamente en dimensiones superiores.

El análogo de la  $k$ -arista es la  $k$ -faceta, es decir,  $d$ -puntos que definen un hiperplano tal que, en su “lado positivo” hay exactamente  $k$  puntos del conjunto. La única cota óptima que se ha encontrado en  $d \geq 3$  es la superior para  $E_k$ , es decir, el número máximo de ( $\leq k$ )-facetas que puede tener un conjunto de puntos. Se sabe que dicha cantidad se maximiza, igual que en el caso del plano, cuando el conjunto de puntos son los vértices de un poliedro convexo, configuración para la que el número de ( $\leq k$ )-facetas es siempre el mismo (y relativamente sencillo de contar). Sin embargo, incluso en este caso la solución no se puede considerar enteramente satisfactoria: la

demostración encontrada por Welzl [32] utiliza un profundo teorema de la teoría de politopos, el “Generalized Lower Bound Theorem”. Una demostración “elemental” del resultado podría arrojar nueva luz sobre este tipo de problemas.

Para terminar, quiero expresar mi agradecimiento a Sonia Pérez y a un anónimo y cuidadoso revisor. Sus lecturas atentas de versiones previas de este trabajo fueron de gran ayuda para mejorar esta versión final.

## REFERENCIAS

- [1] B. M. ÁBREGO, M. CETINA, S. FERNÁNDEZ-MERCHANT, J. LEAÑOS, G. SALAZAR, *3-symmetric and 3-decomposable drawings of  $K_n$* , Discrete Applied Mathematics, en prensa.
- [2] B. M. ÁBREGO, S. FERNÁNDEZ-MERCHANT, *A lower bound for the rectilinear crossing number*, Graphs and Combinatorics **21**(3), (2005), 293–300.
- [3] B. M. ÁBREGO, S. FERNÁNDEZ-MERCHANT, *Geometric drawings of  $K_n$  with few crossings*, Journal of Combinatorial Theory Series A **114**, (2007), 373–379.
- [4] B. M. ÁBREGO, S. FERNÁNDEZ-MERCHANT, J. LEAÑOS, G. SALAZAR, *The maximum number of halving lines and the rectilinear crossing number of  $K_n$  for  $n \leq 27$* , Electronic Notes in Discrete Mathematics **30**, (2008), 261–266.
- [5] O. AICHHOLZER, “Rectilinear crossing number page”. Available at: <http://www.ist.tugraz.at/staff/aichholzer/crossings.html>.
- [6] O. AICHHOLZER, J. GARCÍA, D. ORDEN, P. RAMOS, *New lower bounds for the number of  $(\leq k)$ -edges and the rectilinear crossing number of  $K_n$* , Discrete and Computational Geometry **38** (2007), 1–14.
- [7] O. AICHHOLZER, J. GARCÍA, D. ORDEN, P. RAMOS, *New results on lower bounds for the number of  $(\leq k)$ -facets*, European Journal of Combinatorics **30** (2009), 1568–1574.
- [8] M. AIGNER, G.M. ZIEGLER, “El Libro de las demostraciones”, Ed. Nivola, 2005.
- [9] M. AJTAI, V. CHVÁTAL, M. NEWBORN, E. SZEMERÉDI, *Crossing-free subgraphs*, Annals of Discrete Mathematics **12** (1982), 9–12.
- [10] N. ALON, E. GYÖRI, *The number of small semispaces of a finite set of points in the plane*, Journal of Combinatorial Theory, Ser. A **41** (1986), 154–157.
- [11] A. ANDRZEJAK, E. WELZL, *In between  $k$ -sets,  $j$ -facets, and  $i$ -faces:  $(i, j)$ -Partitions*, Discrete & Computational Geometry **29** (1) (2003), 105–131.
- [12] J. BALOGH, G. SALAZAR,  *$k$ -sets, convex quadrilaterals, and the rectilinear crossing number of  $K_n$* , Discrete and Computational Geometry **35** (2006), 671–690.
- [13] I. BÁRÁNY, W. STEIGER, *On the expected number of  $k$ -sets*, Discrete and Computational Geometry **11** (1994), 243–263.
- [14] T. K. DEY, *Improved bounds on planar  $k$ -sets and related problems*, Discrete and Computational Geometry **19** (1998), 373–382.
- [15] H. EDELSBRUNNER, N. HASAN, R. SEIDEL Y X. J. SHEN, *Circles through two points that always enclose many points*, Geometriae Dedicata **32** (1989), 1–12.

- [16] H. EDELSBRUNNER, P. VALTR, E. WELZL, *Cutting dense point sets in half*, Discrete and Computational Geometry **17** (1997), 243-255.
- [17] P. ERDŐS, L. LOVÁSZ, A. SIMMONS, E.G. STRAUSS, Dissection graphs on planar point sets. In *A Survey of Combinatorial Theory*, North Holland, Amsterdam, (1973), 139-149.
- [18] M. R. GAREY, D. S. JOHNSON, *Crossing number is NP-complete*, SIAM Journal on Algebraic and Discrete Methods **4** (1983), 312-316.
- [19] J. E. GOODMAN AND R. POLLACK, *On the combinatorial classification of non-degenerate configurations in the plane*, Journal of Combinatorial Theory Ser. A **29** (1980), 220-235.
- [20] R. K. GUY, *Crossing Numbers of Graphs*, In *Graph Theory and Applications: Proceedings of the Conference at Western Michigan University*, (Ed. Y. Alavi, D. R. Lick, A. T. White). New York: Springer-Verlag, (1972) 111-124.
- [21] H. F. JENSEN, *An upper bound for the rectilinear crossing number of the complete graph*, Journal of Combinatorial Theory Ser. B **10** (1971), 212-216.
- [22] T. LEIGHTON, "Complexity Issues in VLSI", Foundations of Computing Series, MIT Press, Cambridge, MA (1983).
- [23] L. LOVÁSZ, *On the number of halving lines*, Ann. Univ. Sci. Budapest, Eötvös, Sect. Math. **14**:107-108, 1971.
- [24] L. LOVÁSZ, K. VESZTERGOMBI, U. WAGNER, E. WELZL, *Convex Quadrilaterals and  $k$ -Sets*. In *Towards a Theory of Geometric Graphs*, J. Pach (Ed.) Contemporary Mathematics **342** (2004), 139-148.
- [25] J. MATOUŠEK, *Lectures on Discrete Geometry*. Springer (2002).
- [26] G. NIVASCH, *An improved, simple construction of many halving edges*, In *Discrete and Computational Geometry - 20 Years Later* (E. Goodman, J. Pach, and R. Pollack, eds.), Contemporary Mathematics **453**, American Mathematical Society (2008), 299-305.
- [27] G. W. PECK, *On  $k$ -sets in the plane*, Discrete Mathematics **56** (1985) 73-74.
- [28] S. PAN, B. R. RICHTER, *The crossing number of  $K_{11}$  is 100*, Journal of Graph Theory **56** (2007), 105-112.
- [29] G. TÓTH, *Point sets with many  $k$ -sets*, Discrete & Computational Geometry **26** (2001), 187-194.
- [30] U. WAGNER,  *$k$ -Sets and  $k$ -Facets*. In *Discrete and Computational Geometry - 20 Years Later* (E. Goodman, J. Pach, and R. Pollack, eds.), Contemporary Mathematics **453**, American Mathematical Society (2008), 443-514.
- [31] E. WELZL, *More on  $k$ -sets of finite sets in the plane*, Discrete & Computational Geometry **1** (1986), 95-100.
- [32] E. WELZL, *Entering and leaving  $j$ -facets*, Discrete & Computational Geometry **25** (2001), 351-364.